

Литература

1. Ригли, У. Теория, проектирование и испытания гироскопов [Текст]: пер. с англ. / У. Ригли, У. Холлистер, У. Денхард. – М.: Мир, 1972. -416 с.
2. Кренделл, С. Случайные колебания [Текст]: пер. с англ. / С. Кренделл. - М.: Мир, 1967. -356с.
3. Mel'nick, V. N. Determining Gyroscopic Integrator Errors to Diffraction of Sound Waves [Text] / V. N. Mel'nick, V. V. Karachun // Int. Appl. Mech. -2004. –Vol. 40(3). – P. 328-336.
4. Karachun, V. V. Influence of Diffraction Effects of the Inertial Sensors of a Gyroscopically Stabilized Platform: Three – Dimensional Problem [Text] / V. V. Karachun, V. N. Mel'nick // Int. Appl. Mech. – 2012. –Vol. 48(4). – P. 458-464.
5. Шибельский, В. Ю. Способи зменшення похибок навігаційного обладнання в складних умовах експлуатації гіперзвукових літальних апаратів [Текст] / В. Ю. Шибельский // Наук.-практ. конф. «Актуальні проблеми розвитку авіаційної техніки», 10 червня 2013р. - Київ, 2013. –120 с.
6. Smith, P. W. Response and radiation of structural modes excited by sound [Text] / P. W. Smith // J. Acoustic Soc. Am. -1962. - Vol. 34, № 5. -P. 640-647.
7. Lyon, R. H. Vibration energy transmission in a three element structure [Text] / R. H. Lyon, T. D. Schartoun T. D. // J. Acoustic Soc. Am. - 1965.- Vol.38, №2. -P.1344-1354.
8. Maidanik, Ct. Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields [Text] / Ct. Maidanik //J. Acoustic Soc. Am. - 1962. - Vol. 34, №6. -P. 809-826.
9. Heckl, M. A. Vibrations of point-driven cylindrical shells [Text] / M. A. Heckl // J. Acoustic Soc. Am. - 1962. - Vol. 34, № 10. - P. 1553-1557.
10. Dyer, I. Noise environments of flight vehicles [Text] / I. Dyer // NOISE Control. - 1960. - Vol. 6, № 1. -P. 31-40.

*У статті запропонований підхід до дослідження напружено-деформованого стану елементів штампового оснащення з урахуванням контактної взаємодії. Завдання зводиться із залученням теорії варіаційних нерівностей до проблеми мінімізації функціонала повної внутрішньої енергії системи. При цьому визначається розподіл контактної тиску по контактних поверхнях. Також визначається напружено-деформований стан штампів*

*Ключові слова: напружено-деформований стан, штамп, контактна взаємодія, елемент штампової оснастки, технологічна система*

*В статье предложен подход к исследованию напряженно-деформированного состояния элементов штамповой оснастки с учетом контактного взаимодействия. Задача сводится с привлечением теории вариационных неравенств к проблеме минимизации функционала полной внутренней энергии системы. При этом определяется распределение контактного давления по контактными поверхностями. Также определяется напряженно-деформированное состояние штампов*

*Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, штамп, контактное взаимодействие, элемент штамповой оснастки, технологическая система*

УДК 539.3

# РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ШТАМПОВОЙ ОСНАСТКИ

**Н. А. Демина**  
 Кандидат технических наук  
 Кафедра высшей математики и физики  
 Таврический государственный  
 агротехнологический университет  
 пр. Б. Хмельницкого, 18, г. Мелитополь,  
 Запорожская обл., Украина, 72312  
 E-mail: deminanatasha@yandex.ru

## 1. Введение

Штамповая оснастка, в частности, штампы для разделительных операций (разделительные штампы – РШ) являются центральным элементом технологической системы, обеспечивающим подачу, базирование заготовки, разделение материала, калибровку детали,

съём заготовки и повторение всего технологического цикла. Прочностные и жесткостные характеристики оснастки самым непосредственным образом влияют на точность изготовления и качество поверхности штампуемых деталей. Кроме того, работоспособность и стойкость инструмента, в первую очередь режущих частей элементов разделительных штампов, зависят от

их напряженно-деформированного состояния. Все это обуславливало на всем протяжении развития штамповой оснастки уделять в процессе проектирования одно из центральных мест именно расчетам прочностных, жесткостных, стойкостных характеристик элементов штамповой оснастки.

