

УДК 534-16:621.822

Розглянуто питання побудови адекватних математичних моделей жорстких роторів газотранспортних і газотурбінних установок з активними радіальними і осевими магнітними підшипниками при різних силових характеристиках. Запропоновані аналітичні моделі можуть бути покладені в основу імітаційних моделей, призначених для проведення розрахунків на динамічну стійкість при різних режимах роботи роторних машин

Ключові слова: математична модель, динаміка ротора, АМП

Рассмотрены вопросы построения адекватных математических моделей жестких роторов газотранспортных и газотурбинных установок с активными радиальными и осевыми магнитными подшипниками при различных силовых характеристиках. Предложенные аналитические модели могут быть положены в основу имитационных моделей, предназначенных для проведения расчетов на динамическую устойчивость при различных режимах работы роторных машин

Ключевые слова: математическая модель, динамика ротора, АМП

Problems of adequate mathematical models construction for rigid rotors of gas-transport and gas-turbines plants with the active radial and axial magnetic bearings with different power characteristics are considered. The offered analytical models can be put in the basis of simulations models which are intended for calculations of the dynamic stability for the different operations modes of rotors machines

Key words: mathematical model, rotor dynamics, AMB

ОСОБЕННОСТИ АДЕКВАТНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РОТОРОВ В АКТИВНЫХ МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ ГАЗОТРАНСПОРТНЫХ И ГАЗОТУРБИННЫХ УСТАНОВОК

Г. Ю. Мартыненко

Кандидат технических наук, доцент
Кафедра динамики и прочности машин
Национальный технический университет «Харьковский
политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002
Контактный тел.: 8 (057) 707-68-79
E-mail: gmartynenko@kpi.kharkov.ua

1. Введение

В настоящее время активные магнитные подшипники (АМП) находят свое применение в роторных машинах различного предназначения, в том числе компрессорах магистральных газопроводов и нефтедобывающих станций, генераторах, гидравлических турбинах, энергоаккумулирующих установках и др. Так, например, один из ведущих мировых производителей АМП фирма S2M [1] выпускает магнитные подшипники кроме указанных машин также для детандер-генераторных агрегатов, интегрированных электроприводных компрессоров, турбодетандеров и др. Такие опоры устанавливаются, например, в центробежных компрессорах газоперекачивающих агрегатов, изготавливаемых на «Сумское НПО им. Фрунзе»

(Украина) и газотурбинных электростанциях, производимых ОАО «Энергомашкорпорация» (Россия).

Такое стремительное распространение АМП получили ввиду их явных преимуществ по сравнению с традиционными подшипниками – скольжения, качения и газодинамическими, которые применяются в выше указанных роторных машинах. Это отсутствие смазочных маслосистем, снижение потерь на трение, сравнительно большой зазор и т.д.

Как известно, принцип действия АМП заключается в том, что ротор удерживается в определенной позиции в радиальном или осевом направлениях магнитными полями, создающимися электромагнитами [2-5]. Эти электромагниты располагаются на статоре, а токи, которые подаются на их обмотки, изменяются в зависимости от положения ротора в пространстве согласно

заданному закону управления. Таким образом, в систему управления (СУ), кроме указанных элементов входят датчики положения (и, возможно, скорости), которые вырабатывают сигналы рассогласования и через усилители управляют токами в электромагнитах, чтобы вернуть ротор в номинальное (центральное) положение. Законы управления, реализуемые системой регулирования, определяют вид и параметры силовых характеристик АМП, которые для большинства случаев являются нелинейными симметричными и жесткими. Варианты радиального и осевого АМП показаны на рис. 1а и 1б соответственно. Существуют также множество других конструктивных вариантов этих АМП, которые в основном сводятся к увеличению количества магнитопроводов, полюсов, обмоток управления и подмагничивания, но принцип действия всех этих вариантов идентичен представленным на рис. 1.

