Досліджується структура результуючих матриць, виділяються симетричні та кососиметричні складові, знаходяться матриці, які є еквівалентними і не еквівалентними кватерніонам. Для мультиплікативних композицій кватерніоних матриць встановлюються правила повного, внутрішнього та зовнішнього транспонування, визначаються комутативні, ортогональні та обернені матриці

Ключові слова: кватерніоні матриці, мультиплікативін композиції, таблиця множення, обернені матриці, транспонування, комутативність, ортогональність

Исследуется структура результирующих матриц, выделяются симметричные и кососимметричные составляющие, находятся матрицы эквивалентные и не эквивалентные кватернионам. Для мультипликативных композиций кватернионных матриц устанавливаются правила полного, внутреннего и внешнего транспонирования, определяются коммутативные, ортогональные, обратные матрицы

Ключевые слова: кватернионные матрицы, мультипликативные композиции, таблица умножения, обратные матрицы, транспонирование, коммутативность, ортогональность

The structure of output matrices is analyzed and symmetrical and skew-symmetrical parts are singled out. Matrices equivalent and not equivalent to quaternion are found. Rules of full, internal and external transposition are determined for multiplicative compositions of quaternionic matrices. Commutative, orthogonal and inverse matrices are determined

Key words: quaternionic matrices, multiplicative compositions, multiplication table, inverse matrices, transposition, commutativity, orthogonality

УДК 514.74:531.3

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ КОМПОЗИЦИИ МАТРИЦ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ РАВНЫМ И СОПРЯЖЕННЫМ КВАТЕРНИОНАМ

В.В. Кравец
Доктор технических наук, профессор
Кафедра «Специализированные компьютерные системы»
Украинский государственный химико-технологический университет
пр. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, Украина, 49005

Т.В. Кравец
Ассистент
Кафедра «Теоретическая механика»*

А.В. Харченко
Аспирант
Кафедра «Прикладная математика»*
Контактный тел.: 050-321-14-60
E-mail: caxon@mail.ru
*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна
ул. Лазаряна, 2, г. Днепропетровск, Украина, 49010

Введение

Обоснование актуальности фундаментальной разработки отдельных элементов исчисления кватернионных матриц и сферы их возможного применения приводились в [9, 10], что является систематическим дополнением известных фундаментальных результатов [1, 3, 11, 12, 14]. Иллюстрацией эффективного использования этого математического аппарата могут служить работы [4, 5, 6, 7, 8, 13, 15], где кватернионные матрицы применены как удобный инструмент аналитических преобразований при построении математических моделей инерциальной навигации, нелинейной динамики сложных механических систем в пространственном движении.

Постановка задачи

Исследуются структура и свойства шестнадцати всевозможных пар произведений кватернионных матриц (мультипликативных композиций), состоящих из двух матриц, эквивалентных равным кватернионам и двух матриц, эквивалентных равным и сопряженным кватернионам [10]. Для введенной совокупности четырех кватернионных матриц находятся обратные, ортогональные, коммутативные. Устанавливаются правила полного, внутреннего и внешнего транспонирования для всевозможных пар произведений четырех кватернионных матриц. Исследуется структура результирующих матриц, выделяются симметричные и кососимметричные составляющие.

Решение задачи

Искомые мультипликативные композиции пар четырех кватернионных матриц, эквивалентных кватерниону A, ${}^tA$, и сопряженному кватерниону ${}^tA^t$, A^t исследуются на основе свойств соответствующих базисных матриц E_i ${}^tE_i^t$ ${}^tE_i$ E_i^t E_0 I ($i=1,2,3$) [10]. Свойства базисных матриц таковы, что среди них имеются ортогональные, коммутативные, аддитивнообратные, мультипликативнообратные и другие. Свойства базисных матриц отображаются в свойствах всевозможных мультипликативных композиций пар кватернионных матриц, эквивалентных равным и сопряженным кватернионам. Исходные четыре кватернионные матрицы определяют шестнадцать всевозможных произведений следующих видов:

$$\begin{matrix} A\cdot{}^tA^t & {}^tA^t\cdot A & {}^tA\cdot A^t & A^t\cdot{}^tA \\ A\cdot A & {}^tA^t\cdot{}^tA^t & {}^tA\cdot{}^tA & A^t\cdot A^t \\ A\cdot A^t & {}^tA^t\cdot{}^tA & {}^tA\cdot{}^tA^t & A^t\cdot A \\ A\cdot{}^tA & {}^tA^t\cdot A^t & {}^tA\cdot A & A^t\cdot{}^tA^t \end{matrix}$$

Коммутативность

Из коммутативности базисных матриц устанавливаются следующие коммутативные произведения матриц, эквивалентных равным и сопряженным кватернионам:

$A\cdot{}^tA^t={}^tA^t\cdot A$, ${}^tA\cdot A^t=A^t\cdot{}^tA$,
$A\cdot A^t=A^t\cdot A$ ${}^tA^t\cdot{}^tA={}^tA\cdot{}^tA^t$,
$A\cdot{}^tA={}^tA\cdot A$, ${}^tA^t\cdot A^t=A^t\cdot{}^tA^t$.

