

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ КОМПРЕССОРНОЙ ЛОПАТКИ ПРИ ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

И. Д. Бреславский

Аспирант

Кафедра газогидромеханики и теплообмена
Национальный технический университет "Харьковский
политехнический институт"

ул. Фрунзе 21, г. Харьков, Украина, 61002

Контактный тел.: 8 (057) 315-15-27

E-mail: jrvan@inbox.ru

К. В. Аврамов

Доктор технических наук, профессор, ведущий научный
сотрудник

Отдел нестационарных механических процессов
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного
НАН Украины

ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046

Контактный тел.: 8 (057) 95-96-83

E-mail: kavramov@ipmach.kharkov.ua

Розроблено метод аналізу нелінійних коливань компресорних лопаток, в основі якого лежить метод нелінійних нормальних форм Шоу-П'єрра. Знайдено власні частоти та форми коливань моделі лопатки. Проаналізовано режими нелінійних коливань, їх стійкість

Ключові слова: нелінійні нормальні форми, компресорні лопатки, внутрішній резонанс

На основании метода нелинейных нормальных форм Шоу-Пьерра разработан подход к анализу нелинейных колебаний компрессорных лопаток. Найдены собственные частоты и формы колебаний модели лопатки. Исследованы режимы нелинейных колебаний и их устойчивость

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы, компрессорные лопатки, внутренний резонанс

The Shaw-Pierre nonlinear normal modes based method of nonlinear vibrations analysis of compressor blades is developed. Eigenfrequencies and eigenforms of model of a blade vibration are found. Nonlinear oscillations of a blade are analyzed, their stability are studied

Key words: nonlinear normal modes, compressor blades, internal resonance

1. Введение

Компрессорные лопатки в процессе эксплуатации находятся под действием значительных динамических нагрузок, возникающих вследствие действия на лопатки потока газа. Зачастую, амплитуды колебаний соизмеримы с толщиной лопатки. Для описания таких колебаний используется геометрически нелинейная теория. В статье [7] с помощью метода Ритца находились линейные собственные формы колебаний пологих анизотропных оболочек. Нелинейные колебания раскладывались по двум линейным модам. С помощью метода Бубнова-Галеркина выводилась дискретная модель системы. К.М. Лиев и С.В. Лира [9] использовали энергетический подход для исследования линейных собственных колебаний прямоугольных в плане пологих оболочек различной гауссовой кривизны с различными условиями закрепления. Статьи [8,10] посвящены исследованию нелинейных колебаний лопастей гидротурбины, которая моделировалась

закрученной оболочкой переменной кривизны, имеющей в плане кольцевой сектор. Линейные колебания компрессорных лопаток исследованы в [3,4].

В этой статье исследованы нелинейные колебания компрессорной лопатки. Нелинейная колебания системы раскладывалась по собственным формам линейных колебаний. Получена модель системы с конечным числом степеней свободы, которая исследуется методом нелинейных нормальных форм Шоу-Пьерра с учетом внутренних резонансов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим колебания компрессорной лопатки, представляющей собой пологую трапецевидную в плане закрученную оболочку переменной толщины. Оболочка закреплена по одной стороне и свободна по трем остальным. Эскиз плана такой оболочки представлен на рис. 1. В связи со сложностью геометрии

срединой поверхности оболочки переход к главным координатам в данной задаче нецелесообразен.

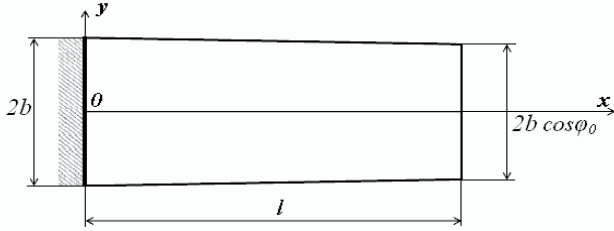


Рис. 1. Эскиз плана оболочки

Профиль лопасти представляет собой круговой серп. По длине лопатки максимальная стрела изогнутости и максимальная толщина изменяются линейно. Краевые условия на защемленном участке контура имеют вид:

$$w|_{x=0} = \frac{\partial w}{\partial n}|_{x=0} = 0, u|_{x=0} = 0, v|_{x=0} = 0, (1)$$

где $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $w(x,y,t)$ – перемещения точек срединной поверхности панели в направлении x, y, z , соответственно.