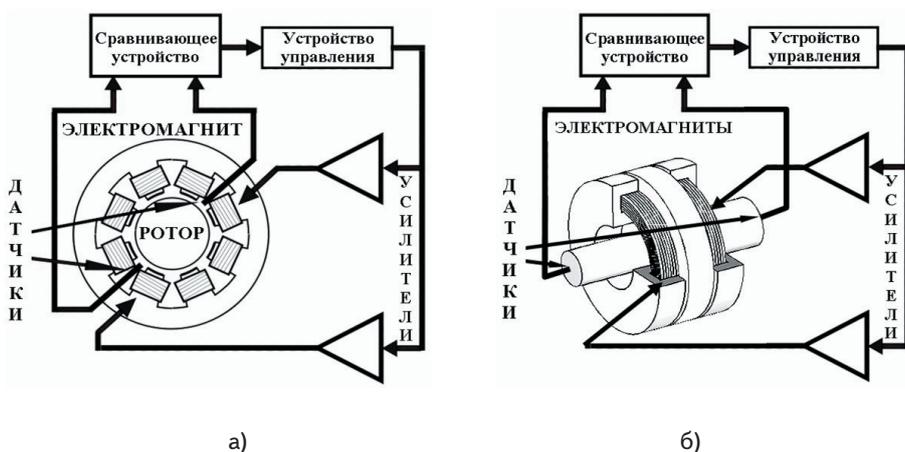


Рис. 1. Активные магнитные подшипники: а) радиальный, б) осевой

2. Постановка задачи

Для выбора наиболее подходящего варианта АМП для той или иной роторной машины необходимо использование математических моделей наиболее близко к реальности передающих взаимосвязь всех процессов, происходящих в такой сложной электромагнито-механической системе.

Большинство математических моделей жестких роторов в АМП, известных в литературе, сводится к линеаризации дифференциальных уравнений движения и уравнений, описывающих электромагнитные процессы в системе, которые записываются на основании второго закона Кирхгофа [2-4]. Нелинейные модели практически не используются ввиду основного акцента при исследованиях на выбор и совершенствование систем и алгоритмов управления. В моделях также отсутствует взаимосвязь между радиальными и осевыми смещениями. При этом с одной стороны учитываются особенности действия управляемых магнитных (пондеромоторных) сил, создаваемых электромагнитами и действующими на объект управления (ротор), а с другой стороны – линеаризованные уравнения не позволяют адекватно передать процессы при нахождении системы в предельных режимах (насыщение магнитной цепи, нулевой ток или нулевой зазор), а также не дают возможности отобразить дру-

гие характерные для такой системы нелинейности. Последнее можно отнести к существенным недостаткам указанных моделей.

При использовании классического подхода к описанию колебаний механических систем можно также пренебречь в математической модели электромагнитными уравнениями, а действия электромагнитов на ротор заменить силами с нелинейными характеристиками, рассчитанными с учетом закона управления, но представленными в зависимости только от механических обобщенных координат [6]. В этом случае неадекватность модели будет обусловлена неучетом зависимости магнитных сил от токов в цепях, а также особенностей электромагнитных процессов, например постоянной времени изменения токов в обмотках электромагнитов из-за большой индуктивности.

Целью данной работы является выявление особенностей работы является выявление особенностей математического описания динамического поведения жестких роторов газотранспортных и газотурбинных установок с АМП, имеющими различные силовые характеристики, которые обусловлены применяемыми законами управления. Предполагается сохранением в уравнениях движения нелинейных слагаемых порядков согласованных с порядком слагаемых в функциях, описывающих восстанавливающие магнитные силы, обеспечить надежную достоверность аналитической модели.

3. Конструктивные варианты АМП и их силовые характеристики

На рис. 1б представлен классический вариант осевого упорного АМП. В общем случае суммарная сила, создаваемая им и действующая на диск, расположенный на роторе, в зависимости от токов имеет вид [3]:

$$F = \frac{\mu_0 n^2 (I_b + i)^2 S_p}{4(\delta_a - z)^2} - \frac{\mu_0 n^2 (I_b - i)^2 S_p}{4(\delta_a + z)^2}, \quad (1)$$

где i – ток управления, I_b – ток смещения, δ_a – номинальный зазор, S_p – площадь и внешнего и внутреннего полюсов, n – количество витков.

