УДК 514.74:531.3

СОСТАВЛЕНИЕ ГРУПП МОНОМИАЛЬНЫХ (1,0,-1) — МАТРИЦ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В.В. Кравец
Доктор технических наук, профессор
Кафедра специализированных компьютерных систем
Украинский государственный химико-технологический университет
пр. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, Украина, 49005
Контактный тел.: 8 (067) 726-07-72; 8 (056) 748-07-06

Т.В. Кравец
Ассистент
Кафедра «Теоретическая механика»*
Контактный тел.: 8 (067) 921-10-67; 8 (056) 713-58-03

А.В. Харченко
Аспірант
Кафедра «Прикладная математика»*
Контактный тел.: 8 (050) 321-14-60
E-mail: caxon@mail.ru
*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта
ул Лазаряна, 2, г. Днепропетровск, Украина, 49010

Розглядається множина прямих і протилежних елементів, які співставляються чотиривимірному ортонормованому базису. На цій кінцевій множині формується сукупність парних підстановок четвертого ступеня у вигляді добутку двох транспозицій. Кінцева множина підстановок представляється мономіальними (1,0,-1)-матрицями четвертого порядку. Встановлюється ізоморфність групи кватерніонів і двох некомутативних підгруп 8-го порядку

Ключові слова: мономіальні (1,0,-1)-матриці, група кватерніонів, таблиці Келі

Рассматривается множество прямых и противоположных элементов, сопоставляемых четырехмерному ортонормированному базису. На этом конечном множестве формируется совокупность четных подстановок 4-й степени в виде произведения двух транспозиций. Конечное множество подстановок представляется мономиальными (1, 0, -1) – матрицами четвертого порядка. Устанавливается изоморфность группы кватернионов и двух некоммутативных подгрупп 8-го порядка

Ключевые слова: мономиальные (1, 0, -1) – матрицы, группа кватернионов, таблицы Кэли

A set of direct and inverse elements are examined and compared with four–dimensional orthonormal basis. The aggregate of even substitutions of fourth power are formed on this set, which is shown as a product of two transpositions. Finite set of substitutions submitted by monomial (1, 0, -1) – matrices of fourth-order. An isomorphism of quaternion group and two noncommutative subgroups of eighth order was determined

Key words: monomial (1, 0, -1) – matrices, quaternion group, tables of Cayley

Введение

При построении математических моделей динамики управляемых технических объектов [8, 16] используется традиционный математический аппарат векторной алгебры [39], алгебры кватернионов [9], матричного [2, 25], винтового [7], тензорного [11] исчислений. Для описания вращательного движения в качестве переменных применяются параметры Родрига-Гамильтона, Кейли-Клейна, кватернионы, гиперкомплексные числа Люша (квадриплексные числа) [23], параметры Эйлера, компоненты вектора конечного поворота, вектор Гиббса, направляющие косинусы, углы Эйлера, Эйлера-Крылова и др. В аналитической механике твердого тела наибольшее распространение получила векторная форма представления алгоритмов решения поставленных задач, которые позволяет «экономить не только бумагу, но и время» [11]. В вычислительном эксперименте [1, 20] к форме представления алгоритмов предъявляются специфические требования, удовлетворить которые оказывается возможным применением матричного исчисления, удачным выбором переменных, новой организацией вычислительных процессов, обусловленной спецификой этих переменных. Поэтому значительное внимание уделяется разработке исчисления кватернионных матриц [13, 23, 24] и эта актуальная задача еще не получила исчерпывающее решение. Данная статья имеет цель изучение свойств кватернионных матриц. Элементы исчисления кватернионных матриц получили признание и применение не только в аналитической механике при построении математических моделей, по существу заменяя векторное исчисление, но и оказались хорошо адаптированными к современной технологии проведения вычислительного эксперимента по исследованию нелинейной динамики сложных механических систем в пространственном движении. При этом математические модели и соответствующие им алгоритмы обретают симметрию, компактность, универсальность, что ускоряет программирование, отладку вычислительного процесса, обеспечивают удобства в работе, т.е. повышает производительность интеллектуального труда [3, 5, 14, 21].

Постановка задачи

Построить группу мономиальных (1, 0, -1) – матриц [26] четвертого порядка, представляющих тождественные и четные подстановки четвертой степени на множестве элементов четырехмерного ортонормированного базиса и противоположных элементов. Определить подгруппы построенного множества мономиальных (1, 0, -1) – матриц. Среди полученных подгрупп найти изоморфные группе кватернионов.

Решение задачи

Вводится система четырех нормированных и взаимно ортогональных векторов:

$$\|1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\|, \ \|0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\|, \ \|0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\|, \ \|0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\|,$$

которым сопоставляются элементы конечного множества $e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4$ (или 1, 2, 3, 4) и противоположные элементы $e_1^* \quad e_2^* \quad e_3^* \quad e_4^*$ (или 1*, 2*, 3*, 4*). Противоположным элементам множества соответствуют противоположные векторы ортонормированного четырехмерного базиса:

$$\|-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\|, \ \|0 \quad -1 \quad 0 \quad 0\|, \ \|0 \quad 0 \quad -1 \quad 0\|, \ \|0 \quad 0 \quad 0 \quad -1\|.$$

Отметим, что четырехмерным пространством оперирует специальная теория относительности [11], теория конечного поворота [18], проективная геометрия [22]. Например, рассматривая совокупность пяти точек O_0, O_1, O_2, O_3, E, из которых никакие четыре не принадлежат одной плоскости, получим образованный точками O_0, O_1, O_2, O_3, тетраэдр, принимаемый в качестве базисного.

Тогда эти точки являются фундаментальными проективной системы координат, а точка E – единичной [22]. Эти точки имеют следующие проективные координаты:

$$O_0(1,0,0,0),\ O_1(0,1,0,0),\ O_2(0,0,1,0),\ O_3(0,0,0,1),\ E(1,1,1,1)$$

С помощью введенного множества элементов формируется совокупность четных подстановок четвертой степени, представленных в виде произведения двух транспозиций и тождественных подстановок [6]. Искомые подстановки в развернутой записи приводятся в таблице 1.

Каждая из полученных подстановок представляется квадратной (1, 0, -1) – матрицей путем расстановки единиц в строках и столбцах таблицы размера 4×4, соответственно определяемых по верхнему и нижнему числу, указанному в подстановке, или минус единицы, если нижние числа подстановки отмечены.

На остальных местах таблицы проставляются нули, т.е. (1, 0, -1) – матрицы содержат в каждой строке и столбце в точности одну единицу или минус единицу.

Полученное таким образом множество мономиальных (1, 0, -1) – матриц в развернутой записи приводится в таблице 2.

Тождественные и четные подстановки четвертой степени и соответствующие им (1, 0, -1) – мономиальные матрицы образуют мультипликативную группу 64-го порядка и подгруппы 32-го, 16-го, 8-го, 4-го и 2-го порядков.