3. Линейные собственные частоты и формы колебаний

Для нахождения собственных форм и частот линейных колебаний воспользуемся методом Релея-Ритца. При применении этого метода необходимо удовлетворять только кинематическим граничным условиям.

Потенциальную энергию оболочки представим так [2]:

где A и B – коэффициенты Ляме. Параметры, входящие в (2), определяются так [1]:

$$\Pi = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{\Lambda} \left\{ \frac{1}{1-\mu} \left(\epsilon_{11}^2 + 2\mu\epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{22}^2 \right) h(x,y) + \frac{h^3(x,y)}{12} \left(\chi_1^2 + 2\mu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\epsilon_{12}^2 h(x,y) + \frac{1}{3} \tau^2 h^3(x,y) \right) \right\} AB dx dy, (2)$$

где $\epsilon_{11} = \epsilon_1 + \frac{1}{2}\omega_1^2$; $\epsilon_{22} = \epsilon_2 + \frac{1}{2}\omega_2^2$; $\epsilon_{12} = \gamma + \omega_1\omega_2$;

$$\epsilon_1 = \frac{u_x}{A} + \frac{A_y}{AB}v - \tilde{k}_1 w; \quad \epsilon_2 = \frac{v_y}{B} + \frac{B_x}{AB}u - \tilde{k}_2 w;$$

$$\gamma_1 = \frac{v_x}{A} - \frac{A_y}{AB}u + \tilde{k}_{12} w; \quad \gamma_2 = \frac{u_y}{B} - \frac{B_x}{AB}v + \tilde{k}_{12} w;$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{B}{A} \left(\frac{v}{B} \right)_x + \frac{A}{B} \left(\frac{u}{A} \right)_y + 2\tilde{k}_{12} w;$$

$$\delta = 0.5(\gamma_2 - \gamma_1); \quad \omega_1 = -\tilde{k}_1 u - \frac{w_x}{A} + \tilde{k}_{12} v;$$

$$\omega_2 = -\tilde{k}_2 v - \frac{w_y}{B} + \tilde{k}_{12} u;$$

$$\chi_1 = -\frac{(\omega_1)_x}{A} - \frac{A_y}{AB}\omega_2 + \tilde{k}_{12}\delta;$$

$$\chi_2 = -\frac{(\omega_2)_y}{B} - \frac{B_x}{AB}\omega_1 - \tilde{k}_{12}\delta;$$

(3)

$$\tau = -\frac{(\omega_1)_y}{B} + \frac{B_x}{AB}\omega_2 + \tilde{k}_2\gamma_1 - \tilde{k}_{12}\epsilon_1 = -\frac{(\omega_2)_x}{A} + \frac{A_y}{AB}\omega_1 + \tilde{k}_1\gamma_2 - \tilde{k}_{12}\epsilon_2$$

где $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_{12}$ – кривизны координатных нормальных сечений срединной поверхности, $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$ – компоненты тангенциальной деформации, χ_1, χ_2, τ – компоненты изгибной деформации, ω_1, ω_2 – углы вращения относительно тангенциальных осей, δ – угол вращения вокруг нормали [1]. Интеграл в (2) берется по площади проекции срединной поверхности оболочки на плоскость Λ . Поскольку в этом разделе рассматриваются линейные колебания оболочек, то в выражениях (3) не учитываются нелинейные слагаемые.

Кинетическая энергия оболочки имеет следующий вид:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{\Lambda} (\dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2) h(x,y) AB dx dy, (4)$$

где ρ – плотность материала панели. Собственные формы и частоты линейных колебаний определяются методом Релея-Ритца.

4. Нелинейная дискретная модель колебаний

Нелинейные колебания лопатки будем аппроксимировать комбинацией собственных форм линейных колебаний. Колебания оболочки представим так:

$$w(x,y,t) = \sum_{i=1}^N \eta_i(t) W_i(x,y), \quad u(x,y,t) = \sum_{i=1}^N \eta_{i+N}(t) U_i(x,y),$$