Зачастую данная сила при проведении расчетных исследований линеаризуется [3], как показано на рис. 2. Это вносит погрешность при смещении ротора близком к номинальному зазору, либо при нулевом токе.

Для обеспечения устойчивости центрального положения ротора в АМП и придания подвесу необходимых динамических параметров необходимо, чтобы силы изменялись в соответствии с текущим отклонением ротора от данного положения. За это отвечает система управления (СУ), реализующая некоторый алгоритм управления, т.е. изменения тока в зависимости от отклонения.

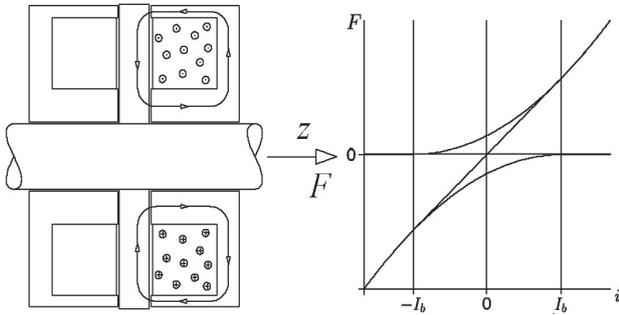


Рис. 2. Зависимость магнитной силы в осевом АМП от тока [3]

Один из вариантов закона управления, а также силовые характеристики (зависимости сил от смещения с учетом закона управления при различных значениях питающего напряжения) осевого АМП приведены на рис. 3 [6]. Токи в обеих обмотках при центральном положении ротора являются токами смещения. Они нужны для того, чтобы создать в подвесе магнитное смещение и тем самым силовой натяг [4], т.е. обеспечить требуемую жесткость АМП. Управление силой происходит за счет увеличения натяга в одном направлении и уменьшения в противоположном.

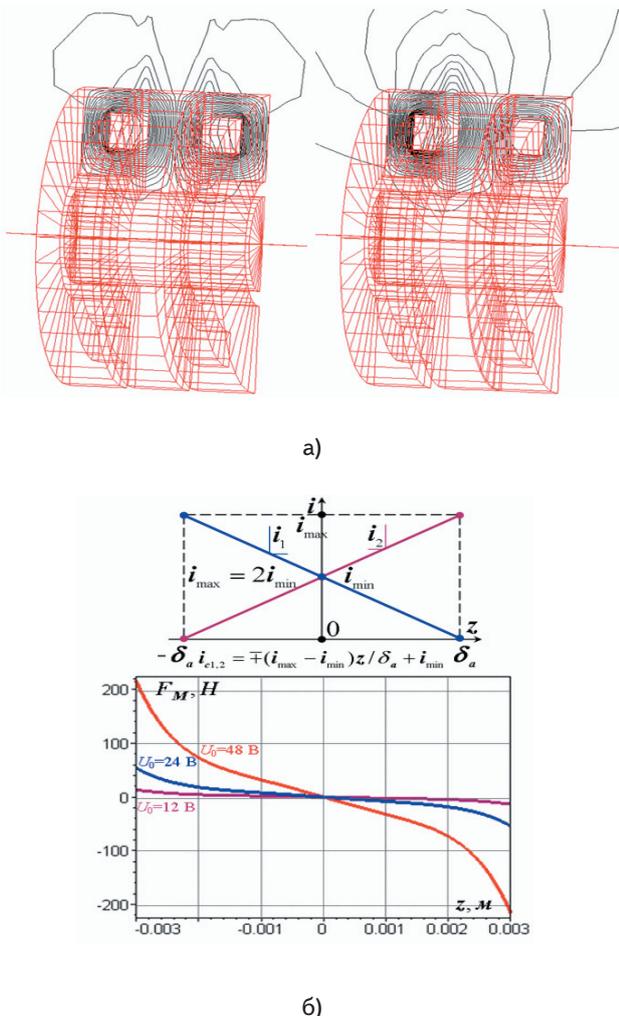


Рис. 3. Результаты анализа осевого АМП: а) распределение силовых линий магнитного поля ($z = 0$ и $z \approx \delta_a$), б) закон управления и силовая характеристика

На рис. 4 показаны различные конструктивные варианты осевых АМП [3], позволяющие либо сконцентрировать магнитный поток, либо усилить его за счет дополнительных обмоток, либо развязать магнитные контура, что повышает эффективность применения АМП в различных роторных машинах. Силовые характеристики для всех перечисленных АМП будут зависеть от применяемых законов управления, но все они будут жесткими симметричными и могут аппроксимироваться полиномами нечетных степеней (см. рис. 3).

