усложняется также разнородными противоречивыми критериями, определяющими эффективность АТ. Указанные трудности можно преодолеть только декомпозицией исходной модели на частные, следуя основным принципам декомпозиционного подхода, когда каждый предыдущий этап синтеза должен сужать область допустимых решений последующего этапа, а результаты, принятые на нижележащих уровнях, учитываются при коррекции решений вышележащих уровней.

Поэтому в дальнейшем необходима декомпозиция общей задачи на частные задачи — определение структуры АТ, оценка и выбор каждого ее блока и элемента САУ в отдельности, оценка и выбор связей между блоками АТ и элементами САУ. Эти задачи относятся к задачам структурного и параметрического синтеза.

Выводы

Разработана обобщенная модель, которая в отличие от существующих позволяет с единых критериальных позиций комплексно решить задачу системного синтеза АТ по многим критериям. Это дает возможность повысить эффективность и оперативность принимаемых решений при синтезе АТ за счет обоснованного выбора ее структуры, блоков АТ, элементов САУ и связей между ними.

Литература

1. Косенков А.А. Устройство автоматических коробок передач и трансмиссий / Серия «Библиотека автомобилиста». — Ростов н/Д: «Феникс», 2003. — 416 с.
2. http://www.hybrid-cars.ru
3. http://avtoavto.ru
4. Петров Е.Г., Новожилова М.В., Гребеннік І.В. методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах / За ред. Е.Г. Петрова. — К:Техніка, 2004 — 256 с.
5. Нефёдов Л.И., Стопченко Е.Г., Стопченко Г.И., Золотова Н.М. Принципы оптимальности методов многокритериальной оценки проектных решений при строительстве и реконструкции объектов городской системы. Коммунальное хозяйство городов Науч. техн. сб. – К.: Техніка. – 2002. –Вып. № 39.

УДК 519.85

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ В УСЛОВИЯХ МАЛОЙ ВЫБОРКИ

О.В. Серая
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра экономической кибернетики и маркетингового менеджмента*

Д.А. Дёмин
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра литейного производства*
*НТУ «Харьковский политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002

Розглянуто технологію ортогоналізації результатів пасивного експерименту. Для випадку малої вибірки спостережень запропонована процедура формування усіченого ортогонального реплікоподібного підплану, заснована на вирішенні тріаксіального булевого завдання призначення

Рассмотрена технология ортогонализации результатов пассивного эксперимента. Для случая малой выборки наблюдений предложена процедура формирования усеченного ортогонального репликоподобного подплана, основанная на решении триаксиальной булевой задачи назначения

We consider the technology orthogonalization results of passive experiment. For the case of a small sample of observations suggested procedure for the formation of a truncated orthogonal replikopodobnogo sub-plans based on the solution triaxial Boolean problem of destination

Введение

Многочисленные задачи исследования систем, функционирующих в условиях воздействия разнообразных факторов внешней среды, сводятся к установлению зависимости какого-либо результирующего критерия качества функционирования системы от численных значений влияющих факторов [1,2].

При этом предполагается, что известны результаты непосредственных измерений значений факторов и соответствующие значения функции отклика. Формальное описание соответствующей математической модели имеет следующий вид. Пусть результирующий параметр y (критерий эффективности) зависит от m влияющих факторов $F_1,F_2,...,F_m$ следующим образом

$$y = a_0 + a_1F_1 + ... + a_mF_m + a_{12}F_1F_2 + ... + a_{m-1,m}F_{m-1}F_m + ... + a_{12...m}F_1F_2...F_m. \quad (1)$$

По результатам непосредственных измерений значений факторов $F_1,F_2,...,F_m$ и определяющего параметра y в ряде из n опытов формируется матрица H и векторы A,Y

$$H = \begin{pmatrix} 1 & F_{11} & F_{12} & ... & F_{1m} & F_{11}F_{12} & ... & F_{11}F_{12}...F_{1m} \\ 1 & F_{21} & F_{21} & ... & F_{2m} & F_{21}F_{22} & ... & F_{21}F_{22}...F_{2m} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 1 & F_{n1} & F_{n2} & ... & F_{nm} & F_{n1}F_{n2} & ... & F_{n1}F_{n2}...F_{nm} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & ... & a_r & a_{12} & ... & a_{123...m} \end{pmatrix},$$
$$Y^T = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \end{pmatrix}.$$

Здесь

F_{ji} – значение i -го фактора в j -м эксперименте, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$,

y_j – результаты измерения результирующего параметра в j -м эксперименте, $j = 1,2,...,n$.