В этом нетрудно убедиться, производя всевозможные композиции элементов данного множества. Например, композиция подстановок A_1 и B_2

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2^* & 1\end{pmatrix},$$

приводит к элементу данной совокупности C_3 и т.д. для композиции любых двух подстановок. Очевидно, что с помощью матричного представления устанавливается эквивалентный результат:

$$\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

Полученные результаты сводятся в таблицы Кэли (таблица 3) [10].

Из рассмотрения таблицы 3 обнаруживаются известные пять свойств, присущих таблице умножения группы [19].

Выделяются две подгруппы четвертого порядка, семь подгрупп восьмого порядка, двадцать четыре подгруппы шестнадцатого порядка и одна подгруппа тридцать второго порядка (табл.4) [15].

Подгруппы второго порядка в силу их тривиальности не рассматриваются. Порядок исходной группы кратен порядку любой из составленных подгрупп, что соответствует теореме Лагранжа [10].

Набор элементов A_0, A_1, A_2, A_3 составляет подгруппу 4-го порядка, таблица умножения которой приведена в табл.5. Из таблицы 4 непосредственно следует, что данная подгруппа является абелевой [10]. Вторую абелеву подгруппу четвертого порядка составляет набор элементов A_0, R_1, S_2, T_3, для которой таблица умножения дана в табл.5.

Подгруппы восьмого порядка составляют наборы элементов, приведенные в табл.4. Таблицы умножения, соответствующие этим подгруппам, приводятся в таблице 6 и таблице 7. Подгруппы восьмого порядка, имеющие номера по порядку №2 и №3 в табл.4, являются некоммутативными (табл.6), а остальные – абелевыми (табл.7).

Таблица 1

Тождественные и четные подстановки четвертой степени элементов множества четырехмерного ортонормированного базиса и противоположных элементов

$$A_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix};$$

$$B_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4^{*}\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3^{*}\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2^{*}\end{pmatrix},\quad B_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1^{*}\end{pmatrix};$$

$$C_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3^{*}&4\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4^{*}&3\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1^{*}&2\end{pmatrix},\quad C_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2^{*}&1\end{pmatrix};$$

$$D_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2^{*}&3&4\end{pmatrix},\quad D_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1^{*}&4&3\end{pmatrix},\quad D_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4^{*}&1&2\end{pmatrix},\quad D_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3^{*}&2&1\end{pmatrix};$$

$$F_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1^{*}&2&3&4\end{pmatrix},\quad F_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2^{*}&1&4&3\end{pmatrix},\quad F_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3^{*}&4&1&2\end{pmatrix},\quad F_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4^{*}&3&2&1\end{pmatrix};$$

$$R_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3^{*}&4^{*}\end{pmatrix},\quad R_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4^{*}&3^{*}\end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1^{*}&2^{*}\end{pmatrix},\quad R_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2^{*}&1^{*}\end{pmatrix};$$

$$S_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2^{*}&3&4^{*}\end{pmatrix},\quad S_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1^{*}&4&3^{*}\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4^{*}&1&2^{*}\end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3^{*}&2&1^{*}\end{pmatrix};$$

$$T_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1^{*}&2&3&4^{*}\end{pmatrix},\quad T_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2^{*}&1&4&3^{*}\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3^{*}&4&1&2^{*}\end{pmatrix},\quad T_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4^{*}&3&2&1^{*}\end{pmatrix};$$

$$\bar{A}_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1^{*}&2^{*}&3^{*}&4^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{A}_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2^{*}&1^{*}&4^{*}&3^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{A}_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3^{*}&4^{*}&1^{*}&2^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{A}_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4^{*}&3^{*}&2^{*}&1^{*}\end{pmatrix};$$

$$\bar{B}_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1^{*}&2^{*}&3^{*}&4\end{pmatrix},\quad \bar{B}_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2^{*}&1^{*}&4^{*}&3\end{pmatrix},\quad \bar{B}_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3^{*}&4^{*}&1^{*}&2\end{pmatrix},\quad \bar{B}_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4^{*}&3^{*}&2^{*}&1\end{pmatrix};$$

$$\bar{C}_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1^{*}&2^{*}&3&4^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{C}_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2^{*}&1^{*}&4&3^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{C}_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3^{*}&4^{*}&1&2^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{C}_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4^{*}&3^{*}&2&1^{*}\end{pmatrix};$$

$$\bar{D}_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1^{*}&2&3^{*}&4^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{D}_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2^{*}&1&4^{*}&3^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{D}_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3^{*}&4&1^{*}&2^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{D}_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4^{*}&3&2^{*}&1^{*}\end{pmatrix};$$

$$\bar{F}_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2^{*}&3^{*}&4^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{F}_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1^{*}&4^{*}&3^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{F}_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4^{*}&1^{*}&2^{*}\end{pmatrix},\quad \bar{F}_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3^{*}&2^{*}&1^{*}\end{pmatrix};$$

$$\bar{R}_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1^{*}&2^{*}&3&4\end{pmatrix},\quad \bar{R}_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2^{*}&1^{*}&4&3\end{pmatrix},\quad \bar{R}_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3^{*}&4^{*}&1&2\end{pmatrix},\quad \bar{R}_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4^{*}&3^{*}&2&1\end{pmatrix};$$

$$\bar{S}_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1^{*}&2&3^{*}&4\end{pmatrix},\quad \bar{S}_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2^{*}&1&4^{*}&3\end{pmatrix},\quad \bar{S}_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3^{*}&4&1^{*}&2\end{pmatrix},\quad \bar{S}_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4^{*}&3&2^{*}&1\end{pmatrix};$$

$$\bar{T}_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2^{*}&3^{*}&4\end{pmatrix},\quad \bar{T}_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1^{*}&4^{*}&3\end{pmatrix},\quad \bar{T}_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4^{*}&1^{*}&2\end{pmatrix},\quad \bar{T}_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3^{*}&2^{*}&1\end{pmatrix}.$$

Таблица 2

Множество мономиальных (1, 0, -1) — матриц

$$A_0=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{Vmatrix},\quad A_1=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{Vmatrix},\quad A_2=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{Vmatrix},\quad A_3=\begin{Vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{Vmatrix};$$

Продолжение таблицы 2

$$B_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$C_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$D_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad D_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad D_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad D_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$F_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad F_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad F_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad F_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$R_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad R_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad R_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad R_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$S_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad S_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad S_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad S_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$T_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad T_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad T_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\bar{A}_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \bar{A}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{A}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\bar{B}_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{B}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\bar{C}_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \bar{C}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{C}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{C}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

Продолжение таблицы 2

$$\bar{D}_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \bar{D}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{D}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{D}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\bar{F}_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \bar{F}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{F}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{F}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\bar{R}_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \bar{R}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{R}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{R}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\bar{S}_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \bar{S}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{S}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{S}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$\bar{T}_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \bar{T}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{T}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{T}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Таблица 3

