13. Suvorova, Ju. V. O kriterii prochnosti, osnovannom na nakoplenii povrezhdennosti, i ego prilozhenii k kompozitam [Text] / Ju. V. Suvorova // Izv. AN SSSR, Mehanika tverdogo tela.—1979.—№ 4.— P. 107—111.
14. Courant, R. On the solution of non-linear hyperbolic differential equation by finite differences [Text] / R. Courant, E. Isacson, M. Rees // Communs Pure Appl. Math.—1952. –P. 243—254.



***Розглядається задача про вісесиметричні коливання пружної тонкостінної сферичної оболонки, яка заповнена рідиною, що стискується. При цьому рівняння руху побудовані в радіальних переміщеннях і з використанням спеціального потенціалу. Задача зводиться до дослідження однорідної системи двох рівнянь щодо радіального переміщення і згаданого потенціалу. Умова не тривіальності рішення системи призводить до трансцендентного рівняння***

***Ключові слова: коливання, хвиля, частота, щільність, оболонка, тиску, потенціал***

***Рассматривается задача об осесимметрических свободных колебаниях упругой тонкостенной сферической оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью. При этом уравнения движения построены в радиальных перемещениях и с использованием специального потенциала. Задача сводится к исследованию однородной системы двух уравнений относительно радиального перемещения и упомянутого потенциала. Условие нетривиальности решения системы приводит к трансцендентному уравнению***

***Ключевые слова: колебания, волна, частота, плотность, оболочка, давления, потенциал***


УДК 539.3

# ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ ОБРАТНЫМ МЕТОДОМ


**Г. А. Мамедова**
Кандидат физико-математических наук, доцент*
Email: gular-gulshan@rambler.ru
**М. А. Рустамова**
Кандидат физико-математических наук, доцент*
Email: mehsetir@yahoo.com
**С. Р. Агасиев**
Диссертант
Кафедра "Эксплуатация и реконструкция сооружения и здания"
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет
ул. Айна Султанова 5, г. Баку, Азербайджанская Республика, AZ1141
Email: bakisamir@mail.ru
*Отдел «Волновой динамики»
Институт Математики и Механики
Национальной Академии Наук Азербайджана
ул. Б. Вахабзаде, 9, г. Баку,
Азербайджанская Республика, AZ1141


## 1. Введение

Одной из важнейших задач на стадии проектирования тонкостенных оболочечных конструкций, широко применяемых в авиационной, ракетно-космической технике и различных областях промышленности, является динамический расчет. Необходимым элементом исследования динамики оболочек является определение собственных частот и форм малых колебаний, причем наибольший интерес для приложений представляют частоты из нижнего спектра [1].

Важное место среди динамических контактных задач теории оболочек занимают задачи о свободных колебаниях упругих тонких оболочек, контактирующих с упругой твердой средой и жидкостью.

В работах [2, 3, 6 — 10] исследуются частоты и формы свободных колебаний сферической и цилиндрической оболочек, контактирующих с упругой и жидкой средой, в частности асимптотическими методами получены приближенные простые формулы для вычисления частоты и определения формы колебаний рассмотренных систем, а это ограничивает использование полученных результатов, исключая в ряде важных случаев возможность проведения качественного анализа исследуемых процессов.

Кроме того, в работе [4] рассмотрены свободные осесимметрические колебания тонкостенной бесконечной цилиндрической оболочки, содержащей сжимаемую жидкость. Поскольку нахождение собственных частот связано с решением трансцендентных уравнений, здесь частота колебаний оболочки, не содержащей жидкость, выражена через частоту колебаний системы в явном виде, что позволяет как аналитически, так и графически исследовать спектры частот системы.

В данной работе исследуется свободное колебание сферической оболочки с жидкостью.