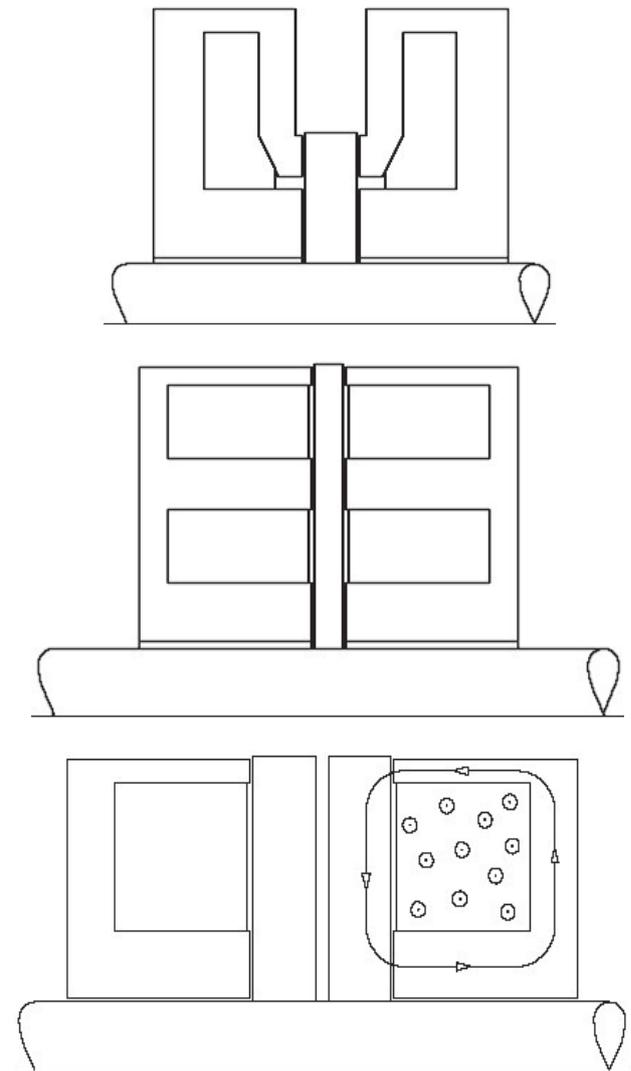
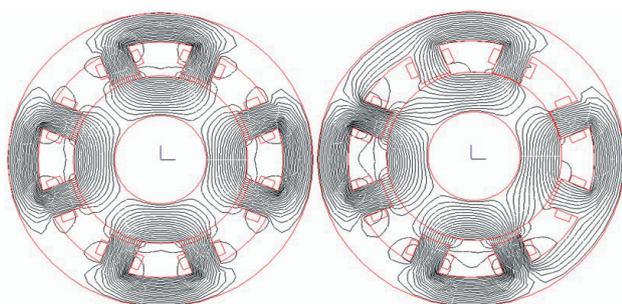


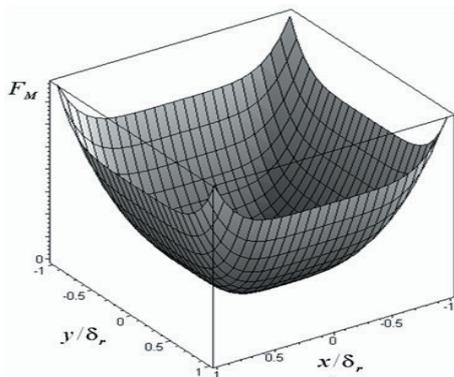
Рис. 4. Конструктивные варианты осевых АМП [3]

При использовании классического радиального АМП (рис. 1а) с восьмью наконечниками, катушки которых попарным соединением создают четырехполюсник магнитная сила, создаваемая каждым полюсом, упрощенно может быть рассчитана по формулам, описывающим плоско параллельный подвес [4]. Однако в действительности зависимость суммарной магнитной силы значительно сложнее [9]. Как и для осевого АМП силовая характеристика будет зависеть от применяемого закона управления, который в этом случае должен учитывать смещение ротора в двух направлениях, а возможно, и скорости этого смещения, и моментальные значения токов в цепях электромагнитов.