Таблица умножения множества мономиальных (1, 0, -1) — матриц четвертого порядка, составляющих мультипликативную группу шестьдесят четвертого порядка

	*	A_0	A_1	A_2	A_3	B_0	B_1	B_2	B_3	C_0	C_1	C_2	C_3	D_0	D_1	D_2	D_3
*		$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$
A_0	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$
A_1	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$
A_2	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$
A_3	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$
B_0	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$
B_1	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$
B_2	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$
B_3	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$
C_0	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	T_0	T_1	T_2	T_3
C_1	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	S_1	S_0	S_3	S_2
C_2	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	T_2	T_3	T_0	T_1	S_2	S_3	S_0	S_1	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$
C_3	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	S_3	S_2	S_1	S_0	T_3	T_2	T_1	T_0	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$
D_0	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	T_0	T_1	T_2	T_3	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$
D_1	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	T_1	T_0	T_3	T_2	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	R_1	R_0	R_3	R_2
D_2	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	R_2	R_3	R_0	R_1	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$
D_3	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$	R_3	R_2	R_1	R_0	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	T_3	T_2	T_1	T_0

Продолжение таблицы 3

F_0	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	S_0	S_1	S_2	S_3	R_0	R_1	R_2	R_3
F_1	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	S_1	S_0	S_3	S_2	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$
F_2	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	R_2	R_3	R_0	R_1	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$
F_3	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	R_3	R_2	R_1	R_0	S_3	S_2	S_1	S_0
R_0	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	F_0	F_1	F_2	F_3
R_1	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	D_1	D_0	D_3	D_2
R_2	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	F_2	F_3	F_0	F_1	D_2	D_3	D_0	D_1	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$
R_3	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$	D_3	D_2	D_1	D_0	F_3	F_2	F_1	F_0	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$
S_0	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	F_0	F_1	F_2	F_3	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$
S_1	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	F_1	F_0	F_3	F_2	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	C_1	C_0	C_3	C_2
S_2	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	C_2	C_3	C_0	C_1	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$
S_3	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	C_3	C_2	C_1	C_0	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	F_3	F_2	F_1	F_0
T_0	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	D_0	D_1	D_2	D_3	C_0	C_1	C_2	C_3
T_1	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	D_1	D_0	D_3	D_2	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$
T_2	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	C_2	C_3	C_0	C_1	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$
T_3	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	C_3	C_2	C_1	C_0	D_3	D_2	D_1	D_0
	*	F_0	F_1	F_2	F_3	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3	T_0	T_1	T_2	T_3
*		$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$
A_0	$\bar{A}_0$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$
A_1	$\bar{A}_1$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	S_1	S_0	S_3	S_2	T_1	T_0	T_3	T_2
A_2	$\bar{A}_2$	C_2	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	R_2	R_3	R_0	R_1	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	T_2	T_3	T_0	T_1
A_3	$\bar{A}_3$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	R_3	R_2	R_1	R_0	S_3	S_2	S_1	S_0	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$
B_0	$\bar{B}_0$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$
B_1	$\bar{B}_1$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	D_1	D_0	D_3	D_2	F_1	F_0	F_3	F_2
B_2	$\bar{B}_2$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	C_2	C_3	C_0	C_1	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	F_2	F_3	F_0	F_1
B_3	$\bar{B}_3$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	C_3	C_2	C_1	C_0	D_3	D_2	D_1	D_0	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$
C_0	$\bar{C}_0$	S_0	S_1	S_2	S_3	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	F_0	F_1	F_2	F_3	D_0	D_1	D_2	D_3
C_1	$\bar{C}_1$	T_1	T_0	T_3	T_2	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$
C_2	$\bar{C}_2$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	B_2	B_3	B_0	B_1	F_2	F_3	F_0	F_1	D_2	D_3	D_0	D_1
C_3	$\bar{C}_3$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$	B_3	B_2	B_1	B_0	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	D_3	D_2	D_1	D_0
D_0	$\bar{D}_0$	R_0	R_1	R_2	R_3	F_0	F_1	F_2	F_3	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	C_0	C_1	C_2	C_3
D_1	$\bar{D}_1$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	F_1	F_0	F_3	F_2	B_1	B_0	B_3	B_2	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$
D_2	$\bar{D}_2$	T_2	T_3	T_0	T_1	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$
D_3	$\bar{D}_3$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	B_3	B_2	B_1	B_0	C_3	C_2	C_1	C_0
F_0	$\bar{F}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	D_0	D_1	D_2	D_3	C_0	C_1	C_2	C_3	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$
F_1	$\bar{F}_1$	R_1	R_0	R_3	R_2	D_1	D_0	D_3	D_2	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	B_1	B_0	B_3	B_2
F_2	$\bar{F}_2$	S_2	S_3	S_0	S_1	D_2	D_3	D_0	D_1	C_2	C_3	C_0	C_1	B_2	B_3	B_0	B_1
F_3	$\bar{F}_3$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	D_3	D_2	D_1	D_0	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$
R_0	$\bar{R}_0$	D_0	D_1	D_2	D_3	A_0	A_1	A_2	A_3	T_0	T_1	T_2	T_3	S_0	S_1	S_2	S_3
R_1	$\bar{R}_1$	F_1	F_0	F_3	F_2	A_1	A_0	A_3	A_2	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$
R_2	$\bar{R}_2$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	A_2	A_3	A_0	A_1	T_2	T_3	T_0	T_1	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$
R_3	$\bar{R}_3$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	A_3	A_2	A_1	A_0	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	S_3	S_2	S_1	S_0