Далее искомый вектор A оценивается по методу наименьших квадратов (МНК). При этом функционал наименьших квадратов имеет вид

$$J = (HA - Y)^T (HA - Y), \quad (2)$$

а минимизирующий (1) вектор рассчитывается по формуле

$$A = (H^TH)^{-1} H^TY . \quad (3)$$

Как известно [3],приведенная схема хорошо работает, если количество экспериментов n надлежащим образом (приблизительно на порядок) превышает число оцениваемых компонентов уравнения регрессии (1), равное $N = \sum_{k=0}^{m} C_m^k = 2^m$. Ухудшение соотношения между числом оцениваемых коэффициентов и числом опытов приводит к негативным последствиям по следующим причинам. Во-первых, возрастают дисперсии оценки значений элементов вектора A , лежащие на главной диагонали ковариационной матрицы ошибок оценок

$$K = \sigma_0^2 (H^TH)^{-1},$$

где σ_0^2 – дисперсия измерения результирующего параметра y . Во-вторых, при этом снижается число степеней свободы l, равное разности между числом экспериментов и числом оцениваемых параметров, что приводит к расширению доверительных интервалов, накрывающих истинные значения коэффициентов уравнения регрессии. Следствием этого является увеличение вероятности принять гипотезу о незначимости факторов, для которых рассчитанные доверительные интервалы захватывают ноль. Таким образом, совокупное действие указанных причин в условиях дефицита исходных данных снижает адекватность модели (1).

Улучшение ситуации возможно либо при увеличении числа опытов, что на практике далеко не всегда может быть реализовано, либо за счет уменьшения числа оцениваемых параметров модели. При этом, понятно, шаблонное снижение размерности вектора путем упрощения модели едва ли приемлемо. Более перспективные возможности возникают при использовании искусственной ортогонализации результатов пассивного эксперимента, задаваемого матрицей H .

Постановка задачи

Совокупность результатов измерений факторов $F_1,F_2,...,F_m$ образует пассивный эксперимент. При этом соответствующая матрица H не является ортогональной, что исключает возможность независимого оценивания влияния каждого из факторов и их взаимодействий, обеспечивающего отсеивание мало значимых компонентов уравнения регрессии (1). Поставим задачу преобразования результатов измерений факторов таким образом, чтобы объединяющая их матрица была бы ортогональной.

Основные результаты

Вначале преводем масштабирование (нормировку) реальных измерений факторов к интервалу [-1;1] по формулам

$$X_{ji} = \frac{2F_{ji} - (F_{i\max} + F_{i\min})}{F_{i\max} - F_{i\min}}, \; i = 1,2,...,m, \; j = 1,2,...,n,$$
$$F_{i\max} = \max_j F_{ji}, \quad (3)$$
$$F_{i\min} = \min_j F_{ji}.$$

Далее в m -мерном пространстве факторов формируется гиперкуб с центром в начале координат и длиной ребер, равной двум. Понятно, что вершинам этого гиперкуба соответствует план полного факторного эксперимента. Теперь все множество результатов пассивного эксперимента разобьем на 2^m подмножеств $(E_1,E_2,...,E_N)$ по правилу

$$E_e = \left\{ j : \min_s \left(X_s^0 - X_j\right)^T \left(X_s^0 - X_j\right) = \left(X_e^0 - X_j\right)^T \left(X_e^0 - X_j\right) \right\}, \quad (4)$$

где

$X_j = (X_{j1}, X_{j2},..., X_{ji},..., X_{jm})$ - j -ая точка в нормированном пространстве факторов, $j = 1,2,...,n$;

X_s^0 - s -я вершина гиперкуба, $s = 1,2,...,N$.