На рис. 5 показаны картины эквипотенциальных линий магнитного поля для двух положений ротора, а также силовая характеристика (зависимость модуля равнодействующей магнитных сил от смещения центра опорного участка ротора). Первое из рассмотренных положений ротора – центральное. Анализ рис. 5а показывает, что распределение силовых линий в этом случае симметрично относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей, силы притяжения, которые создаются каждым из четырех электромагнитов, равны по модулю, но действуют в разных направлениях и таким образом их равнодействующая равна 0. Эти силы и создают предварительный натяг, а от их величины зависит жесткость АМП. Во втором положении ротор является смещенным. Распределение силовых линий теряет симметричность, равнодействующая восстанавливающей силы не равна 0, а ее направление противоположно направлению вектора смещения.



а)



б)

Рис. 5. Результаты анализа радиального АМП: а) распределение силовых линий магнитного поля ($x, y = 0$ и $x, y \approx \delta_r / \cos 45^\circ$), б) силовая характеристика

Некоторые из других конструктивных вариантов радиальных АМП представлены на рис. 6. В них рассматриваются возможности разного расположения катушек, что позволяет при том же количестве полюсных наконечников реализовать восемь, а не четыре полюса как в предыдущем случае, или расположить обмотку на участки ярма статора между двумя полюсами, что позволяет сделать АМП более компактным при сохранении тех же характеристик. Другой вариант – разрыв магнитопровода статора, что дает возможность практически избавиться от потоков рассеяния (см. рис. 5а).

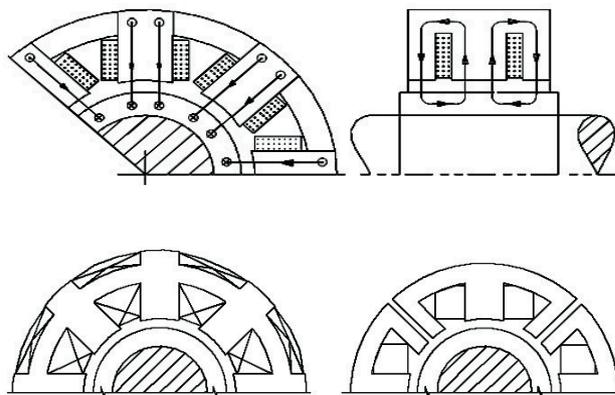


Рис. 6. Конструктивные варианты радиальных АМП [3]

Таким образом, практически для всех конструктивных вариантов (как осевых, так и радиальных АМП, при различных законах управления производимого как по току, так и по напряжению, с использованием как аналоговых, так и цифровых СУ) силовые характеристики носят нелинейный характер. Это, несомненно, должно быть учтено при построении математических моделей во избежание проблем связанных с линеаризацией.

4. Описание динамики жесткого ротора в АМП как механической системы

Рассмотрим классический вариант описания колебательного движения вращающегося с постоянной угловой скоростью ротора в упруго-демпферных опорах, основанный на применении уравнений Лагранжа второго рода относительно независимых обобщенных механических координат [7]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial P}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_r} = Q_r \quad (r = 1, \dots, M), \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия, P – потенциальная энергия, q_r – обобщенные механические координаты, Q_r – непотенциальные обобщенные силы, \mathcal{R} – диссипативная функция, M – число обобщенных механических координат.

Рассмотрим форму представления математической модели в этом случае.

Вывод аналитических выражений выполним, например, для ротора центробежного компрессора газоперекачивающего агрегата в полном активном магнитном подвесе по всем пяти степеням свободы ротора как твердого тела. Схема данной системы представлена на рис. 7.