Продолжение таблицы 3

S_0	$\bar{S}_0$	$C_0\ C_1\ C_2\ C_3$	$T_0\ T_1\ T_2\ T_3$	$\bar{A}_0\ \bar{A}_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3$	$R_0\ R_1\ R_2\ R_3$
S_1	$\bar{S}_1$	$\bar{B}_1\ \bar{B}_0\ \bar{B}_3\ \bar{B}_2$	$T_1\ T_0\ T_3\ T_2$	$A_1\ A_0\ A_3\ A_2$	$\bar{R}_1\ \bar{R}_0\ \bar{R}_3\ \bar{R}_2$
S_2	$\bar{S}_2$	$F_2\ F_3\ F_0\ F_1$	$T_2\ T_3\ T_0\ T_1$	$\bar{A}_2\ \bar{A}_3\ \bar{A}_0\ \bar{A}_1$	$\bar{R}_2\ \bar{R}_3\ \bar{R}_0\ \bar{R}_1$
S_3	$\bar{S}_3$	$\bar{D}_3\ \bar{D}_2\ \bar{D}_1\ \bar{D}_0$	$T_3\ T_2\ T_1\ T_0$	$A_3\ A_2\ A_1\ A_0$	$R_3\ R_2\ R_1\ R_0$
T_0	$\bar{T}_0$	$\bar{B}_0\ \bar{B}_1\ \bar{B}_2\ \bar{B}_3$	$S_0\ S_1\ S_2\ S_3$	$R_0\ R_1\ R_2\ R_3$	$\bar{A}_0\ \bar{A}_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3$
T_1	$\bar{T}_1$	$C_1\ C_0\ C_3\ C_2$	$S_1\ S_0\ S_3\ S_2$	$\bar{R}_1\ \bar{R}_0\ \bar{R}_3\ \bar{R}_2$	$A_1\ A_0\ A_3\ A_2$
T_2	$\bar{T}_2$	$D_2\ D_3\ D_0\ D_1$	$S_2\ S_3\ S_0\ S_1$	$R_2\ R_3\ R_0\ R_1$	$A_2\ A_3\ A_0\ A_1$
T_3	$\bar{T}_3$	$\bar{F}_3\ \bar{F}_2\ \bar{F}_1\ \bar{F}_0$	$S_3\ S_2\ S_1\ S_0$	$\bar{R}_3\ \bar{R}_2\ \bar{R}_1\ \bar{R}_0$	$\bar{A}_3\ \bar{A}_2\ \bar{A}_1\ \bar{A}_0$
*		$A_0\ A_1\ A_2\ A_3$	$B_0\ B_1\ B_2\ B_3$	$C_0\ C_1\ C_2\ C_3$	$D_0\ D_1\ D_2\ D_3$
	*	$\bar{A}_0\ \bar{A}_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3$	$\bar{B}_0\ \bar{B}_1\ \bar{B}_2\ \bar{B}_3$	$\bar{C}_0\ \bar{C}_1\ \bar{C}_2\ \bar{C}_3$	$\bar{D}_0\ \bar{D}_1\ \bar{D}_2\ \bar{D}_3$
A_0	$\bar{A}_0$	$A_0\ A_1\ A_2\ A_3$	$B_0\ B_1\ B_2\ B_3$	$C_0\ C_1\ C_2\ C_3$	$D_0\ D_1\ D_2\ D_3$
A_1	$\bar{A}_1$	$A_1\ A_0\ A_3\ A_2$	$C_1\ C_0\ C_3\ C_2$	$B_1\ B_0\ B_3\ B_2$	$F_1\ F_0\ F_3\ F_2$
A_2	$\bar{A}_2$	$A_2\ A_3\ A_0\ A_1$	$D_2\ D_3\ D_0\ D_1$	$F_2\ F_3\ F_0\ F_1$	$B_2\ B_3\ B_0\ B_1$
A_3	$\bar{A}_3$	$A_3\ A_2\ A_1\ A_0$	$F_3\ F_2\ F_1\ F_0$	$D_3\ D_2\ D_1\ D_0$	$C_3\ C_2\ C_1\ C_0$
B_0	$\bar{B}_0$	$B_0\ B_1\ B_2\ B_3$	$A_0\ A_1\ A_2\ A_3$	$R_0\ R_1\ R_2\ R_3$	$S_0\ S_1\ S_2\ S_3$
B_1	$\bar{B}_1$	$B_1\ B_0\ B_3\ B_2$	$R_1\ R_0\ R_3\ R_2$	$A_1\ A_0\ A_3\ A_2$	$T_1\ T_0\ T_3\ T_2$
B_2	$\bar{B}_2$	$B_2\ B_3\ B_0\ B_1$	$S_2\ S_3\ S_0\ S_1$	$T_2\ T_3\ T_0\ T_1$	$A_2\ A_3\ A_0\ A_1$
B_3	$\bar{B}_3$	$B_3\ B_2\ B_1\ B_0$	$T_3\ T_2\ T_1\ T_0$	$S_3\ S_2\ S_1\ S_0$	$R_3\ R_2\ R_1\ R_0$
C_0	$\bar{C}_0$	$C_0\ C_1\ C_2\ C_3$	$R_0\ R_1\ R_2\ R_3$	$A_0\ A_1\ A_2\ A_3$	$\bar{T}_0\ \bar{T}_1\ \bar{T}_2\ \bar{T}_3$
C_1	$\bar{C}_1$	$C_1\ C_0\ C_3\ C_2$	$A_1\ A_0\ A_3\ A_2$	$R_1\ R_0\ R_3\ R_2$	$\bar{S}_1\ \bar{S}_0\ \bar{S}_3\ \bar{S}_2$
C_2	$\bar{C}_2$	$C_2\ C_3\ C_0\ C_1$	$\bar{T}_2\ \bar{T}_3\ \bar{T}_0\ \bar{T}_1$	$\bar{S}_2\ \bar{S}_3\ \bar{S}_0\ \bar{S}_1$	$R_2\ R_3\ R_0\ R_1$
C_3	$\bar{C}_3$	$C_3\ C_2\ C_1\ C_0$	$\bar{S}_3\ \bar{S}_2\ \bar{S}_1\ \bar{S}_0$	$\bar{T}_3\ \bar{T}_2\ \bar{T}_1\ \bar{T}_0$	$A_3\ A_2\ A_1\ A_0$