## 2. Постановка задачи

В работе уравнения движения сферической оболочки разделены две части: систему, описывающую потенциальное движение, и уравнение, описывающее вихревое движение. Первая система в случае тонкостенной оболочки будет иметь вид

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{2}{r^2}W+\frac{1}{r^2}\Delta_0 W+$$
$$+\frac{4\nu-3}{(1-2\nu)r^2}\Delta_0\Phi+\lambda^2 W-\frac{p\omega}{Gh}=0\,,$$

$$\frac{4(1-\nu)}{1-2\nu}\cdot\frac{1}{r^2}W+\frac{1}{r^2}\Delta_0 W+\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)r^2}\Delta_0\Phi+\lambda^2\Phi=0\,, \qquad (1)$$

$$(p=h\omega e^{i\omega t})$$

здесь

$$\lambda^2=\frac{q\omega^2}{Gh}\,,$$

где $\nu$ -коэффициент Пуассона; $r$ -радиус оболочки; $h$ -толщина; $p$ - давление жидкости на оболочку; $\omega$ – частота; q- плотность материала оболочки; G- модуль сдвига; W-радиальное смещение.

$$\Delta_0=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\,,$$

где $\varphi$ ,$\theta$- сферические координаты.

Поверхностные смещения $u$ и $\vartheta$ представлены в виде

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\phi},$$
$$\vartheta=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\phi}-\frac{\partial F}{\partial\theta},$$

где Ф, F – функции, описывающие потенциальную и вихревую составляющую движения.

Давление жидкости определяется для случая потенциального движения сжимаемой жидкости следующим образом.

$$p=-\rho\frac{\partial\Pi}{\partial t}\,, \qquad (2)$$

где $\rho$ - плотность жидкости, $r$ -расстояние от центра, $\Pi$ - потенциал скорости, удовлетворяющей уравнению

$$a^2\Delta\Pi=\frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\,, \qquad (3)$$

где $\Delta$ - оператор Лапласа, $a$ - скорость распространения возмущений в жидкости.

Радиальная скорость оболочки и потенциал скорости жидкости на поверхности контакта связаны соотношением.

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}=\frac{\partial\Pi}{\partial r}\,, \qquad (4)$$

где $u_r$ - радиальное перемещение оболочки, или учитывая, что при колебаниях

$$\Pi=\Pi_\omega i e^{i\omega t}$$
$$u_r=We^{i\omega t}\,,$$

имеем

$$\omega W=\frac{\partial\Pi_\omega}{\partial r}\,. \qquad (5)$$

Согласно (2), при колебаниях будет

$$p_\omega=\rho\omega\Pi_\omega\,. \qquad (6)$$

А уравнение (3) обратится в уравнение Гельмгольца, решением которого, отвечающим рассматриваемой задаче о свободных колебаниях сферической оболочки, будет

$$\Pi_\omega=\frac{\Pi_n}{\sqrt{r}}Z_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)\cdot\underline{\underline{\bar{Y}}}_n(\theta,\phi) \qquad (n=1,2\ldots)\,, \quad (7)$$

где $Z_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)=j_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)\cdot\underline{\underline{\bar{Y}}}_n(\theta,\phi)$ - сферическая гармоника.

Здесь $j_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)$ - сферическая функция Бесселя первого рода

$$j_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)=\sqrt{\frac{\pi a}{2\omega r}}\cdot J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right). \qquad (8)$$

Неизвестные функции в (1) также выражаются при помощи сферических гармоник

$$W=W_n\underline{\underline{\bar{Y}}}_n(\theta,\phi); \qquad \Phi=\Phi_n\underline{\underline{\bar{Y}}}_n(\theta,\phi)\,. \qquad (9)$$

Из (7) и (8) следует

$$\Pi_\omega=\frac{\Pi_n}{r}\sqrt{\frac{\pi a}{2\omega}}\cdot J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)\cdot\underline{\underline{\bar{Y}}}_n(\theta,\phi)\,. \qquad (10)$$

Из (5), (9) и (10) можно получить

$$W_n=\frac{\Pi_n}{r\omega}\sqrt{\frac{\pi a}{2\omega}}\cdot\left[\frac{\omega}{a}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)-\frac{1}{r}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right]. \qquad (11)$$

