

грузов. Крановщик включает электродвигатель. Система управления подает команды механизмам крана на выполнение задания, наблюдает за их работой, рассчитывает параметры движения и корректирует их.

3). Применена система электропривода ТПЧ-АД с короткозамкнутым ротором при индивидуальном преобразователе частоты у каждого двигателя.

4). Ограничение по допустимым скоростям движения отдельных механизмов крана ведут к ограничению ускорений и замедлений.

5). Безопасная эксплуатация крана и исключение аварийных ситуаций требуют введения в систему некоторых текущих параметров.

6). Автоматизация перемещения грузов повысит долговечность и эксплуатационную надежность кранов.

*Аналитичним методом визначаються моменти сил пружності в пружних зв'язках трьохмасової механічній системі з урахуванням маси направляючого шківа*

*Ключові слова: динаміка, диференціальні рівняння, аналітичне рішення, осцилограми*

*Аналитическим методом определяются моменты сил упругости в упругих связях трехмассовой механической системе с учетом массы направляющего шкива*

*Ключевые слова: динамика, дифференциальные уравнения, аналитическое решение, осциллограммы*

*An analytical method determine the moments of forces of resiliency in resilient svyazyakh to the three-mass mechanical system taking into account mass of sending pulley*

*Key words: dynamics, differential equalizations, analytical decision ostsyllogrammy*

## 1. Введение

В настоящее время благодаря использованию быстрой вычислительной техники появилась возможность решать сложные задачи динамики машин с минимальными упрощениями эквивалентных расчетных схем, не пренебрегая малыми дискретными массами. В настоящей работе исследуется влияние масс направляющих шкивов, которыми

## Литература

1. Хальфин М.Н. Грузоподъемные машины для монтажных и погрузочно-разгрузочных работ: Учебно-справочное. - Ростов н/Д: Феникс, 2006-608с.
2. Спосіб вертикального переміщення вантажів краном / Н.В. Клімченкова, А.М. Спаська (Україна), № 27558, В 667 19/00. Заявл. 23.05.2007, Бюл. № 18.
3. Климченкова Н.В., Корниенко С.В., Малишевский Н.Н., Москаленко С.С. Повышение степени автоматизации технологического перемещения грузов краном / Восточно-Европейский журнал передовых технологий. - Харьков: Технологический центр. 2008, № 4/1(34). - с. 41-44.

УДК 621.86

# ДИНАМИКА ОДНОКОНЦЕВОГО КАНАТНОГО ПОДЪЁМНИКА С УЧЕТОМ НАПРАВЛЯЮЩЕГО ШКИВА

**А. П. Нестеров**

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой

**Т. Н. Осипова**

Аспирант\*

\*Кафедра «Промышленный и автомобильный транспорт»

Украинская инженерно-педагогическая академия  
Ул. Университетская, 16, г Харьков, Украина, 61003

ранее пренебрегали [1], на динамические усилия в канатах.

## 2. Основное содержание

На рис. 1 представлены конструктивная и эквивалентная крутильная динамическая схемы одноконцевого канатного подъемника с направляющим шкивом.