D_0	$\bar{D}_0$	$D_0\ D_1\ D_2\ D_3$	$S_0\ S_1\ S_2\ S_3$	$\bar{T}_0\ \bar{T}_1\ \bar{T}_2\ \bar{T}_3$	$A_0\ A_1\ A_2\ A_3$
D_1	$\bar{D}_1$	$D_1\ D_0\ D_3\ D_2$	$\bar{T}_1\ \bar{T}_0\ \bar{T}_3\ \bar{T}_2$	$S_1\ S_0\ S_3\ S_2$	$\bar{R}_1\ \bar{R}_0\ \bar{R}_3\ \bar{R}_2$
D_2	$\bar{D}_2$	$D_2\ D_3\ D_0\ D_1$	$A_2\ A_3\ A_0\ A_1$	$\bar{R}_2\ \bar{R}_3\ \bar{R}_0\ \bar{R}_1$	$S_2\ S_3\ S_0\ S_1$
D_3	$\bar{D}_3$	$D_3\ D_2\ D_1\ D_0$	$\bar{R}_3\ \bar{R}_2\ \bar{R}_1\ \bar{R}_0$	$A_3\ A_2\ A_1\ A_0$	$\bar{T}_3\ \bar{T}_2\ \bar{T}_1\ \bar{T}_0$
F_0	$\bar{F}_0$	$F_0\ F_1\ F_2\ F_3$	$T_0\ T_1\ T_2\ T_3$	$\bar{S}_0\ \bar{S}_1\ \bar{S}_2\ \bar{S}_3$	$\bar{R}_0\ \bar{R}_1\ \bar{R}_2\ \bar{R}_3$
F_1	$\bar{F}_1$	$F_1\ F_0\ F_3\ F_2$	$\bar{S}_1\ \bar{S}_0\ \bar{S}_3\ \bar{S}_2$	$T_1\ T_0\ T_3\ T_2$	$A_1\ A_0\ A_3\ A_2$
F_2	$\bar{F}_2$	$F_2\ F_3\ F_0\ F_1$	$\bar{R}_2\ \bar{R}_3\ \bar{R}_0\ \bar{R}_1$	$A_2\ A_3\ A_0\ A_1$	$T_2\ T_3\ T_0\ T_1$
F_3	$\bar{F}_3$	$F_3\ F_2\ F_1\ F_0$	$A_3\ A_2\ A_1\ A_0$	$\bar{R}_3\ \bar{R}_2\ \bar{R}_1\ \bar{R}_0$	$\bar{S}_3\ \bar{S}_2\ \bar{S}_1\ \bar{S}_0$
R_0	$\bar{R}_0$	$R_0\ R_1\ R_2\ R_3$	$C_0\ C_1\ C_2\ C_3$	$B_0\ B_1\ B_2\ B_3$	$\bar{F}_0\ \bar{F}_1\ \bar{F}_2\ \bar{F}_3$
R_1	$\bar{R}_1$	$R_1\ R_0\ R_3\ R_2$	$B_1\ B_0\ B_3\ B_2$	$C_1\ C_0\ C_3\ C_2$	$\bar{D}_1\ \bar{D}_0\ \bar{D}_3\ \bar{D}_2$
R_2	$\bar{R}_2$	$R_2\ R_3\ R_0\ R_1$	$\bar{F}_2\ \bar{F}_3\ \bar{F}_0\ \bar{F}_1$	$\bar{D}_2\ \bar{D}_3\ \bar{D}_0\ \bar{D}_1$	$C_2\ C_3\ C_0\ C_1$
R_3	$\bar{R}_3$	$R_3\ R_2\ R_1\ R_0$	$\bar{D}_3\ \bar{D}_2\ \bar{D}_1\ \bar{D}_0$	$\bar{F}_3\ \bar{F}_2\ \bar{F}_1\ \bar{F}_0$	$B_3\ B_2\ B_1\ B_0$
S_0	$\bar{S}_0$	$S_0\ S_1\ S_2\ S_3$	$D_0\ D_1\ D_2\ D_3$	$\bar{F}_0\ \bar{F}_1\ \bar{F}_2\ \bar{F}_3$	$B_0\ B_1\ B_2\ B_3$
S_1	$\bar{S}_1$	$S_1\ S_0\ S_3\ S_2$	$\bar{F}_1\ \bar{F}_0\ \bar{F}_3\ \bar{F}_2$	$D_1\ D_0\ D_3\ D_2$	$\bar{C}_1\ \bar{C}_0\ \bar{C}_3\ \bar{C}_2$
S_2	$\bar{S}_2$	$S_2\ S_3\ S_0\ S_1$	$B_2\ B_3\ B_0\ B_1$	$\bar{C}_2\ \bar{C}_3\ \bar{C}_0\ \bar{C}_1$	$D_2\ D_3\ D_0\ D_1$
S_3	$\bar{S}_3$	$S_3\ S_2\ S_1\ S_0$	$\bar{C}_3\ \bar{C}_2\ \bar{C}_1\ \bar{C}_0$	$B_3\ B_2\ B_1\ B_0$	$\bar{F}_3\ \bar{F}_2\ \bar{F}_1\ \bar{F}_0$
T_0	$\bar{T}_0$	$T_0\ T_1\ T_2\ T_3$	$F_0\ F_1\ F_2\ F_3$	$\bar{D}_0\ \bar{D}_1\ \bar{D}_2\ \bar{D}_3$	$\bar{C}_0\ \bar{C}_1\ \bar{C}_2\ \bar{C}_3$
T_1	$\bar{T}_1$	$T_1\ T_0\ T_3\ T_2$	$\bar{D}_1\ \bar{D}_0\ \bar{D}_3\ \bar{D}_2$	$F_1\ F_0\ F_3\ F_2$	$B_1\ B_0\ B_3\ B_2$
T_2	$\bar{T}_2$	$T_2\ T_3\ T_0\ T_1$	$\bar{C}_2\ \bar{C}_3\ \bar{C}_0\ \bar{C}_1$	$B_2\ B_3\ B_0\ B_1$	$F_2\ F_3\ F_0\ F_1$
T_3	$\bar{T}_3$	$T_3\ T_2\ T_1\ T_0$	$B_3\ B_2\ B_1\ B_0$	$\bar{C}_3\ \bar{C}_2\ \bar{C}_1\ \bar{C}_0$	$\bar{D}_3\ \bar{D}_2\ \bar{D}_1\ \bar{D}_0$