$$v(x,y,t) = \sum_{i=1}^N \eta_{i+2N}(t) V_i(x,y) (5)$$

где $W_i(x,y)$, $U_i(x,y)$, $V_i(x,y)$, $i = \overline{1, N}$ – нормированные собственные формы линейных колебаний. Отметим, что функции (5) удовлетворяют краевым условиям (1). Соотношения (5) введем в кинетическую и потенциальную энергии (2, 4). Используя кинетическую и потенциальную энергии, составим уравнение Лагранжа второго рода относительно обобщенных координат η_1, \dots, η_{3N} . В силу закрученности лопатки, перемещения в направлении, ортогональном срединной поверхности лопатки, включают в себя не только перемещения w в направлении оси z , но и перемещения в направлении $y - v$. Перемещения v нельзя считать малыми, поэтому в уравнениях Лагранжа пренебрежем инерционными членами только по u . Тогда из $3N$ обыкновенных дифференциальных уравнений Лагранжа N уравнений превращаются в линейные алгебраические уравнения относительно $\eta_{N+1}, \dots, \eta_{2N}$. Решения линейных алгебраических уравнений введем в дифференциальные уравнения. В результате получим систему $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\eta_1, \dots, \eta_N, \eta_{2N+1}, \dots, \eta_{3N}$.

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = \Omega_1 t, \quad q_i(\tau) = \frac{\eta_i(t)}{h_0}; \quad i = 1..N,$$

$$q_{i-N}(\tau) = \frac{\eta_i(t)}{h_0}; i = 2N+1, \dots, 3N,$$

где Ω_1 – первая (наименьшая) собственная частота линейных колебаний, h_0 – максимальная толщина в корневом сечении лопатки. В модальном пространстве динамическая система, описывающая колебания облоочки принимает следующий вид:

$$\ddot{\xi}_k = f_k(\xi_1, \dots, \xi_{2N}) = -\bar{\Omega}_k^2 \xi_k - \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} l_{kij} \xi_i \xi_j - \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \sum_{g=1}^{2N} l_{kijg} \xi_i \xi_j \xi_g, k = \overline{1, 2N}. \quad (6)$$

Для анализа нелинейных колебаний системы (6) воспользуемся нелинейными нормальными формами Шоу-Пьера [11]. Идея метода заключается в выделении одной или нескольких обобщенных координат, определяющих поведение системы в данном колебательном режиме. Остальные координаты при этом являются зависимыми. Выделим обобщенные координаты, например, пусть это будут первые M координат ξ_1, \dots, ξ_M , которые определяют движение на нормальной форме. Нормальную форму (инвариантное многообразие) представим так:

$$\begin{aligned} \xi_k &= X_k(\xi_1, \dot{\xi}_1, \dots, \xi_M, \dot{\xi}_M); \\ \dot{\xi}_k &= Y_k(\xi_1, \dot{\xi}_1, \dots, \xi_M, \dot{\xi}_M), \end{aligned} \quad (7)$$

$k = M+1, \dots, 2N$

Нелинейная нормальная форма (7) удовлетворяет следующим уравнениям в частных производных:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \frac{\partial X_k}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \sum_{i=1}^M \frac{\partial X_k}{\partial \dot{\xi}_i} f_i(\xi_1, \dots, \xi_M, X_{M+1}, \dots, X_{2N}) &= Y_k; \\ \sum_{i=1}^M \frac{\partial Y_k}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \sum_{i=1}^M \frac{\partial Y_k}{\partial \dot{\xi}_i} f_i(\xi_1, \dots, \xi_M, X_{M+1}, \dots, X_{2N}) &= \\ = f_k(\xi_1, \dots, \xi_M, X_{M+1}, \dots, X_{2N}). \end{aligned} \quad (8)$$

$k = M+1, \dots, 2N.$

Функции $X_k, Y_k, k = M+1, \dots, 2N$ будем искать в виде полиномов от $\xi_1, \dot{\xi}_1, \dots, \xi_M, \dot{\xi}_M$ с неизвестными коэффициентами. В случае, когда исходная система приведена к модальным координатам, т.е. имеет вид (6), в этих полиномах коэффициенты при степенях ниже второй автоматически равняются нулю. Введем эти полиномы в (8) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\xi_1, \dot{\xi}_1, \dots, \xi_M, \dot{\xi}_M$.

В результате получим множество систем линейных алгебраических уравнений. Первая система линейна относительно коэффициентов при вторых степенях, вторая – относительно коэффициентов при третьих степенях и т.д. Последовательно решая полученные системы линейных уравнений, находим коэффициенты полиномов. После того, как нормальная форма (7) получена, представления для $\xi_k, k = M+1, \dots, 2N$ вводятся в соответствующие уравнения системы (6). Таким образом, мы получаем систему M дифференциальных уравнений, описывающую движение на нормальной форме:

$$\ddot{\xi}_k = f_k(\xi_1, \dots, \xi_M, X_{M+1}(\xi_1, \dot{\xi}_1, \dots, \xi_M, \dot{\xi}_M), \dots, X_{2N}(\xi_1, \dot{\xi}_1, \dots, \xi_M, \dot{\xi}_M)),$$

$k = 1, \dots, M. \quad (9)$

Оценка устойчивости периодических движений проводилась с помощью теоремы Флоке-Ляпунова [6].