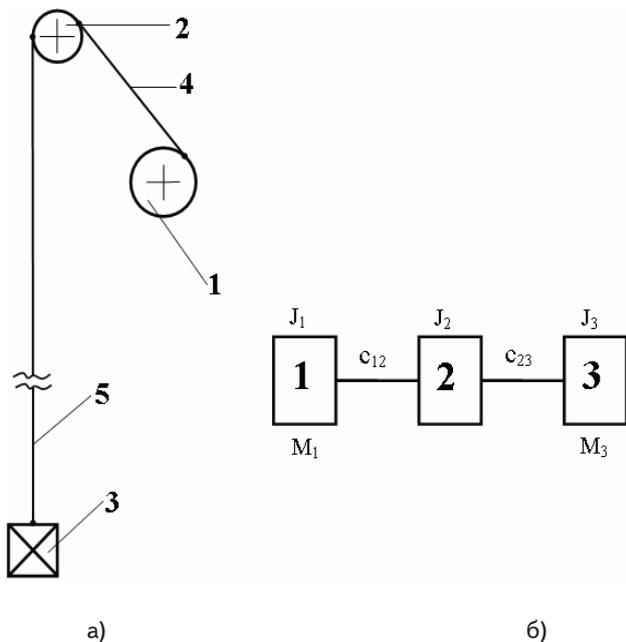


Рис. 1. Схемы одноконцевой подъемной установки: а) конструктивная; б) эквивалентная крутильная динамическая: 1 – барабан; 2 – направляющий шкив; 3 – клеть с грузом; 4 – струна каната; 5 – канат;  $J_1, J_2, J_3$  – соответственно суммарный приведенный момент инерции ротора двигателя, редуктора и барабана; направляющего шкива; клетки с грузом с учетом массы каната;  $c_{12}$  – приведенная крутильная жесткость струны каната;  $c_{23}$  – приведенная крутильная жесткость каната от клетки до направляющего шкива;  $M_1$  и  $M_3$  – внешние моменты, прикладываемые к барабану и клетю

Система дифференциальных неоднородных уравнений, описывающая колебательные силовые процессы в трехмассовой схеме на рис. 1б без учета диссипативных сил приведена ниже [2]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{M}_{12}(t) + \beta_{12}^2 \cdot M_{12}(t) - \frac{c_{12}}{J_2} M_{23}(t) &= \frac{c_{12}}{J_1} M_1; \\ \ddot{M}_{23}(t) + \beta_{23}^2 \cdot M_{23}(t) - \frac{c_{23}}{J_2} M_{12}(t) &= -\frac{c_{23}}{J_3} M_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\beta_{12}$  и  $\beta_{23}$  – парциальные частоты соответствующих упругих звеньев.

Частные решения системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1) имеют вид [3]:

$$M_{12} = A_{12} \cdot e^{\tau t} \text{ и } M_{12} = A_{23} \cdot e^{\tau t}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и сокращая на  $e^{\tau t}$ , получим следующую систему двух линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\tau^2 + \beta_{12}^2) A_{12} - \frac{c_{12}}{J_2} A_{23}; \\ (\tau^2 + \beta_{23}^2) A_{23} - \frac{c_{23}}{J_2} A_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для того, чтобы система (3) имела отличные от нуля решения относительно  $A_{12}$  и  $A_{23}$ , её определитель должен равняться нулю

$$\begin{vmatrix} \tau^2 + \beta_{12}^2 & -\frac{c_{12}}{J_2} \\ -\frac{c_{23}}{J_2} & \tau^2 + \beta_{23}^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Раскрывая определитель (4), получим следующее характеристическое уравнение

$$\tau^4 + (\beta_{12}^2 + \beta_{23}^2) \cdot \tau^2 + \beta_{12}^2 \cdot \beta_{23}^2 - \frac{c_{12} \cdot c_{23}}{J_2^2} = 0. \quad (5)$$

Корни уравнения (5) комплексные попарно сопряженные, соответствующие канатным подъемникам при отсутствии диссипативных сил

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 = +\beta_1 i; \tau_2 = +\beta_2 i; \\ \bar{\tau}_1 = -\beta_1 i; \bar{\tau}_2 = -\beta_2 i. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Такое допущение позволит исследовать закономерность силовых колебательных процессов в «чистом виде» без затухания.

Корням  $\tau_1$  и  $\bar{\tau}_1$  соответствует система комплексных частных решений

$$\left. \begin{aligned} M_{12}^{(1)} = A_{12}^{(1)} \cdot e^{\tau_1 t}; M_{23}^{(1)} = A_{23}^{(1)} \cdot e^{\tau_1 t}; \\ \bar{M}_{12}^{(1)} = \bar{A}_{12}^{(1)} \cdot e^{\bar{\tau}_1 t}; \bar{M}_{23}^{(1)} = \bar{A}_{23}^{(1)} \cdot e^{\bar{\tau}_1 t}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где коэффициенты  $A_{12}^{(1)}, \bar{A}_{12}^{(1)}, A_{23}^{(1)}, \bar{A}_{23}^{(1)}$  – комплексные числа:

$$\left. \begin{aligned} A_{12}^{(1)} = B_{12}^{(1)} - i C_{12}^{(1)}; A_{23}^{(1)} = B_{23}^{(1)} - i C_{23}^{(1)}; \\ \bar{A}_{12}^{(1)} = B_{12}^{(1)} + i C_{12}^{(1)}; \bar{A}_{23}^{(1)} = B_{23}^{(1)} + i C_{23}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из полусуммы этих комплексных решений получаем вещественные решения, то есть паре комплексных сопряженных корней  $\tau_1$  и  $\bar{\tau}_1$  соответствует два действительных частных решения вида [3]