Продолжение таблицы 3

*		F_0	F_1	F_2	F_3	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3	T_0	T_1	T_2	T_3
	*	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$
A_0	$\bar{A}_0$	F_0	F_1	F_2	F_3	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3	T_0	T_1	T_2	T_3
A_1	$\bar{A}_1$	D_1	D_0	D_3	D_2	R_1	R_0	R_3	R_2	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$
A_2	$\bar{A}_2$	C_2	C_3	C_0	C_1	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	S_2	S_3	S_0	S_1	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$
A_3	$\bar{A}_3$	B_3	B_2	B_1	B_0	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	T_3	T_2	T_1	T_0
B_0	$\bar{B}_0$	T_0	T_1	T_2	T_3	C_0	C_1	C_2	C_3	D_0	D_1	D_2	D_3	F_0	F_1	F_2	F_3
B_1	$\bar{B}_1$	S_1	S_0	S_3	S_2	C_1	C_0	C_3	C_2	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$
B_2	$\bar{B}_2$	R_2	R_3	R_0	R_1	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	D_2	D_3	D_0	D_1	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$
B_3	$\bar{B}_3$	A_3	A_2	A_1	A_0	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$	F_3	F_2	F_1	F_0
C_0	$\bar{C}_0$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	B_0	B_1	B_2	B_3	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$
C_1	$\bar{C}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	B_1	B_0	B_3	B_2	F_1	F_0	F_3	F_2	D_1	D_0	D_3	D_2
C_2	$\bar{C}_2$	A_2	A_3	A_0	A_1	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	D_2	D_3	D_0	D_1
C_3	$\bar{C}_3$	R_3	R_2	R_1	R_0	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_1$	$\tilde{B}_0$	F_3	F_2	F_1	F_0	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$
D_0	$\bar{D}_0$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	B_0	B_1	B_2	B_3	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$
D_1	$\bar{D}_1$	A_1	A_0	A_3	A_2	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	C_1	C_0	C_3	C_2
D_2	$\bar{D}_2$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	F_2	F_3	F_0	F_1	B_2	B_3	B_0	B_1	C_2	C_3	C_0	C_1
D_3	$\bar{D}_3$	S_3	S_2	S_1	S_0	F_3	F_2	F_1	F_0	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$
F_0	$\bar{F}_0$	A_0	A_1	A_2	A_3	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	B_0	B_1	B_2	B_3
F_1	$\bar{F}_1$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_2$	C_1	C_0	C_3	C_2	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_2$
F_2	$\bar{F}_2$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	D_2	D_3	D_0	D_1	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$
F_3	$\bar{F}_3$	T_3	T_2	T_1	T_0	D_3	D_2	D_1	D_0	C_3	C_2	C_1	C_0	B_3	B_2	B_1	B_0
R_0	$\bar{R}_0$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	A_0	A_1	A_2	A_3	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$
R_1	$\bar{R}_1$	$\bar{F}_1$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_2$	A_1	A_0	A_3	A_2	T_1	T_0	T_3	T_2	S_1	S_0	S_3	S_2
R_2	$\bar{R}_2$	B_2	B_3	B_0	B_1	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	S_2	S_3	S_0	S_1
R_3	$\bar{R}_3$	C_3	C_2	C_1	C_0	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	T_3	T_2	T_1	T_0	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$
S_0	$\bar{S}_0$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	A_0	A_1	A_2	A_3	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$
S_1	$\bar{S}_1$	B_1	B_0	B_3	B_2	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	R_1	R_0	R_3	R_2
S_2	$\bar{S}_2$	$\bar{F}_2$	$\bar{F}_3$	$\bar{F}_0$	$\bar{F}_1$	T_2	T_3	T_0	T_1	A_2	A_3	A_0	A_1	R_2	R_3	R_0	R_1
S_3	$\bar{S}_3$	D_3	D_2	D_1	D_0	T_3	T_2	T_1	T_0	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$
T_0	$\bar{T}_0$	B_0	B_1	B_2	B_3	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	A_0	A_1	A_2	A_3
T_1	$\bar{T}_1$	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_0$	$\bar{C}_3$	$\bar{C}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	R_1	R_0	R_3	R_2	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$
T_2	$\bar{T}_2$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	$\bar{D}_0$	$\bar{D}_1$	S_2	S_3	S_0	S_1	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$
T_3	$\bar{T}_3$	F_3	F_2	F_1	F_0	S_3	S_2	S_1	S_0	R_3	R_2	R_1	R_0	A_3	A_2	A_1	A_0

Таблица 4

Подгруппы множества мономиальных (1, 0, -1) — матриц

Порядок подгруппы	№ п/п	Элементы подгруппы
4	1	A_0 A_1 A_2 A_3
	2	A_0 R_1 S_2 T_3
8	1	A_0 A_1 A_2 A_3 $\bar{A}_0$ $\bar{A}_1$ $\bar{A}_2$ $\bar{A}_3$
	2*	A_0 R_2 S_3 T_1 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_2$ $\bar{S}_3$ $\bar{T}_1$
	3*	A_0 S_1 T_2 R_3 $\bar{A}_0$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_2$ $\bar{R}_3$
	4	A_0 T_1 S_2 R_3 $\bar{A}_0$ $\bar{T}_1$ $\bar{S}_2$ $\bar{R}_3$
	5	A_0 S_1 R_2 T_3 $\bar{A}_0$ $\bar{S}_1$ $\bar{R}_2$ $\bar{T}_3$
	6	A_0 R_1 T_2 S_3 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{T}_2$ $\bar{S}_3$
	7	A_0 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
16	1	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	2	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	3	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	4	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	5	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	6	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	7	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	8	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	9	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	10	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	11	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	12	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	13	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	14	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	15	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	16	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	17	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	18	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	19	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	20	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	21	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	22	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	23	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
	24	A_0 R_1 S_1 T_1 A_1 R_0 S_0 T_0 $\bar{A}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{S}_1$ $\bar{T}_1$ $\bar{A}_1$ $\bar{R}_0$ $\bar{S}_0$ $\bar{T}_0$
32	1	A_0 A_1 A_2 A_3 R_0 R_1 R_2 R_3 S_0 S_1 S_2 S_3 T_0 T_1 T_2 T_3 $\bar{A}_0$ $\bar{A}_1$ $\bar{A}_2$ $\bar{A}_3$ $\bar{R}_0$ $\bar{R}_1$ $\bar{R}_2$ $\bar{R}_3$ $\bar{S}_0$ $\bar{S}_1$ $\bar{S}_2$ $\bar{S}_3$ $\bar{T}_0$ $\bar{T}_1$ $\bar{T}_2$ $\bar{T}_3$

Таблица 5

Таблицы умножения абелевых подгрупп порядка 4

*	A_0	A_1	A_2	A_3
A_0	A_0	A_1	A_2	A_3
A_1	A_1	A_0	A_3	A_2
A_2	A_2	A_3	A_0	A_1
A_3	A_3	A_2	A_1	A_0

*	A_0	R_1	S_2	T_3
A_0	A_0	R_1	S_2	T_3
R_1	R_1	A_0	T_3	S_2
S_2	S_2	T_3	A_0	R_1
T_3	T_3	S_2	R_1	A_0

Таблица 6

Таблицы умножения некоммутативных подгрупп порядка 8

*	A_0	T_1	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$
A_0	A_0	T_1	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$
T_1	T_1	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	A_0	S_3	$\bar{R}_2$
R_2	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	T_1
S_3	S_3	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	A_0
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	T_1	R_2	S_3
$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	A_0	S_3	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	R_2
$\bar{R}_2$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	T_1	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$
$\bar{S}_3$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	A_0	S_3	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{A}_0$

	A_0	S_1	T_2	R_3	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
A_0	A_0	S_1	T_2	R_3	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
S_1	S_1	$\bar{A}_0$	R_3	$\bar{T}_2$	$\bar{S}_1$	A_0	$\bar{R}_3$	T_2
T_2	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{A}_0$	S_1	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{A}_0$	S_1
R_3	R_3	T_2	$\bar{S}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{T}_2$	S_1	A_0
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	A_0	S_1	T_2	R_3
$\bar{S}_1$	$\bar{S}_1$	A_0	$\bar{R}_3$	T_2	S_1	$\bar{A}_0$	R_3	$\bar{T}_2$
$\bar{T}_2$	$\bar{T}_2$	R_3	A_0	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	R_3	A_0	$\bar{S}_1$
$\bar{R}_3$	$\bar{R}_3$	$\bar{T}_2$	S_1	A_0	R_3	T_2	$\bar{S}_1$	$\bar{A}_0$