Ясно, что точки, попавшие в E_e , лежат в e -ом гиперквадранте пространства факторов, примыкающем к вершине X_e^0 . Используем эти точки, пусть их число равно n_e , для локального описания функции отклика в пределах e -го гиперквадранта с помощью линейного по факторам уравнения регрессии

$$y_e = b_{e0} + b_{e1}F_1 + b_{e2}F_2 + \ldots + + b_{em}F_m , \quad (5)$$

параметры которого рассчитаем по формуле

$$B_e = \left(H_e^T H_e\right)^{-1} H_e^T Y_e \,, \tag{6}$$

$$H_e = \begin{pmatrix} 1 & F_{j_1 1} & F_{j_1 2} & \dots & F_{j_1 m} \\ 1 & F_{j_2 1} & F_{j_2 2} & \dots & F_{j_2 m} \\ - & - & - & - & - \\ 1 & F_{j_{n_e} 1} & F_{j_{n_t} 2} & \dots & F_{j_{n_e} m} \end{pmatrix}, B_e = \begin{pmatrix} b_{e0} \\ b_{e1} \\ \dots \\ b_{em} \end{pmatrix}, Y_e = \begin{pmatrix} y_{j1} \\ y_{j2} \\ \dots \\ y_{jn_e} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Применив процедуру (5)-(7) ко всем гиперквадрантам пространства факторов, получим кусочно-линейное описание функции отклика, составленное из гиперплоскостей. Наконец, рассчитаем значения функции отклика в точках, соответствующих вершинам гиперкуба. Совокупность этих значений образует план активного ортогонализованного полного факторного эксперимента (ОПФЭ). Используем принципиальное достоинство полученного ОПФЭ, состоящее в независимости оцениваемых параметров уравнения регрессии (1). Понятно, что реализация этой процедуры позволяет удалить из модели (1) все малозначимые факторы и взаимодействия, упрощая его структуру. В дальнейшем оценивание оставшихся регрессионных коэффициентов осуществляется по МНК с использованием всех измерений.

Осуществление идеи искусственной ортогонализации пассивного эксперимента может быть затруднено или даже оказаться невозможным по следующей причине. Положение точек реального эксперимента в факторном пространстве не управляется экспериментатором. Поэтому число этих точек в разных гиперквадрантах пространства может оказаться существенно различным. Вследствие этого точности оценивания значений функции отклика в точках ОПФЭ могут отличаться настолько, что эксперимент в целом будет неоднородным. Более того, может возникнуть ситуация, когда в некоторых подобластях факторного пространства процедура (5)-(7) окажется невыполнимой (число точек в подобласти слишком мало или их нет совсем). В этом случае план факторного эксперимента перестает быть полным и ортогональным. Естественный путь преодоления возникающих при этом трудностей состоит в попытке использования дробных реплик [4]. Можно попытаться отыскать среди множества планов дробных факторных экспериментов план, удовлетворяющий требованию однородности дисперсий в ортогональных точках. Однако реализация такой попытки на практике чрезвычайно затруднена, так как число различных дробных реплик очень велико (в частности, количество реплик дробности 2^{-k} определяется очевидным соотношением $N_m^{(k)} = 2^k C_{2^m-1}^k$. Поэтому простой перебор их нереализуем. Покажем, что репликоподобный симметричный относительно центра эксперимента ортогональный план может быть получен как результат решения некоторой многоиндексной задачи математического программирования.