$$\left. \begin{aligned} M_{12}^{(1)} = B_{12}^{(1)} \cos \beta_1 t + C_{12}^{(1)} \sin \beta_1 t; \\ M_{23}^{(1)} = B_{23}^{(1)} \cos \beta_1 t + C_{23}^{(1)} \sin \beta_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Второй паре комплексных корней  $\tau_2$  и  $\bar{\tau}_2$  соответствуют следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} M_{12}^{(2)} = B_{12}^{(2)} \cos \beta_2 t + C_{12}^{(2)} \sin \beta_2 t; \\ M_{23}^{(2)} = B_{23}^{(2)} \cos \beta_2 t + C_{23}^{(2)} \sin \beta_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Система из уравнений (9) и (10) имеет восемь постоянных неизвестных, определяемых из начальных условий. Однако, мы можем получить только четыре уравнения деформации и скорости деформации, имея общее решение (1). Поэтому выразим постоянные  $B_{23}^{(1)}, B_{23}^{(2)}, C_{23}^{(1)}, C_{23}^{(2)}$  через  $B_{12}^{(1)}, B_{12}^{(2)}, C_{12}^{(1)}, C_{12}^{(2)}$ , воспользовавшись соотношениями (3) и методикой [3], то есть уменьшив число неизвестных

$$\left. \begin{aligned} A_{23}^{(1)} = \frac{(\tau_1^2 + \beta_{12}^2) \cdot J_2}{c_{12}} A_{12}^{(1)}; \\ \bar{A}_{23}^{(1)} = \frac{(\bar{\tau}_1^2 + \beta_{12}^2) \cdot J_2}{c_{12}} \bar{A}_{12}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из (8) находим

$$B_{12}^{(1)} = \frac{A_{12}^{(1)} + \bar{A}_{12}^{(1)}}{2}; C_{12}^{(1)} = -\frac{A_{12}^{(1)} - \bar{A}_{12}^{(1)}}{2i}. \quad (12)$$

Окончательно найдем

$$\left. \begin{aligned} B_{23}^{(1)} = \frac{J_2}{c_{12}} (\beta_{12}^2 - \beta_1^2) B_{12}^{(1)}; \\ C_{23}^{(1)} = \frac{J_2}{c_{12}} (\beta_{12}^2 - \beta_1^2) C_{12}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Аналогично для второй пары корней

$$\left. \begin{aligned} B_{23}^{(2)} &= \frac{J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{c_{12}} B_{12}^{(2)}, \\ C_{23}^{(2)} &= \frac{J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{c_{12}} C_{12}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Общее решение системы неоднородных дифференциальных уравнений (1) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= B_{12}^{(1)} \cos \beta_1 t + C_{12}^{(1)} \sin \beta_1 t + B_{12}^{(2)} \cos \beta_2 t + C_{12}^{(2)} \sin \beta_2 t + R_{12}; \\ M_{23} &= \frac{J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2)}{c_{12}} B_{12}^{(1)} \cos \beta_1 t + \frac{J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2)}{c_{12}} C_{12}^{(1)} \sin \beta_1 t + \\ &+ \frac{J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{c_{12}} B_{12}^{(2)} \cos \beta_2 t + \frac{J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{c_{12}} C_{12}^{(2)} \sin \beta_2 t + R_{23}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где  $R_{12}$  и  $R_{23}$  – частные решения системы уравнений (1).

К исследованию принимаются вынужденные колебания трехмассовой механической системы с упругими связями при мгновенном приложении постоянных внешних возмущений и нулевых начальных условиях.

Имеем при  $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} M_{12}(0) &= 0; \dot{M}_{12}(0) = 0; M_{23}(0) = 0; \dot{M}_{23}(0) = 0; \\ M_1 &= \text{const}; M_3 = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

следовательно,  $R_{12} = \text{const}$  и  $R_{23} = \text{const}$ .