Рассмотрим ротор с дисками общей массой m и центром инерции (масс) в точке C , который вращается с постоянной угловой скоростью ω . Пусть точка O лежит на оси жесткости ротора в плоскости, содержащей точку C , и перпендикулярной этой оси. Введем правую прямоугольную систему координат O^*xuz – неподвижная система, ось O^*z которой проходит через центры опор ротора (радиальных АМП). Пусть главные центральные моменты инерции равны $J_1 = J_2$ (экваториальные) и J_3 (полярный), а динамическая неуравновешенность определяется параметрами – линейными $e_x = e_1$, $e_y = e_2$

(статическая) и угловыми $\gamma_x = \gamma_1, \gamma_y = \gamma_2$ (моментная неуравновешенность).

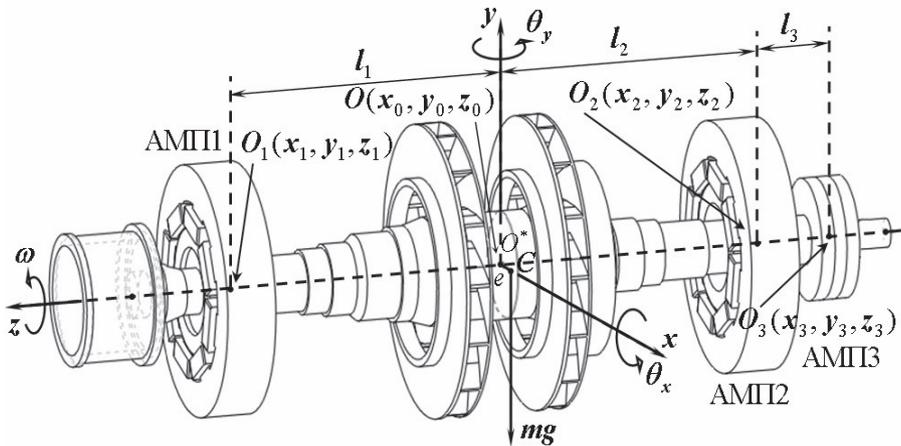


Рис. 7. Схема ротора центробежного компрессора в АМП

При записи уравнений движения ротора в АМП для достижения адекватности математической модели необходимо сохранение нелинейных членов относительно обобщенных координат и их производных порядков, согласованных со степенями полиномов аппроксимирующих силовые характеристики рассматриваемых АМП с учетом законов управления (см. п.3).

Тогда, используя выражения кинетической и потенциальной энергий, а также диссипативную функцию в виде однородной квадратичной формы обобщенных скоростей, и ограничившись членами первого, второго и третьего порядков относительно обобщенных координат, их производных и параметров неуравновешенности, легко показать, что нелинейные уравнения движения жесткого ротора в магнитных подшипниках имеют вид [8]:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_0 + b_{x_0}\dot{x}_0 + f_1''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) + f_1'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) = -\frac{\partial P}{\partial x_0} + Q_{x_0} + H_{x_0}(t) + \ddot{H}_{x_0}(t), \\ m\ddot{y}_0 + b_{y_0}\dot{y}_0 + f_2''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) + f_2'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) = -\frac{\partial P}{\partial y_0} + Q_{y_0} + \ddot{H}_{y_0}(t) + H_{y_0}(t), \\ m\ddot{z}_0 + b_{z_0}\dot{z}_0 + f_3''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) + f_3'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) = -\frac{\partial P}{\partial z_0} + Q_{z_0} + H_{z_0}(t), \\ J_e\ddot{\theta}_x + J_p\omega\dot{\theta}_y + b_{\theta_x}\dot{\theta}_x + f_4''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) + f_4'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) = -\frac{\partial P}{\partial \theta_x} + Q_{\theta_x} + M_{\theta_x}(t) + \ddot{M}_{\theta_x}(t), \\ J_e\ddot{\theta}_y - J_p\omega\dot{\theta}_x + b_{\theta_y}\dot{\theta}_y + f_5''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) + f_5'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y) = -\frac{\partial P}{\partial \theta_y} + Q_{\theta_y} + M_{\theta_y}(t) + \ddot{M}_{\theta_y}(t), \end{cases}$$