Построение усеченного представительного ортогонального плана производится следующим образом. Пусть, по-прежнему, количество факторов равно m. Разобьем эту совокупность факторов на три подмножества $\{A,B,C\}$ по $p = \frac{m}{3}$ факторов в каждом, например, так

$$A = \{F_1, F_2, \dots, F_p\},$$
$$B = \{F_{p+1}, F_{p+2}, \dots, F_{2p}\},$$
$$C = \{F_{2p+1}, F_{2p+2}, \dots, F_{3p}\}.$$

Для дальнейшего применения удобно ввести независимую нумерацию факторов в этих подмножествах. Пусть

$$F_l^A = F_l\,, \quad F_l^B = F_{p+l}\,, \quad F_l^C = F_{2p+l}\,, \quad l = 1,2,\dots,p.$$

Сформируем ортогональный полный m-факторный план. Общее число экспериментов плана равно 2^m, а количество экспериментов, соответствующих всем возможным комбинациям уровней для факторов, входящих в любое из подмножеств, равно 2^p. Пронумеруем эти комбинации для факторов F_l^A, $l = 1,2,\dots,p$ индексом i_1, а для факторов подмножеств F_l^B, $l = 1,2,\dots,p$ и F_l^C, $l = 1,2,\dots,p$, соответственно индексами i_2 и i_3. Тогда любой строке плана может быть поставлена во взаимнооднозначное соответствие тройка ($i_1 \;\; i_2 \;\; i_3$). При этом ортогональный полный m-факторный план будет иметь вид (табл. 1).

Таблица 1

Полный ортогональный m-факторный план

Nп/п	i_1	i_2	i_3	F_1^A	F_2^A	...	F_p^A	F_1^B	F_2^B	...	F_p^B	F_1^C	F_2^C	...	F_p^C
1	1	1	1	-	-	...	-	-	-	...	-	-	-	...	-
2	1	1	2	-	-	...	-	-	-	...	-	-	-	...	+
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2^p	1	1	2^p	-	-	...	-	-	-	...	-	+	+	...	+
2^{p+1}	1	2	1	-	-	...	-	-	-	...	+	-	-	...	-
2^p	1	2	2	-	-	...	-	-	-	...	+	-	-	...	+
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2^{2p}	1	2^p	2^p	-	-	...	-	+	+	...	+	+	+	...	+
2^{2p+1}	2	1	1	-	-	...	+	-	-	...	-	-	-	...	-
2^{2p+2}	2	1	2	-	-	...	+	-	-	...	-	-	-	...	+
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2^{3p}	2^p	2^p	2^p	+	+	...	+	+	+	...	+	+	+	...	+

Множество комбинаций индексов $\{i_1 \;\; i_2 \;\; i_3\}$ может быть представлено в виде трехмерной решетки в 2^p узлами по каждой из трех координат. Введем параметр

$$Z_{i_1 i_2 i_3} = \begin{cases} 1, \text{если строка } (i_1, i_2, i_3) \text{ включена в эксперимент}, \\ 0 \text{ в противном случае}. \end{cases}$$

Понятно, что набор значений $\left\{Z_{i_1 i_2 i_3}\right\}$, $i_1 = 1,2,..,2^p$, $i_2 = 1,2,..,2^p$, $i_3 = 1,2,..,2^p$, однозначно определяет некоторый план эксперимента, содержащий число строк, равное числу единиц в наборе. Введем теперь следующую систему уравнений с булевыми переменными

$$\sum_{i_3=1}^{2^p} Z_{i_1 i_2 i_3} = 1, \quad i_1 = 1,2,\dots,2^p, i_2 = 1,2,\dots,2^p \quad , \tag{8}$$

$$\sum_{i_2=1}^{2^p} Z_{i_1 i_2 i_3} = 1, \quad i_1 = 1,2,\dots,2^p, i_3 = 1,2,\dots,2^p \quad , \tag{9}$$

$$\sum_{i_1=1}^{2^p} Z_{i_1 i_2 i_3} = 1, \quad i_2 = 1,2,\dots,2^p, i_3 = 1,2,\dots,2^p \quad . \tag{10}$$

Справедлива следующая теорема.

Любое решение системы уравнений (8)-(10) определяет симметричный ортогональный план эксперимента с числом строк, равным 2^{2p}.

Доказательство теоремы.