## 2. Постановка проблемы

Обеспечение прочности элементов штампов в качестве важнейшей составляющей содержит задачу исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) с учетом контактного взаимодействия, поскольку сам технологический процесс непосредственно состоит в разделении материала посредством контакта режущих элементов штампа с заготовкой, а другие элементы штампа находятся в силовом контактом взаимодействии, которое обеспечивает передачу технологических усилий и движений в оснастке.

## 3. Литературный обзор

Среди всего множества публикаций в литературе можно выделить несколько направлений исследования напряженно-деформированного состояния элементов штамповой оснастки (ЭШО), в том числе с учетом контактного взаимодействия. Так, в работе [1] решены некоторые частные задачи контактного взаимодействия, причем на упрощенных моделях. Развитию этих моделей посвящены исследования, описанные в [2, 3]. В работе [4] для решения контактных задач применяется аппарат множителей Лагранжа и штрафных функций. В работе [5] для этой цели предлагается подход на основе теории вариационных неравенств. В работе [6] описаны общие подходы к исследованию контактного взаимодействия различными методами. Статьи [7, 8] содержат расчетные и экспериментальные методики исследования процессов вырубки-пробивки. Альтернативный метод решения контактных задач на основе метода граничных элементов предложен в работе [9]. В работах [10, 11] исследуются большие деформации в процессе контактного взаимодействия.

В то же время отсутствует полное завершённое решение данной задачи. В связи с этим целью данной работы является разработка общего подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния ЭШО с учетом контактного взаимодействия.

## 4. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния элементов штамповой оснастки

Для разработки новых подходов и моделей для расчета элементов штамповой оснастки на основе анализа напряженно-деформированного состояния с учетом контактного взаимодействия необходимо провести анализ конструкций и условий эксплуатации штампов, выявить наиболее нагруженные и ответственные элементы, разработать новые математические и численные модели. В работе [2] достаточно полно описаны решения данных задач на примере раздели-

тельных штампов для холоднолистовой штамповки. В то же время необходимо уделить особое внимание формированию математической модели НДС ЭШО с учетом контактного взаимодействия.

Как указывается в [2], можно выделить 3 уровня решения этой задачи:

I – раздельное исследование напряженно-деформированного состояния ЭШО;

II – решение контактной задачи для стадии упругого деформирования элементов оснастки и заготовки;

III – моделирование самого процесса разделения материала.

Рассмотрим уровень II на примере системы «пуансон-заготовка-матрица» РШ.

На рис. 1 приведены расчетные схемы пуансона и матрицы, а на рис. 2 – фрагмент их расчетной схемы в зоне режущей кромки Г, относительно которой введены так называемые «кромочные координаты»  $r', z'$ .

Система уравнений линейной теории упругости

$$L(u)|_{\Omega} = 0, \tag{1}$$

где  $L$  – оператор краевой задачи относительно искомого перемещения  $u(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r}$  – радиус-вектор текущей точки области  $\Omega$ , занимаемой исследуемым телом), дополняется граничными условиями на частях  $S_u$  поверхностей пуансона, матрицы и пуансон-матрицы. В осесимметричном случае в плоскости  $Oxz$  – это отрезки координатных линий  $r=\text{const}, z=\text{const}$ . Тогда, кроме системы уравнений (1), дополненной кинематическими граничными условиями на частях поверхности  $S_u$ , добавляются следующие условия на части поверхности возможного контакта (рис. 2):

$$u_v + u_{v_m} \leq \delta_c. \tag{2}$$

Здесь  $u_v, u_{v_m}$  – перемещения точек режущего элемента и заготовки по нормальям к поверхностям, а  $\delta_c$  – начальный зазор в сопряжении.

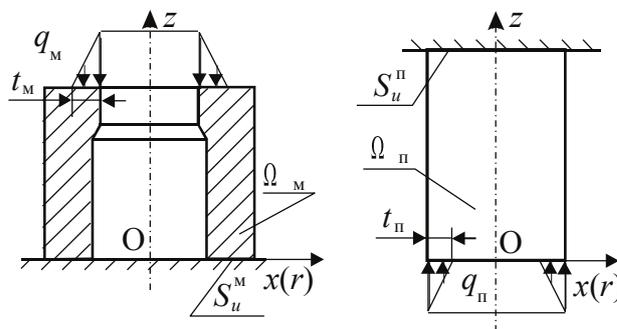


Рис. 1. Расчетные схемы матрицы и пуансона для холоднолистовой штамповки

При решении нелинейной задачи (1), (2) получаем постулируемый заранее закон распределения контактных нагрузок  $q_c$ , а искомым закон их распределения в качестве еще одного неизвестного полученной задачи. При этом в качестве параметра нагружения можно взять или величину усилия штамповки