5. Численное моделирование колебаний

Рассмотрим модель стальной компрессорной лопатки с параметрами из [3]: $b=0.0285$ м, $l=0.134$ м, $h_0=0.00453$ м, клиновидность лопатки $\chi=0.4349$, максимальная стрела изогнутости у корня лопатки $f_0=0.0055$ м, отношение стрелы изогнутости на свободном конце к f_0 $\phi=0.4118$, угол закрутки $\phi_0=0.422$.

Для расчета собственных частот методом Релея-Ритца базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям (1), строились с помощью метода R-функций [5]. Достаточное количество базисных функций устанавливалось исходя из требования сходимости собственных частот.

В табл. 1 приводятся результаты расчетов собственных частот, а также экспериментальные и расчетные данные из [3].

Таблица 1

	Частоты, Гц					
Результаты расчета	275.35	1020.14	1238.08	2428.35	2628.88	3153.8
Результаты расчета [3]	285	1000	1215	2560		3280
Эксперимент [3]	273	1000	1223	2457		2946

На рис. 2 приведены узловые линии собственных форм линейных колебаний $W_i(x,y)$. Первые формы хорошо согласуются с приведенными в [3, 4].

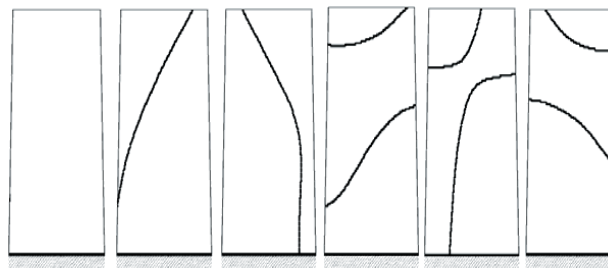


Рис. 2. Узловые линии первых собственных форм

Как следует из анализа частот, в системе может существовать внутренний резонанс между четвертой и пятой собственными частотами 1:1. Между третьей и четвертой, а также третьей и пятой собственными частотами может существовать внутренний резонанс 1:2.

Для получения дискретной модели нелинейных колебаний лопатки в разложениях (5) использовались первые пять собственных форм. После исключения обобщенных координат по u мы приходим к системе с десятью степенями свободы вида (6). Системы такой размерности крайне сложно анализировать. Вследствие возможности существования в системе внутренних резонансов между третьей, четвертой и пятой собственными формами колебаний, логичным выглядит предположение, что в широком диапазоне частот поведение системы определяется именно этими тремя координатами. Поэтому три обобщенные координаты – ξ_3, ξ_4, ξ_5 – и их производные были выбраны в качестве независимых для построения нормальной формы. Таким образом, вместо системы десяти уравнений (6) мы пришли к системе трех уравнений (9). Движения на этой форме исследовались с помощью метода гармонического баланса.

Рассмотрим колебания с преобладающей координатой ξ_3 , которая автопараметрически возбуждает колебания ξ_5 с удвоенной частотой. Такой режим существует, пока амплитуда ξ_5 мала (рис. 3). На рис. 3 по оси ординат показывается размах колебаний $R_1 = 0.5(\max(\xi_i(\tau)) - \min(\xi_i(\tau)))$. Устойчивые колебания показываются сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной. Вертикальными линиями на рис. 3 показаны линейные собственные частоты соответствующих координат. Амплитуды остальных обобщенных координат в этом режиме близки к нулю. При дальнейшем увеличении частоты колебаний ξ_3 и ξ_5 совершают колебания с частотой 2Ω , при этом амплитуда ξ_3 становится малой.