Из (6), (10) и (11) можно определить давление $p$ следующим образом

$$\frac{\rho\omega\ J_{\frac{1}{\ }}\left(\frac{\ }{\ }\right)\cdot W_n\underline{\underline{\bar{Y}}}_n(\theta,\phi)}{\frac{\omega}{a}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)\ \ \frac{1}{r}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}\,. \qquad (12)$$

учитывая, что функции в (9) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}&\Delta_0 W + n(n+1)W = 0;\\ &\Delta_0 \Phi + n(n+1)\Phi = 0;\end{aligned} \tag{13}$$

и используя (12), (13) и (11) в (1), получим

$$\begin{aligned}&\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\cdot\left(\lambda^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)W_n+\\ &+\frac{n(n+1)(4\nu-3)}{2(1-\nu)r^2}\Phi_n-\\ &-\frac{1}{Gh}\cdot\frac{\rho\omega^2 J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)\cdot W_n \underline{\underline{\overline{Y}_n}}(\theta,\phi)}{\frac{\omega}{a}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)-\frac{1}{r}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)_n}=0.\\ &\frac{2W_n}{r^2}+\left(\lambda^2-\frac{2n(n+1)(1-\nu)}{(1-2\nu)r^2}\right)\Phi_n=0\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Уравнение (14) будет иметь нетривиальное решение при

$$\begin{vmatrix}\frac{\omega^2}{M}-n(n+1)-\frac{\rho}{qM}\omega^2\zeta & \frac{n(n+1)(4\nu-3)}{1-\nu}\\ 2 & \frac{\omega^2}{M}-\frac{2n(n+1)(1-\nu)}{1-2\nu}\end{vmatrix}=0\,,$$

где

$$\zeta=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\frac{\omega}{a}J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)-\frac{1}{r}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}\qquad M=\frac{Gh}{r^2 q}\,,$$

или

$$\begin{vmatrix}\frac{\omega^2}{M}\left(1-\frac{\rho\zeta}{q}\right)-n(n+1) & n(n+1)\alpha\\ 2 & \frac{\omega^2}{M}-n(n+1)\beta\end{vmatrix}=0\,, \tag{15}$$

здесь

$$\alpha=\frac{4\nu-3}{1-\nu};\qquad \beta=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\,.$$

Из (15) следует

$$\begin{aligned}&\frac{\omega^4}{M^2}\left(1-\frac{\rho\zeta}{q\omega}\right)-n(n+1)\left[1+\beta-\frac{\rho\zeta\beta}{q}\right]\frac{\omega^2}{M}-\\ &-n^2(n+1)^2\beta-2n(n+1)\alpha=0.\end{aligned} \tag{16}$$

Последнее имеет решение

$$\frac{\omega^2}{M}=\frac{n(n+1)\left[1+\beta\left(1-\frac{\rho\zeta}{q}\right)\right]\pm\sqrt{\left\{n(n+1)\left[1+\beta\left(1-\frac{\rho\zeta}{q}\right)\right]\right\}^2+4\left(2\alpha-n(n+1)\beta\right)n(n+1)}}{2\left(1-\frac{\rho\zeta}{q}\right)} \tag{17}$$

При отсутствии жидкости (16) примет вид

$$\frac{\omega_0{}^2}{M}=\frac{n(n+1)(1+\beta)\pm\sqrt{\left\{n(n+1)(1+\beta)\right\}^2+4\left(2\alpha-n(n+1)\beta\right)n(n+1)}}{2} \tag{18}$$

Исключив из (16) и (17) M, получим

$$\omega_0{}^2=\omega^2\frac{\left(n(n+1)(1+\beta)\pm\sqrt{\left\{n(n+1)(1+\beta)\right\}^2+4\left(2\alpha-n(n+1)\beta\right)n(n+1)}\right)}{n(n+1)\left[1+\beta\left(1-\frac{\rho\zeta}{q}\right)\right]\pm\sqrt{\left\{n(n+1)\left[1+\beta\left(1-\frac{\rho\zeta}{q}\right)\right]\right\}^2+4\left(2\alpha-n(n+1)\beta\right)n(n+1)}} \tag{19}$$

Формула (19) выражает зависимость $\omega_0$ от $\omega$.