$$\int_{(S_c)} q_c ds = P_{шт} . \tag{3}$$

Несмотря на кажущуюся простоту соотношения (2), получаемая в результате задача становится более сложной по сравнению с системой уравнений без этого соотношения, существенно нелинейной, причем в качестве дополнительных неизвестных выступают конфигурации контактных зон и распределения контактных нагрузок. Для решения таких задач используется метод вариационных неравенств [5, 6, 11], сводящий ее к проблеме минимизации функционала полной внутренней энергии Э исследуемой системы тел на множестве, задаваемом ограничениями (2):

$$\mathcal{E}(u) \rightarrow \min. \tag{4}$$

Сама задача анализа становится не только громоздкой, но и качественно сложнее, поскольку переводит задачу анализа НДС в нелинейную постановку.

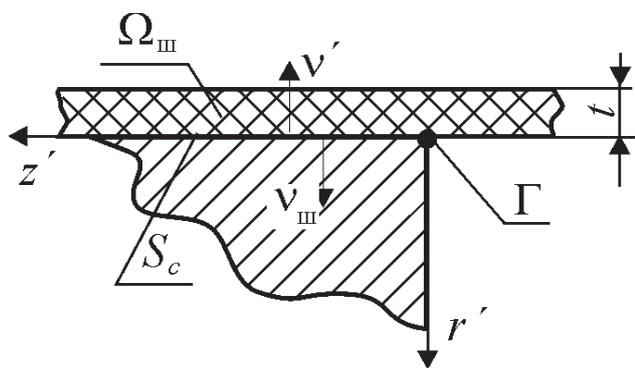


Рис. 2. Схема взаимодействия режущего элемента штампа со штампуемым материалом:  $\Omega_{шт}$  – область пространства, занимаемая штампуемым материалом;  $S_c$  – зона возможного контактного взаимодействия;  $v', v_{шт}$  – нормали к поверхностям режущего элемента и заготовки соответственно

### 5. Математическое моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки

Рассмотрим, следуя [5], постановку задачи об исследовании напряженно-деформированного состояния сопряженных элементов штампа с учетом условий контакта. Не нарушая общности, можно рассмотреть два соприкасающихся тела  $\Omega$  и  $\Omega'$ . Пусть  $S_c, S'_c$  – предельно возможные зоны контакта. Уравнения, описывающие поверхности  $S_c$  и  $S'_c$ , примем в форме

$$\Psi(\mathbf{r}) = 0, \Psi'(\mathbf{r}') = 0 \tag{5}$$

и выберем функции  $\Psi, \Psi'$  таким образом, чтобы было

$$\Psi(\mathbf{r}) > 0 \text{ при } \mathbf{r} \in \Omega, \Psi'(\mathbf{r}') < 0 \text{ при } \mathbf{r}' \in \Omega' \tag{6}$$

(для функции  $\Psi'$  – аналогично).

В результате деформации поверхности  $S_c$  и  $S'_c$  изменяются; в первом приближении искажение формы

границы тела определяется нормальными (вдоль  $\mathbf{v}$ ) перемещениями лежащих на границе частиц.

Условия непроникновения на  $S_c, S'_c$  строятся в первом приближении по величине перемещений и зазора между телами  $\Omega$  и  $\Omega'$ .

Формально это условие можно записать в форме

$$u_{vN} + u_{vN} \leq \delta_u , \tag{7}$$

где  $\delta$  – зазор в сопряжении элементов штамповой оснастки. Данное условие определяет в пространстве функций выпуклое подпространство  $K$ .

Из принципа возможных перемещений для каждого из тел  $\Omega$  можно записать вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\alpha} \sigma_{ij}(u^\alpha) \delta \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega^\alpha} \rho^\alpha F \cdot \delta u^\alpha d\Omega - \\ & \int_{S_c^\alpha} P^\alpha \cdot \delta u^\alpha dS - \int_{S_c^\alpha} \sigma_{ij}(u^\alpha) \cdot \delta u_i^\alpha v_j^\alpha dS \equiv \\ & a^\alpha(u^\alpha, \delta u^\alpha) - L^\alpha(\delta u^\alpha) - \int_{S_c^\alpha} \sigma_{ij}(u^\alpha) \cdot \delta u_i^\alpha v_j^\alpha dS = 0, \\ & \forall \delta u^\alpha, \alpha = 1, \dots, M. \end{aligned} \tag{8}$$

В уравнении (8)  $\delta u^\alpha \equiv u^\alpha - v^\alpha$  – возможное перемещение из истинного состояния; как истинное поле перемещений  $u^\alpha$ , так и кинематически допустимое поле  $v^\alpha$  должны удовлетворять условию непроникновения (7).