Фиксированной паре индексов i_1, i_2 соответствует фиксированный набор значений факторов из подмножеств A и B. Полному набору пар индексов $i_1 \in \{1,2,...,2^p\}$, $i_2 \in \{1,2,...,2^p\}$ соответствует ортогональный полный $2p$-факторный план для факторов ($F_1^A,...,F_p^A$; $F_1^B,...,F_p^B$) с числом строк, равным 2^{2p}. С другой стороны, фиксированной паре индексов i_1, i_2 соответствует 2^p значений индекса i_3, которые задают ортогональный p-факторный план для факторов ($F_1^C, F_2^C,..., F_p^C$). Если набор значений удовлетворяет ограничениям (8), то для каждой фиксированной пары i_1, i_2 из множества строк, соответствующих разным i_3, выделяется только одна. При этом, поскольку ограничения (8) удовлетворяются для всех возможных значений индексов i_1, i_2, то выделенные строки образуют ортогональный план для факторов из подмножеств A и B.

Это же рассуждение можно повторить для фиксированных пар i_1, i_3, а также для i_2, i_3. Отсюда следует, что если набор $\{Z_{i_1 i_2 i_3}\}$ одновременно удовлетворяет ограничениям (8)-(10), то выделяемый при этом набор строк определяет ортогональный план для факторов $(F_1, F_2,..., F_m)$, содержащий 2^{2p} строк, что и требовалось доказать.

Сформулируем теперь задачу выбора из множества возможных решений системы (8)-(10) такого, которому соответствует наиболее представительный план. Введем критерий представительности плана.

Выберем строку $i_1\ i_2\ i_3$ полного факторного эксперимента, номер которой V в сквозной нумерации равен $V = i_1 2^{2p} + i_2 2^p + i_3$.

В соответствии с (5), значение функции в V-й ортогональной точке и дисперсия этого значения определяется соотношением

$$y_{i_1 i_2 i_3} = y_V = b_{V0} + b_{V1} F_1^{(0)}(V) + b_{V2} F_2^{(0)}(V) + \dots + b_{Vm} F_m^{(0)}(V), \tag{11}$$

$$\sigma^2_{i_1 i_2 i_3} = \sigma^2_V = D(b_{V0}) + D(b_{V1})\left(F_1^{(0)}(V)\right)^2 + D(b_{V2})\left(F_2^{(0)}(V)\right)^2 + \dots + D(b_{Vm})\left(F_m^{(0)}(V)\right)^2, \tag{12}$$

Здесь

$F_i^{(0)}(V)$ - значение i-го фактора в V-й вершине гиперкуба,

$D(b_{Vi})$ - дисперсия ошибки оценивания i-го коэффициента V-го уравнения регрессии.

Так как $\left(F_i^{(0)}(V)\right)^2 \equiv 1$, $i = 1,2,...,m$, для всех вершин гиперкуба, то соотношение (12) упрощается к виду

$$\sigma^2_{i_1 i_2 i_3} = \sum_{i=0}^{m} D(b_{Vi}).$$

Заметим, что для расчета дисперсий ошибок коэффициентов уравнения регрессии в соответствующей подобласти вычисляют ковариационную матрицу ошибок оценок параметров уравнения регрессии (дисперсии ошибок параметров расположены на главной диагонали матрицы) по формуле:

$$\Psi = \sigma_V^2 (H_V^T H_V)^{-1},$$

где σ_V^2 – нормирующий для V-й области множитель, обратно пропорциональный количеству точек, попавших в эту подобласть. При этом, чем большим является разброс точек в подобласти, тем меньше будет значение дисперсии в соответствующей подобласти. Если же точки в подобласти расположены близко друг к другу или же их мало, то соответствующее значение дисперсии будет тем большим, чем ближе друг к другу будут находиться точки в подобласти.