Уравнение (19) связывает свободную частоту системы со свободной частотой оболочки в отсутствии жидкости. Нахождение частот свободных колебаний системы в целом связано с решением трансцендентного уравнения (16).

При решении трансцендентного уравнения часто авторы прибегают к приближенным методам, в частности к асимптотическим [5]. Однако, решение обратной задачи позволяет строить спектр частот графики, что упрощает исследование, в том числе определение частоты.

При некоторых данных значениях параметров задачи на интервале $0-6\cdot10^7$ для $N(\omega)$ и $0-25$ для $\omega$ построены графики $N(\omega)$ - $\omega$ рис. 1.( $N(\omega)=\omega_0$ ). На рисунках показаны три фрагмента частотного спектра $\omega-\omega_0$ для трёх значений отношения плотности жидкости к плотности оболочки.

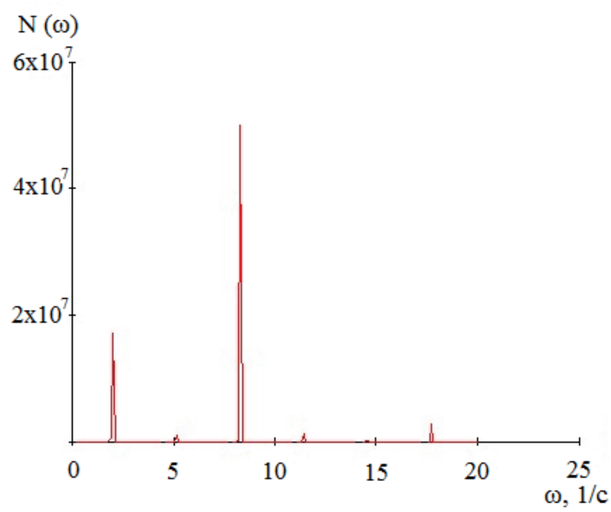


Рис. 1. Зависимость частот колебаний оболочки, не содержащей жидкость N(ω), от системы ω $r=100$, $a=500$, $\frac{p}{q}=0.3$

На интервале $0-1.5\cdot10^3$ для $N(\omega)$ и $0-25$ для $\omega$ построены графики $N(\omega)$ - $\omega$ рис. 2. ( $N(\omega)=\omega_0$ ).

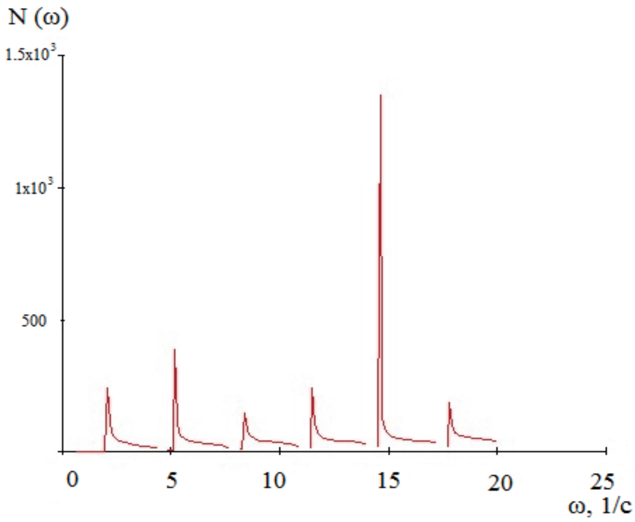


Рис. 2. Зависимость частот колебаний оболочки, не содержащей жидкость N(ω), от системы ω $r=100, \quad a=500, \quad \frac{p}{q}=0.05$

На интервале $0-300$ для $N(\omega)$ и $0-25$ для построены графики $N(\omega)$ - $\omega$ рис. 3.( $N(\omega)=\omega_0$ ).