при $\ddot{H}_{x_0}(t) = m\omega^2(e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t), \ddot{M}_{\theta_x}(t) = (J_e - J_p)\omega^2(\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t),$ (2)

$\ddot{H}_{y_0}(t) = m\omega^2(e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t), \ddot{M}_{\theta_y}(t) = (J_e - J_p)\omega^2(\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t),$

где $q = (x_0, y_0, z_0, \theta_x, \theta_y)$ – вектор обобщенных координат; $f_i''; f_i''' (i=1..5)$ – функции второй и третьей степени относительно обобщенных координат и их производных, отражающие соответственно линейные, нелинейные силы и моменты, обусловленные силами инерции и потенциального поля; $H(t), M(t)$ – внешние возмущающие силы и моменты, зависящие от време-

ни, в которые не входят силы вызванные неуравновешенностью; Q_q – постоянные силы и моменты;

$-\partial P / \partial q_i$ – потенциальные силы, зависящие только от обобщенных механических координат – перемещений и углов поворота, к которым могут быть приведены силы в АМП с учетом принятого закона управления [6].

При сохранении в уравнениях членов высших порядков предположим, что все обобщенные координаты – перемещения и углы поворота ротора, параметры неуравновешенности, а также зазоры в АМП имеют одинаковый порядок малости, что и учтем при определении порядка малости членов уравнений и их исключении из рассмотрения.

Члены третьего порядка ввиду громоздкости записей здесь не приводятся, а члены второго порядка имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} f_{x_0}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= 0, \quad f_{y_0}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) = 0, \\ f_{z_0}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m \left([\ddot{\theta}_x - \omega^2 \theta_x + 2\omega \dot{\theta}_y] (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) - \right. \\ &\quad \left. - [\ddot{\theta}_y - \omega^2 \theta_y - 2\omega \dot{\theta}_x] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) \right), \quad (3) \\ f_{\theta_x}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m\ddot{z}_0 (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t), \\ f_{\theta_y}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m\ddot{z}_0 (-e_1 \cos \omega t + e_2 \sin \omega t). \end{aligned}$$

Применимость такого математического описания динамики жесткого ротора в магнитных подшипниках подтверждена сопоставлением численных результатов с экспериментальными данными [9]. Однако там же показано, что применение в модели силовых характеристик в зависимости только от перемещений не передает всех электромеханических процессов и их связи.

5. Описание динамики жесткого ротора в АМП как электромагнито-механической системы

Для описания взаимосвязи между механическими и электрическими обобщенными координатами к системе уравнений (2)

должна быть добавлена вторая группа уравнений, параметры которых будут зависеть от особенностей применяемых в системе АМП [10, 11].

В этом случае «ротор в АМП» как электромагнитная система описывается уравнениями Лагранжа–Максвелла, имеющими структуру уравнений механики [12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial(T + \tilde{W})}{\partial q_r} + \frac{\partial(P + V)}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_r} = Q_r \quad (r = 1, \dots, M) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial i_k} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial i_k} + \frac{\partial V}{\partial \chi_k} = E_k, \quad (k = 1, \dots, N) \end{array} \right. \quad (4)$$

где \tilde{W} – коэнергия магнитного поля [4], V – энергия электрического поля, $\tilde{\Psi}$ – электрическая диссипативная функция, E_k – алгебраическая сумма сторонних электродвижущих сил, i_k – контурные токи, χ_k – заряды конденсаторов, N – число замкнутых неразветвленных контуров.

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N R_{ks} i_k i_s, \quad (5)$$

где R_{ks} – активные сопротивления электрических цепей катушек АМП.

В случае, когда токи проводимости замкнуты и в электрических ветвях отсутствуют конденсаторы, электромеханические системы, кроме уравнений Лагранжа–Максвелла (4), могут описываться уравнениями, аналогичными уравнениям Рауса в механике [12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial P}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_r} = -\frac{\partial W}{\partial q_r} + Q_r \quad (r = 1, \dots, M) \\ \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \sum_{s=1}^N R_{cks} \frac{\partial W}{\partial \Psi_s} = E_k \quad (k = 1, \dots, N) \end{array} \right. \quad (6)$$

где W – энергия магнитного поля [4], Ψ_k – потокосцепления.