Как показано в [5], решение задачи в дифференциальной постановке удовлетворяет вариационному неравенству

$$a(u, \delta u) \geq L(\delta u), \forall \delta u, v \in K, u \in K. \tag{9}$$

Справедливо утверждение [2, 5]: решение вариационного неравенства (9), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяет всем уравнениям и условиям задачи в дифференциальной постановке, а решение вариационного неравенства (9) эквивалентно проблеме минимизации функционала

$$J(v) = 1/2a(v, v) - L(v) \tag{10}$$

на подмножестве  $K$  пространства  $V$ .

Таким образом, исходная задача сводится к проблеме поиска минимума функционала.

### 6. Вывод

По сравнению с общей постановкой [5, 6], решаемая задача об определении напряженно-деформированного состояния элементов штампов с учетом их контактного взаимодействия обладает целым рядом специфических особенностей, основные из которых состоят в следующем:

- большая часть сопрягаемых элементов штампов взаимодействуют по поверхностям с согласованной геометрией [6], что существенно

- усиливает строгость принятых в [5] предположений о геометрии контактирующих поверхностей;
- принятые в [5] модели предполагают малые перемещения точек поверхностей взаимодействующих тел, что ограничивает область применимости данной модели первыми этапами процесса штамповки (до момента большого проникновения режущих элементов штампов в заготовку);
  - несмотря на то, что взаимодействующие поверхности контактирующих тел – плоские, область контакта и распределение контактного давления по-прежнему являются в данной задаче искомыми (как и в общем случае).
- В дальнейшем планируется реализовать предложенную методику решения задачи для проведения численных исследований контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки и проиллюстрировать ее на примере конкретных расчетов.

---

#### Литература

1. Заярненко, Е. И. Разработка математических моделей и расчеты на прочность разделительных переналаживаемых штампов: дисс... доктора техн. наук: спец. 01.02.06 и 05.03.05 [Текст] / Заярненко Евгений Иванович. – Харьков, 1992. – 280 с.
2. Демина, Н. А. Совершенствование методов расчета элементов штамповой оснастки на основе анализа их напряженно-деформированного состояния: дисс... кандидата техн. наук: спец. 05.03.05 [Текст] / Демина Наталья Анатольевна. – Харьков, 2011. – 187 с.
3. Демина, Н. А. Моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки [Текст] / Н. А. Ткачук, Н. А. Демина, Ю. Д. Сердюк [и др.] // Обработка материалов давлением: сборник научных трудов. – Краматорск: ДГМА, 2010. – № 2 (23). – С. 240-248.
4. Jiang Pledgers O. Combined Lagrangian Multiplier and Penalty Function Finite Element Technique for Elastic Impact Analysis [Text] / O. Jiang Pledgers // Computers and Structures. – 1988. – Vol. 30. – P. 1219-1229.
5. Колтунов, М. А. Прикладная механика деформируемого твердого тела [Текст] / М. А. Колтунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода. – М.: Высш. школа, 1983. – 349 с.
6. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия [Текст] / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
7. Popat, P. B. Finite -element analysis of the blanking process [Text] / P. B. Popat, A. Ghosh, N. N. Kishore // Journal of Mechanical Working Technology . – Amsterdam. – 1989. – 18. – № 3. – P. 269-282.
8. Ghosh, A. A new approach to the mechanics of the blanking operation: theoretical model and experimental verification [Text] / A. Ghosh, V. Raqhu Ram, P. B. Popat // Journal of Mechanical Working Technology. – 1985. – 11, № 2. – P. 215-228.
9. Kuich, G. Applications of the Boundary Elements Method to Contact Problem [Text] / G. Kuich // Proc. BETEC 86. Computational Mechanics Publications. – 1986. – P. 488-519.
10. Cescotto, S. Large Strain Dynamic Analysis Using Solid and Contact Finite Elements Based on a Mixed Formulation - Application to Metalforming [Text] / S. Cescotto, Y. Y. Zhu // Journal of Metals Processing Technology. – 1994. – Vol. 45. – P. 657-663.
11. Wriggers, H. Finite Element Formulation of Large Deformation Impact-Contact Problems with Friction [Text] / H. Wriggers, Van Vu, J. Stein // Computers and Structures. – 1990. – Vol. 37. – P. 319-331.