*	A_0	S_1	R_2	T_3	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_3$
A_0	A_0	S_1	R_2	T_3	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_3$
S_1	S_1	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_3$	R_2	$\bar{S}_1$	A_0	T_3	$\bar{R}_2$
R_2	R_2	$\bar{T}_3$	$\bar{A}_0$	S_1	$\bar{R}_2$	T_3	A_0	$\bar{S}_1$
T_3	T_3	R_2	S_1	A_0	$\bar{T}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{A}_0$
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_3$	A_0	S_1	R_2	T_3
$\bar{S}_1$	$\bar{S}_1$	A_0	T_3	$\bar{R}_2$	S_1	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_3$	R_2
$\bar{R}_2$	$\bar{R}_2$	T_3	A_0	$\bar{S}_1$	R_2	$\bar{T}_3$	$\bar{A}_0$	S_1
$\bar{T}_3$	$\bar{T}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{A}_0$	T_3	R_2	S_1	$\bar{A}_0$

*	A_0	R_1	T_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{S}_3$
A_0	A_0	R_1	T_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{S}_3$
R_1	R_1	A_0	S_3	T_2	$\bar{R}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_2$
T_2	T_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	R_1
S_3	S_3	T_2	$\bar{R}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_2$	R_1	A_0
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	R_1	T_2	S_3
$\bar{R}_1$	$\bar{R}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_2$	R_1	A_0	S_3	T_2
$\bar{T}_2$	$\bar{T}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	R_1	T_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_1$
$\bar{S}_3$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_2$	R_1	A_0	S_3	T_2	$\bar{R}_1$	$\bar{A}_0$

Таблица 7

Таблицы умножения Абелевых подгрупп порядка 8

*	A_0	A_1	A_2	A_3	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$
A_0	A_0	A_1	A_2	A_3	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$
A_1	A_1	A_0	A_3	A_2	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$
A_2	A_2	A_3	A_0	A_1	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$
A_3	A_3	A_2	A_1	A_0	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	A_0	A_1	A_2	A_3
$\bar{A}_1$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	A_1	A_0	A_3	A_2
$\bar{A}_2$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	A_2	A_3	A_0	A_1
$\bar{A}_3$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	A_3	A_2	A_1	A_0

*	A_0	T_1	S_2	R_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{R}_3$
A_0	A_0	T_1	S_2	R_3	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
T_1	T_1	A_0	R_3	S_2	$\bar{T}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_2$
S_2	S_2	R_3	A_0	T_1	$\bar{S}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$
R_3	R_3	S_2	T_1	A_0	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{A}_0$
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{R}_3$	A_0	T_1	S_2	R_3
$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	A_0	$\bar{R}_3$	S_2	T_1	$\bar{A}_0$	R_3	$\bar{S}_2$
$\bar{S}_2$	$\bar{S}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	S_2	R_3	A_0	T_1
$\bar{R}_3$	$\bar{R}_3$	S_2	$\bar{T}_1$	A_0	R_3	$\bar{S}_2$	T_1	$\bar{A}_0$

Аналогично проводится рассмотрение двадцати четырех таблиц умножения подгрупп 16-го порядка и подгруппы 32-го порядка.

Известно, что кватернион определяется как гиперкомплексное число:

$$e_0a_0 + e_1a_1 + e_2a_2 + e_3a_3$$

(используется также запись: $1a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3$)

где e_0a_0 ($1a_0$) – скалярная,

$e_1a_1 + e_2a_2 + e_3a_3$ ($ia_1 + ja_2 + ka_3$) – векторная часть кватерниона,

a_0, a_1, a_2, a_3 - действительные числа,

e_0, e_1, e_2, e_3 $(1, i, j, k)$ - элементы базиса.

Здесь e_0 (1) – вещественная единица, e_1, e_2, e_3 (i, j, k) могут трактоваться как специальные кватернионы (гиперкомплексные единицы), либо как базисные векторы трехмерного пространства [9, 23]. Для элементов базиса пространства кватернионов приняты специальные правила умножения [12]:

$$\begin{array}{ll} e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -e_0; & \left(\begin{array}{l} i^2 = l^2 = k^2 = -1; \\ ij = -ij = k; \\ jk = -kj = i; \\ ki = -ik = j. \end{array} \right) \\ e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3; & \\ e_2e_3 = -e_3e_2 = e_1; & \\ e_3e_1 = -e_1e_3 = e_2; & \end{array}$$

Множество, состоящее из восьми элементов e_0, e_1, e_2, e_3, $-e_0, -e_1, -e_2, -e_3$, $(1, i, j, k)$, $(-1, -i, -j, -k)$ (здесь знак минус служит различительным значком), составляет группу кватернионов с известной таблицей умножения [6]. Из сравнения группы кватернионов и найденных некоммутативных подгрупп восьмого порядка, устанавливаем их изоморфность [10]. При этом возможен различный порядок сопоставления элементов базиса пространства кватернионов элементам рассматриваемых некоммутативных подгрупп. Перечень конкретных вариантов сопоставления для этих подгрупп приводится в табл.8.

Таблица 8

Варианты сопоставления элементов базиса пространства кватернионов элементами некоммуттивных подгрупп порядка 8

Элементы Базиса	Элементы подгрупп																							
1	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
i	S_1	T_2	R_3	S_1	T_2	$\bar{R}_3$	S_1	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	T_2	R_3	S_1	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
j	T_2	R_3	S_1	$\bar{R}_3$	S_1	T_2	R_3	S_1	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	T_2	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	S_1	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$
k	R_3	S_1	T_2	T_2	$\bar{R}_3$	S_1	$\bar{T}_2$	R_3	S_1	T_2	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{R}_3$	S_1	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	T_2	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16*	17	18	19	20	21	22	23	24
1	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
i	T_1	S_3	R_2	T_1	R_2	$\bar{S}_3$	T_1	$\bar{R}_2$	S_3	$\bar{T}_1$	R_2	S_3	T_1	$\bar{S}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$
j	S_2	R_3	T_1	R_2	$\bar{S}_3$	T_1	$\bar{R}_2$	S_3	T_1	R_2	S_3	$\bar{T}_1$	$\bar{S}_3$	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_1$
k	R_2	T_1	S_3	$\bar{S}_3$	T_1	R_2	S_3	T_1	$\bar{R}_2$	S_3	$\bar{T}_1$	R_2	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	$\bar{S}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

В частности, для номера 16 первой некоммутативной подгруппы и для номера 10 второй некоммутативной подгруппы имеем:

$$1 \sim A_0, \quad i \sim \bar{T}_1, \quad j \sim R_2, \quad k \sim S_3,$$

$$1 \sim A_0, \quad i \sim \bar{S}_1, \quad j \sim T_2, \quad k \sim \bar{R}_3.,$$

что соответствует известным обозначениям [16], приведенным в табл.9.