В этом случае в правые части системы уравнений (2) должны быть добавлены члены $P_q = -\partial W / \partial q_r$, которые представляют собой электромагнитные реакции подвеса, зависящие не только от обобщенных механических координат – перемещений и углов поворота, но и от обобщенных электрических координат – потокосцеплений или токов, а слагаемые $-\partial P / \partial q_r$ должны описывать все потенциальные силы в системе кроме реакций подвеса, если таковые имеются.

Для нахождения магнитных сил как через выражение для магнитной энергии (см. (4)), так и коэнергии (см. (6)), могут быть использованы эквивалентные схемы замещения электромагнитных цепей АМП, позволяющие определить магнитные потоки в участках этих цепей [9]. Расчет магнитных цепей АМП может быть выполнен на основе закона подобного второму закону Кирхгофа для электрических цепей с использованием схемы замещения. Применяя метод контурных потоков (аналог метода контурных токов), можно прийти к системе алгебраических уравнений относительно контурных потоков, через которые легко могут быть определены и потоки во всех ветвях. Тогда к системе дифференциальных уравнений (4) или (6) добавится эта система алгебраических уравнений.

Такой подход позволяет учесть кроме нелинейных эффектов и силы сопротивления, и запаздывание в данной электромеханической системе.

6. Выводы

Предложенные математические модели могут быть использованы в имитационных вычислительных моделях для численного изучения поведения жестких

роторов различных машин газотранспортных и газотурбинных установок, работающих как в докритической области, так и в закритической, при различных эксплуатационных режимах, а также для выбора параметров АМП, систем и алгоритмов управления, программ разгона ротора до рабочих оборотов вращения и его остановки.

Литература

1. Официальный сайт фирмы Societe de Mecanique Magnetique S2M (Франция): <http://www.s2m.fr>.
2. G. Schweitzer, H. Bleuler and A. Traxler Active magnetic bearings. –Zurich: ETH, 1994. –244 p.
3. Maslen E.H. Magnetic bearings. University of Virginia Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering Charlottesville, Virginia, 2000. –229 p.
4. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. –СПб.: Политехника, 2003. –206 с.
5. Мартыненко Г.Ю. Магнитные подшипники как упругодемпферные опоры роторов с управляемой жесткостью // Вісник НТУ «ХПИ». –Харків: НТУ «ХПИ», 2008. –№47. –С. 111–124.
6. Мартыненко Г.Ю. Определение силовых и жесткостных характеристик осевого активного магнитного подшипника при заданном законе управления // Вісник НТУ «ХПИ». –Харків: НТУ «ХПИ», 2008. –№36. –С. 133–141.
7. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. –М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1976. –432 с.
8. Мартыненко Г.Ю. Математическое описание динамического поведения ротора в магнитных подшипниках в зависимости от принятых упрощений (Часть 1. Жесткий ротор) // Вісник НТУ «ХПИ». –Харків: НТУ «ХПИ», 2009.
9. Мартыненко Г. Вибір способу математичного опису динаміки ротора в комбінованому магнітному підвісі на підставі експериментальних досліджень // Дев'ятий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Праці. –Львів: Кінпатрі Лтд., 2009. –С. 52-53.
10. Мартыненко Г.Ю. Уточнение математической модели ротора на ЭМП за счет определения магнитной проводимости зазоров под полюсами с учетом взаимовлияния смещений в радиальном и осевом направлениях // Вісник НТУ «ХПИ». –Харків: НТУ «ХПИ», 2006. –№32. –С. 179-192.
11. Мартыненко Г.Ю. Построение математической модели полного электромагнитного подвеса ротора с использованием взаимосвязанных магнитомеханических уравнений Рауса // Вісник НТУ «ХПИ». –Харків: НТУ «ХПИ», 2007. – №22. –С. 107-126.
12. Ходжаев К.Ш. Колебания нелинейных механических систем // Вибрации в технике. –М.: Машиностроение, 1979. –Т.2.–С. 331-347.