Критерий представительности плана рассчитывается по формуле

$$\Phi = \sum_{i_1}^{2^p} \sum_{i_2}^{2^p} \sum_{i_3}^{2^p} \sigma^2_{i_1 i_2 i_3} Z_{i_1 i_2 i_3}, \tag{13}$$

которая задает суммарную дисперсию эксперимента, задаваемого выбранным набором $\{Z_{i_1 i_2 i_3}\}$. Поставим теперь задачу отыскания набора $\{Z_{i_1 i_2 i_3}\}$, удовлетворяющего (8)-(10) и минимизирующего дисперсию (13).

Эта задача является триаксиальной булевой задачей назначения и решается известными методами [5]. Для приближенного решения задачи такого типа в [3] предложен метод, основанный на использовании нормирующего эквивалентного преобразования. Соответствующий вычислительный алгоритм прост в реализации, однако, точность решения существенно ухудшается с увеличением размерности задач. Рассмотрим модификацию метода, повышающую его эффективность.

Нормирующим преобразованием для матрицы коэффициентов целевой функции триаксиальной задачи назначения является эквивалентное преобразование

$$c_{ijk}^{(0)} = c_{ijk} + \alpha_{ij} + \beta_{jk} + \gamma_{ik},\ i \in I = \{1,2,...,m\},\ j \in J = \{1,2,...,n\}, \quad k \in K = \{1,2,...,p\}, \tag{14}$$

такое, что

$$\left|c_{ij}^{(0)k}\right| = \left|c_{jk}^{(0)i}\right| = \left|c_{ik}^{(0)j}\right| = 0,$$

$$\left|c_{ij}^{(0)k}\right| = \sum_{k \in K} c_{ijk}^{(0)},\ \left|c_{jk}^{(0)i}\right| = \sum_{i \in I} c_{ijk}^{(0)},\ \left|c_{ik}^{(0)j}\right| = \sum_{j \in J} c_{ijk}^{(0)}. \tag{15}$$

В соответствии с (14)-(15), нормирующие коэффициенты $\alpha_{ij}, \beta_{jk}, \gamma_{ik}$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{p} (c_{ijk} + \alpha_{ij} + \beta_{jk} + \gamma_{ik}) = 0, i \in I, j \in J, \\ \sum_{i=1}^{m} (c_{ijk} + \alpha_{ij} + \beta_{jk} + \gamma_{ik}) = 0, j \in J, k \in K, \\ \sum_{j=1}^{n} (c_{ijk} + \alpha_{ij} + \beta_{jk} + \gamma_{ik}) = 0, i \in I, k \in K. \end{cases} \tag{16}$$

Решение системы может быть получено в явном виде.

Из (16) следует:

$$\begin{cases} \left|c_{ij}^{k}\right| + p\alpha_{ij} + \sum_{k=1}^{p}\beta_{jk} + \sum_{k=1}^{p}\gamma_{ik} = 0, \\ \left|c_{jk}^{i}\right| + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} + m\beta_{jk} + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik} = 0, \\ \left|c_{ik}^{j}\right| + \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\beta_{jk} + n\gamma_{ik} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Положим $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\beta_{jk} = 0,\ i = 1,2,..,m$. Тогда (17) упрощается к виду

$$\begin{cases} \left|c_{ij}^{k}\right| + p\alpha_{ij} + \sum_{k=1}^{p}\gamma_{ik} = 0,\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n, \\ \left|c_{jk}^{i}\right| + \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} + m\beta_{jk} + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik} = 0,\ j = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,p, \\ \left|c_{ik}^{j}\right| + \sum_{j=1}^{n}\beta_{jk} + n\gamma_{ik} = 0,\ i = 1,2,...,m,\ k = 1,2,...,p. \end{cases} \quad (18)$$

Суммируя обе части уравнений третьей группы из (18) по k, получим

$$\left|c_{i}^{kj}\right| + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\beta_{jk} + n\sum_{k=1}^{p}\gamma_{ik} = \left|c_{i}^{kj}\right| + n\sum_{k=1}^{p}\gamma_{ik} = 0 .$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{p}\gamma_{ik} = -\frac{\left|c_{i}^{kj}\right|}{n},\ i = 1,2,...,m. \quad (19)$$