Взяв производные  $\dot{M}_{12}$  и  $\dot{M}_{23}$  из (15) с учетом (16) получим систему следующих алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} 0 &= B_{12}^{(1)} + B_{12}^{(2)} + R_{12}; \\ 0 &= \beta_1 \cdot C_{12}^{(1)} + \beta_2 \cdot C_{12}^{(2)}; \\ 0 &= \frac{J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2)}{c_{12}} B_{12}^{(1)} + \frac{J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{c_{12}} B_{12}^{(2)} + R_{23}; \\ 0 &= \frac{\beta_1 \cdot J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_1^2)}{c_{12}} C_{12}^{(1)} + \frac{\beta_2 \cdot J_2 (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{c_{12}} C_{12}^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Из системы уравнений (17) найдем

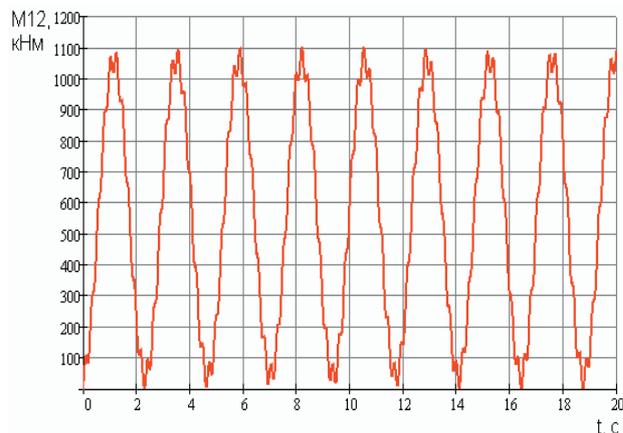
$$\left. \begin{aligned} C_{12}^{(1)} &= 0; C_{12}^{(2)} = 0; \\ B_{12}^{(1)} &= \frac{c_{12} \cdot R_{23}}{J_2 \cdot (\beta_1^2 - \beta_2^2)} - \frac{R_{12} \cdot (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{\beta_1^2 - \beta_2^2}; \\ B_{12}^{(2)} &= -R_{12} - B_{12}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Зная коэффициенты (18), получим из (15) следующее решение системы дифференциальных уравнений (1) в виде

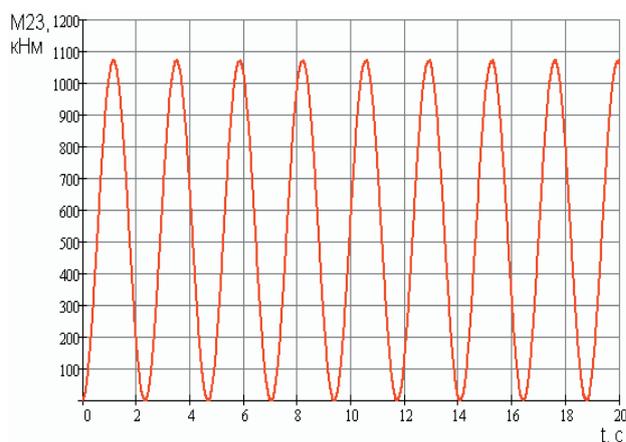
$$M_{12} = B_{12}^{(1)} \cos \beta_1 t + B_{12}^{(2)} \cos \beta_2 t + R_{12}; \quad (19)$$

$$M_{23} = \frac{J_2 \cdot (\beta_{12}^2 - \beta_1^2)}{c_{12}} B_{12}^{(1)} \cos \beta_1 t + \frac{J_2 \cdot (\beta_{12}^2 - \beta_2^2)}{c_{12}} B_{12}^{(2)} \cos \beta_2 t + R_{23}. \quad (20)$$

Осциллограммы моментов сил упругости подсчитаны по (19), (20) и представлены на рис. 2.



а)



б)

Рис. 2. Осциллограммы колебаний моментов сил упругости: а) струны; б) каната

Из осциллограмм видно, что струна колеблется с двумя частотами – низкой и высокой, а в канате проявляется только низкая частота. Максимальные значения амплитуды колебания в канате определяется низкой частотой, а в струне – низкой с наложением высокой.

### 3. Выводы

1. Впервые получено аналитическое решение неоднородных дифференциальных уравнений для трехмассовой механической системы с упругими связями с учетом массы направляющего шкива.

2. Учет массы направляющего шкива при расчете колебаний канатов приводит к формированию высокой частоты, амплитуда колебаний которой накладывается на низкую, что приводит к увеличению или уменьшению максимальных значений усилий в канате.

### Література

1. Голубенцев А.Н. Динамика переходных процессов со многими массами. – М.: Машгиз, 1959. – 146 с.
2. Федорова З.М., Лукин И.Ф., Нестеров А.П. Подъемники. – Киев: Вища школа, 1976. – 296 с.
3. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. М., «Высшая школа», 1975. – 248 с.