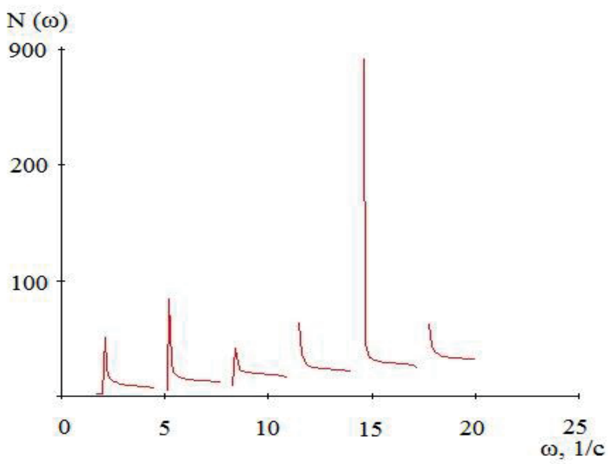


Рис. 3. Зависимость частот колебаний оболочки, не содержащей жидкость N(ω), от системы ω $r=100, \quad a=500, \quad \frac{p}{q}=0.01$

## 3. Выводы

Рассмотрим участок графика соответствующий первой моде колебаний жидкости. С увеличением $\omega_0$ (жёсткости оболочки) частота собственных колебаний системы $\omega$ заметно нарастая, затем замедляет рост, асимптотически приближаясь к некоторому значению, соответствующему жёсткому закреплению. На второй моде колебаний жидкости при небольшом $\omega_0$ (жёсткости) частота системы $\omega$, начиная со значения, соответствующего жёсткому закреплению при первой моде, сначала быстро возрастает с последующим замедлением, асимптотически приближаясь к значению, соответствующему жёсткому закреплению для второй моды. Аналогичная картина наблюдается и для последующих мод. Следует отметить, что имеет место чередование крутизны кривых для последующих мод.

Анализируя характер кривых в зависимости от значений различных параметров, следует отметить: увеличение скорости звука в жидкости увеличивает крутизну кривой $\omega-\omega_0$.

### Литература

1. Михасев, Г. И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы [Текст] / Г. И. Михасев, П. Е. Товстик. — М:. ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 292 с.
2. Латифов, Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку [Текст] / Ф. С. Латифов // Элм, 1999. — 164 с.
3. Chen, W. Q. On eigenfrequtncies of an anisotropic sphere [Text] / W. Q. Chen, J. B. Cai, G. R. Ye, H. J. Ding // Trans. ASME.J.Appl.Mech. — 2000. — V. 67, №2. — P. 422-424.
4. Сейфуллаев, А. И. Влияние плотности среды на свободные колебания цилиндра содержащего сжимаемую жидкость [Текст] / А. И. Сейфуллаев, Г. А. Мамедова // Механика – машиностроение. — 2011. — №1 — С. 28-32
5. Смирнов, В. Н. Курс высшей математики [Текст] / В. Н. Смирнов. — М., Наука, 1974. — 672с.
6. Балакирев, Ю. Г. Осе симметричные колебания пологой сферической оболочки с жидкостью [Текст] / Ю. Г. Балакирев. — Инженерный журналь МТТ, 1967. — № 5. — С. 116123.
7. Eynatollah, A. Taheri. Investigation of Free Vibrations Of Spherical Inclusion Containing Elastically Suspended Mass Situated in Acoustic Medium by the Inverse Method [Text] / Eynatollah A. Taheri, Rustamova Mashati // International Journal of Nanosystems. — 2010. — Vol. 3. — P. 23-25.
8. Голованов, А. И. Исследование свободных колебаний оболочек методом конечных элементов // Исследования по теории пластин и оболочек. — 1991. — Вып. 23. — С. 81-85.
9. Грибков, В. А. Основные итоги исследования динамических характеристик оболочек, заполненных жидкостью: анализ и жидкостью // Сб. научн. трудов симпозиума. — Новосибирск, 1992. — С. 61 - 66.
10. Huang, H. Transient interaction of spherical acoustic waves a cylindrical elastic shell and it's internal multi-degree-of – freedom mechanical systems [Text] / H. Huang, Y. P. Lu, Y. F. F. Wang // J.Acoust. Soc. America. — 1974. — Vol 56, №1. — P. 4-10.