Подставим (19) в первую группу уравнений в системе уравнений (18):

$$\left|c_{ij}^{k}\right| + p\alpha_{ij} - \frac{\left|c_{i}^{kj}\right|}{n} = 0 .$$

Отсюда

$$\alpha_{ij} = -\frac{\left|c_{ij}^{k}\right|}{p} + \frac{\left|c_{i}^{jk}\right|}{np},\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n. \quad (20)$$

Просуммируем теперь обе части соотношений (20) по i:

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij} = -\frac{\left|c_{j}^{ik}\right|}{p} + \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}c_{ijk} = -\frac{\left|c_{j}^{ik}\right|}{p} + \frac{c_0}{np},\ j = 1,2,...,n. \quad (21)$$

Подставим (21) в уравнения второй группы из системы (18):

$$\left|c_{jk}^{i}\right| - \frac{\left|c_{j}^{ik}\right|}{p} + \frac{c_0}{np} + m\beta_{jk} + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik} = 0,\ j = 1,2,...,n, \quad k = 1,2,...,p . \quad (22)$$

Просуммируем теперь обе части соотношений (19) по i:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\gamma_{ik} = -\frac{c_0}{n} . \quad (23)$$

Значения γ_{ik} выберем так, чтобы выполнялось соотношение $\sum_{i=1}^{m}\gamma_{i1} = \sum_{i=1}^{m}\gamma_{i2} = ... = \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ip}$. Тогда, с учетом (23), имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik} = -\frac{c_0}{np}, \quad k = 1,2,...,p . \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22), получим выражение для β_{jk}:

$$\beta_{jk} = -\frac{\left|c_{k}^{ij}\right|}{m} + \frac{\left|c_{j}^{ik}\right|}{mp},\ j = 1,2,...,n, \quad k = 1,2,...,p . \quad (25)$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk} = -\frac{\left|c_{k}^{ij}\right|}{m} + \frac{c_0}{mp}, \quad k = 1,2,...,p . \quad (26)$$

Подставляя (26) в уравнения третьей группы из системы (18), получим

$$\gamma_{ik} = -\frac{\left|c_{ik}^{j}\right|}{n} + \frac{\left|c_{k}^{ij}\right|}{mn} - \frac{c_0}{mnp},\ i = 1,2,...,m, \quad k = 1,2,...,p .$$

Таким образом,

$$c_{ijk}^{(0)} = c_{ijk} - \frac{\left|c_{ij}^{k}\right|}{p} - \frac{\left|c_{jk}^{i}\right|}{m} - \frac{\left|c_{ik}^{j}\right|}{n} + \frac{\left|c_{i}^{jk}\right|}{np} + \frac{\left|c_{j}^{ik}\right|}{mp} + \frac{\left|c_{k}^{ij}\right|}{mn} - \frac{c_0}{mnp}, \quad .$$

$$i \in I, j \in J, k \in K.$$

Для триаксиальной задачи назначения $m = p = n$, поэтому

$$c_{ijk}^{(0)} = c_{ijk} - \frac{\left|c_{ij}^{k}\right| + \left|c_{jk}^{i}\right| + \left|c_{ik}^{j}\right|}{n} + \frac{\left|c_{i}^{jk}\right| + \left|c_{j}^{ik}\right| + \left|c_{k}^{ij}\right|}{n^2} - \frac{c_0}{n^3} . \quad (27)$$

Процедура приближенного решения триаксиальной задачи назначения содержит n -1 однотипных шагов, на q -м из которых необходимо выполнить следующие операции.

• Осуществить нормирующее эквивалентное преобразование (27).

• Решить $n - q + 1$ двухиндексных задач назначения:

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ijk}^{(q-1)}x_{ijk}\right\};$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ijk} = 1,\ \ i = 1,2,...,n, \quad \sum_{i=1}^{m}x_{ijk} = 1,\ \ j = 1,2,...,n,$$

$$x_{ijk} \in \{0;1\},\ \ i = 1,2,...,n,\ \ j = 1,2,...,n, \quad (28)$$

$$k = 1,2,...,n,\ k \in K_{q-1},\ \ K_0 = K.$$

Пусть $\tilde{X}_k = \{\tilde{x}_{ijk}\}$ - решение k -й задачи (28).