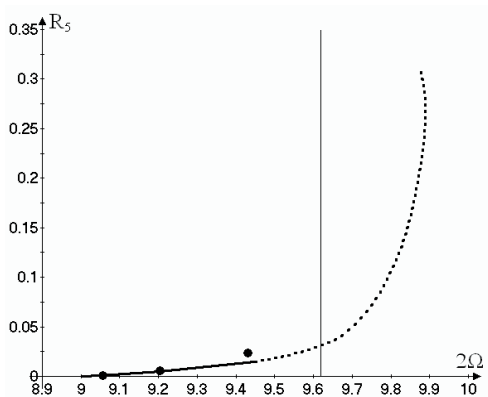
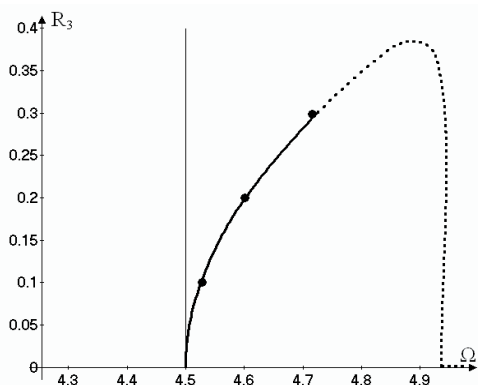


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики

Колебания с преобладающей обобщенной координатой ξ_4 возбуждают также координаты ξ_3 (с в два раза меньшей частотой) и ξ_5 , однако этот режим оказывается полностью неустойчивым.

Колебания с преобладающей обобщенной координатой ξ_5 не возбуждают колебаний остальных обобщенных координат. Амплитудно-частотная характеристика для этого режима приведена на рис. 4.

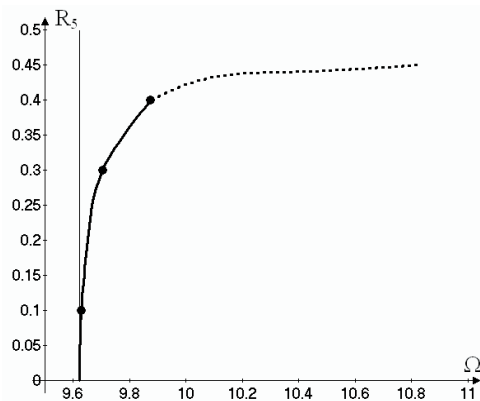


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика

Для оценки точности решения, полученного с помощью метода нелинейных нормальных форм метод гармонического баланса применялся к полной системе нелинейных дифференциальных уравнений (6). Полученные таким образом решения в устойчивых частях совпадают с результатами, полученными нелинейными нормальными модами.

Для подтверждения представленных выше результатов проводилось прямое численное моделирование системы (6). Результаты этого моделирования показаны на рис. 3-4 точками.

6. Заключение

Амплитуды колебаний в резонансных режимах часто соизмеримы с толщиной компрессорных лопаток. При проектировании лопаток необходимо оценивать возможность возникновения внутренних резонансов, так как реализация таких режимов приводит к усталостным поломкам оборудования. Анализ свободных колебаний является отправной точкой для анализа вынужденных колебаний реальных лопаток.

Проведенный анализ показал, что предложенный метод позволяет эффективно анализироваться нелинейные колебания компрессорных лопаток, описываемые дискретными моделями большой размерности. Метод позволяет с достаточной точностью строить скелетные кривые колебаний при наличии в системе внутренних резонансов.

Литература

1. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979 – 384 с.

2. Григолоук Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М: Наука, 1978.– 344 с.
3. Меерович И.И. Колебания слабоизогнутых и закрученных лопаток. Труды ЦИАМ №271. – М.: Оборонгиз, 1956. – 56 с.
4. Меерович И.И. Распределение напряжений в компрессорных лопатках при колебаниях. – М.: Оборонгиз, 1961. – 108 с.
5. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – Киев: Наукова Думка, 1987.- 180 с.
6. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972.– 718 с.
7. Abe A., Kobayashi Y., Yamada G. Non-linear vibration characteristics of clamped laminated shallow shells// Journal of Sound and Vibration, 2000.– 234(3). – P. 405-426.
8. Hu X.X., Tsuiji T. Free vibration analysis of curved and twisted cylindrical thin panels// Journal of Sound and Vibration, 1999. – 219(1).– P. 63-68
9. Liew K.M., Lira C.W. Vibration of doubly-curved shallow shells// Acta mechanica, 1996. –114. – P. 95-119.
10. Sakiyama T., Hu X.X., Matsuda H., Morita C. Vibration of twisted and curved cylindrical panels with variable thickness// Journal of Sound and Vibration, 2002. –254(3).– P. 481-502
11. Shaw S. W., Pierre C. Normal modes for nonlinear vibratory systems// Journal of Sound and Vibration, 1993. – 164. – P. 58-124.