Таблица 9

Мономиальные матрицы, эквивалентные элементам пространства кватернионов

Элементы кватерниона	Базисные матрицы	Обозначения
1	$A_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$	$A_0 = E_0$
i	$\bar{T}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ $\bar{S}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$	$\bar{T}_1 = E_1,\ \bar{S}_1 = {}^tE_1$
j	$R_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $T_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$R_2 = E_2,\ T_2 = {}^tE_2$
k	$S_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $\bar{R}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$S_3 = E_3,\ \bar{R}_3 = {}^tE_3$
-1	$\bar{A}_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$	$\bar{A}_0 = I$
-i	$T_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$ $S_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$	$T_1 = {}^tE_1^t,\ S_1 = E_1^t$

Продолжение таблицы 9

-j	$\bar{R}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $\bar{T}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\bar{R}_2 = {}^tE_2^t,\ \bar{T}_2 = E_2^t$
-k	$\bar{S}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $R_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$	$\bar{S}_3 = {}^tE_3^t,\ R_3 = E_3^t$

Выводы

Вводится совокупность мономиальных (1, 0, -1)-матриц четвертого порядка. Составленное множество матриц образует мультипликативную группу 64-го порядка. Находятся подгруппы 4-го, 8-го, 16-го, 32-го порядков и приводятся соответствующие им таблицы Кэли. Показывается, что среди семи подгрупп 8-го порядка пять являются абелевыми, а две – некоммутативными. Устанавливается, что некоммутативные подгруппы 8-го порядка являются изоморфными группе кватернионов. Приводятся 24 варианта сопоставления элементов базиса пространства кватернионов и построенных мономиальных матриц. Из 24 вариантов сопоставления выбирается один удобный вариант, удовлетворяющий критерию симметрии для каждой из двух некоммутативных подгрупп. Вводятся целесообразные обозначения для выбранных базисных матриц.

Литература

1. Арутюнов С.К. Пакет прикладных программ МДССО // Пакеты прикладных программ. Программное обеспечение вычислительного эксперимента. / С.К.Арутюнов, Е.А. Дерюгин. – М.: Наука, 1987. – с.51-59.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
3. Блехман И.И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – М.: Наука. Главная ред физ-мат. лит., 1983. – 328с.
4. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
5. Глушков В.М. Фундаментальные исследования и технология программирования // Программирование. / В.М. Глушков. – 1980. – №2. – с.3-13.
6. Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1971 – 248с.
7. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения. / Ф.М. Диментберг. – М.: Наука, 1978. – 328 с.
8. Ракета как объект управления: Учебник / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д, Шептун.; под. общ. ред. акад. С.Н. Конюхова. – Д.: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 514с.
9. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
10. Каргополов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. / М.И. Каргополов, Ю.И. Мерзляков. – М.: Наука, 1982. – 288с.
11. Корнев Г.В. Тензорное исчисление. / Г.В. Корнев. – М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 240с.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 832с.
13. Кравець Т.В. Представлення кватерніонними матрицями послідовності скінчених поворотів твердого тіла у просторі // Автоматика-2000. Міжнародна конференція з автоматичного управління: Праці у 7-ми томах. – Т.2. – Львів: Державний НДІ Інформаційної інфраструктури, 2000. – с.140-145.
14. Кравец В.В. Об оценке центробежных, кориолисовых и гироскопических сил при скоростном движении железнодорожного экипажа / В.В. Кравец, Т.В. Кравец // Прикладная механика. – 2008. – Том 44. – №1 – с.123-132.
15. Кравец Т. В. Построение группы мономиальных матриц, изоморфных группе кватернионов. // Тезиси докладов IV Международной конференции женщин-математиков «Математика. Моделирование. Экология». – Волгоград: ВГУ, – 1996. – с.76.
16. Кузичева З.А. Векторы, алгебры, пространства. / З.А. Кузичева. – М.: Знание, сер. «Математика и кибернетика». – 1970. – с.11-64.
17. Лысенко Л.Н. Наведение и навигация баллистических ракет: Учеб. пособие. / Л.Н. Лысенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 672с.
18. Лурье А.И. Аналитическая механика. / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961.–824 с.
19. Любарский Г.Я. Теория групп и физика. / Г.Я. Любарский. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 224с.
20. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. / Н.Н. Моисеев. – М.: 1979. – 224с.
21. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения. / И.Н. Молчанов. – К.: Наукова думка, 1988. – 344с.
22. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. / П.С. Моденов. – М.: Изд. Московск. Ун-та. – 1969. – 698с.
23. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. / С.М. Онищенко. – Киев: Наук. думка, 1983. – 208 с.

24. Плотников П.К., Челноков Ю.Н. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела. – Сб. научно-методич. статей по теоретической механике, 1981, вып. 11, с. 122-129
25. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. / В.П. Сигорский. – Киев.: Техніка, 1977. – 768 с.
26. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и (0, 1) – матрицы. / В.Е. Тараканов. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1985. – 192с.

УДК 677.027

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОДОГРЕВА ШЕРСТИ В КИПАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

П.В. Потапский*

Л.Н. Михайлова*
*Подольский государственный аграрно-технический университет

Получено аналітичний вираз підігріву вовни в зимовий період електромагнітною енергією КВЧ діапазону, який дозволяє ухвалити потужність ЕПМ та час нагрівання

Ключові слова: електромагнітна енергія

Получено аналитическое выражение подогрева шерсти в зимний период электромагнитной энергией КВЧ диапазона, которое позволяет определить мощность ЭМП и время нагрева

Ключевые слова: электромагнитная энергия

Получено аналитическое выражение подогрева шерсти в зимний период электромагнитной энергией КВЧ диапазона, которое позволяет определить мощность ЭМП и время нагрева

Постановка проблемы

Одним из основных элементов процесса первичной обработки шерсти в зимний период является ее подогрев в кипах до 25°С и угнетение вредных микроорганизмов, так как в 1г шерсти содержится до 700 млн. бактерий.

Из вышесказанного следует, что подогрев шерсти в кипах желательно проводить таким способом, который минимизирует непроизводственные потери энергии, сохранить природные свойства шерсти, уничтожить вредные микроорганизмы, будет экологически безопасным с одной стороны, а с другой - позволит контролировать и регулировать ход процесса.

Всем этим требованиям отвечает электромагнитный нагрев шерсти.

При его использовании весь объем нагревается одновременно до одной и той же температуры за короткий промежуток времени.

Положительным фактором в данном случае является и то, что данная задача может быть теоретически описана и строго решена. Возможность получения аналитического выражения, описывающего течение процесса подогрева шерсти, позволит устанавливать необходимую мощность ЭМП и время нагрева.

Анализ предшествующих исследований

По данным литературных источников |1,2|, электромагнитная энергия давно нашла применение для сушки материалов, дезинфекции зерна, уничтожения вредителей-насекомых, обработки комбикорма, стерилизации тары, инструментов, спецодежды. Однако следует отметить, что результаты, полученные в этих работах, не могут быть использованы для разогрева шерсти в кипах и уничтожения вредных микроорганизмов.