• Найти

$$\max_{k \in K_{q-1}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ijk}\tilde{x}_{ijk}\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ijk^*}\tilde{x}_{ijk^*}^{(q)} . \quad (29)$$

• Положить $x_{ijk^*}^{(q)} = \tilde{x}_{ijk^*}, k = k^*,\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2,...,n.$

• Исключить из матрицы $\{c_{ijk}\}$ двумерное сечение $C_{k^*} = \{c_{ijk^*}\}$.

• Осуществить коррекцию матрицы $\{c_{ijk}\}$, вводя запреты в колонки, соответствующие ненулевым компонентам плана $\{x^{(q)}_{ijk^*}\}$, по формуле

$$c^{(q)}_{ijk} = \begin{cases} c^{(q)}_{ijk}, (ij) \notin M_q; \\ \infty, (ij) \in M_q, \end{cases} \quad M_q = \left\{(ij) : \tilde{x}^{(q)}_{ijk^*} = 1\right\}.$$

• Исключить индекс k^* из множества индексов K_{q-1} и перейти к очередному шагу.

В результате проведения $(n-1)$-го шагов вычислительной процедуры множество индексов разрешенных сечений K_{n-1} будет содержать $n-1$ компонент.

Решение последней задачи назначения однозначно определяется соотношениями (28) и (29) и результатами $(n-1)$ -го предыдущих шагов.

Пусть в результате проведения n шагов получен план $\{X^{(1)}_{ijk}\}$. Первый этап завершен.

На втором этапе описанная выше технология применяется по отношению к совокупности фронтальных сечений $C^{jk}_i, i = 1, 2, ..., n$. Получаемый в результате план обозначим $\{X^{(2)}_{ijk}\}$. Наконец, на третьем этапе, точно так же решается совокупность задач для сечений C^{ik}_j до получения плана $\{X^{(3)}_{ijk}\}$. Теперь в качестве искомого приближенного решения задачи используется план $\{X^{(l^*)}_{ijk}\}$, для которого:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ijk} X^{(l^*)}_{ijk} = \min_{l}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ijk} X^{(l)}_{ijk}\right\}.$$

Многочисленные примеры решения задач с использованием описанной методики подтверждают ее высокую эффективность.

Описанная методика формирования репликоподобного ортогонального плана дробности 2^{-p} обладает тем свойством, что суммарная дисперсия соответствующего ему плану эксперимента является минимальной. Заметим, что результаты всех реальных опытов, не вошедших в отобранные для усеченного плана гиперквадранты, могут и должны быть использованы. Соответствующие точки присоединяются к выделенным подмножествам по правилу (24). Для наиболее адекватного описания модели целесообразно присоединить практически все точки, не попавшие в усеченный план, что существенно повысит точность последующего прогноза.

Выводы

Таким образом, предложенная технология обработки результатов пассивного эксперимента обеспечивает возможность установления связи между значениями некоторого определяющего параметра исследуемой сложной системы и большим числом предположительно влияющих факторов, в ситуации, когда общее число опытов недостаточно для построения адекватной модели. Преобразование пассивного эксперимента в активный с последующим формированием репликоподобного ортогонального представительного подплана позволяет осуществить независимое отсеивание малозначимых факторов и взаимодействий, что упрощает структуру оцениваемого уравнения регрессии и повышает его точность.

Литература

1. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ: Пер. с англ. – М.: МИР, 1980. – 456с.
2. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. –М.: Финансы и статистика, 1981. – 289с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики: Пер. с англ. – М.: МИР, 1975. – 576с.
4. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 312с.
5. Раскин Многоиндексные задачи линейного программирования /Л.Г. Раскин, И.О Кириченко. – М.: Радио и связь, 1982. -240с.