В качестве примера приведем доказательство коммутативности матриц A и A^t, т.е. $A\cdot A^t=A^t\cdot A$. Произведение $A\cdot A^t$ согласно [10] представим в виде:

$$A\cdot A^t=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} E_0 & E_1^t & E_2^t & E_3^t \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}.$$

Для диадного произведения базисных матриц получим:

$$A\cdot A^t=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0\cdot E_0 & E_0\cdot E_1^t & E_0\cdot E_2^t & E_0\cdot E_3^t \\ E_1\cdot E_0 & E_1\cdot E_1^t & E_1\cdot E_2^t & E_1\cdot E_3^t \\ E_2\cdot E_0 & E_2\cdot E_1^t & E_2\cdot E_2^t & E_2\cdot E_3^t \\ E_3\cdot E_0 & E_3\cdot E_1^t & E_3\cdot E_2^t & E_3\cdot E_3^t \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}$$

Далее переходим к эквивалентной записи произведения:

$$A\cdot A^t=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0\cdot E_0 & E_1\cdot E_0 & E_2\cdot E_0 & E_3\cdot E_0 \\ E_0\cdot E_1^t & E_1\cdot E_1^t & E_2\cdot E_1^t & E_3\cdot E_1^t \\ E_0\cdot E_2^t & E_1\cdot E_2^t & E_2\cdot E_2^t & E_3\cdot E_2^t \\ E_0\cdot E_3^t & E_1\cdot E_3^t & E_2\cdot E_3^t & E_3\cdot E_3^t \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}$$

Из коммутативности базисных матриц следует:

$$A\cdot A^t=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0\cdot E_0 & E_0\cdot E_1 & E_0\cdot E_2 & E_0\cdot E_3 \\ E_1^t\cdot E_0 & E_1^t\cdot E_1 & E_1^t\cdot E_2 & E_1^t\cdot E_3 \\ E_2^t\cdot E_0 & E_2^t\cdot E_1 & E_2^t\cdot E_2 & E_2^t\cdot E_3 \\ E_3^t\cdot E_0 & E_3^t\cdot E_1 & E_3^t\cdot E_2 & E_3^t\cdot E_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}$$

Откуда:

$$A\cdot A^t=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0 \\ E_1^t \\ E_2^t \\ E_3^t \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix},$$

т.е. $A\cdot A^t=A^t\cdot A$.

Справедливость коммутативных произведений:
$A\cdot{}^tA^t={}^tA^t\cdot A$, ${}^tA\cdot A^t=A^t\cdot{}^tA$,
$A\cdot A^t=A^t\cdot A$, ${}^tA^t\cdot{}^tA={}^tA\cdot{}^tA^t$,
$A\cdot{}^tA={}^tA\cdot A$, ${}^tA^t\cdot A^t=A^t\cdot{}^tA^t$ доказывается аналогично.

Структура

Структура результирующих матриц приведенных шестнадцати всевозможных произведений кватернионных матриц исследуется с помощью соответствующих таблиц умножения базисных матриц [10]. В качестве примера рассматривается произведение матриц вида $A\cdot{}^tA^t$. Учитывая, что матрицы представимы в следующей записи:

$$A=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Vmatrix},\ {}^tA^t=\begin{Vmatrix} E_0 & {}^tE_1^t & {}^tE_2^t & {}^tE_3^t \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix},$$

получим:

$$A\cdot{}^tA^t=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} E_0 & {}^tE_1^t & {}^tE_2^t & {}^tE_3^t \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}.$$

Воспользовавшись таблицей умножения группы для базисных матриц E_i ${}^tE_i^t$ E_0 I ($i=1,2,3$), найдем:

$$A\cdot{}^tA^t=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0 & {}^tE_1^t & {}^tE_2^t & {}^tE_3^t \\ E_1 & E_0 & {}^tE_3^t & E_2 \\ E_2 & E_3 & E_0 & {}^tE_1^t \\ E_3 & {}^tE_2^t & E_1 & E_0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix},$$

и принимая во внимание свойства аддитивной обратности базисных матриц, т.е. ${}^tE_i^t=-E_i$ и $I=-E_0$, получим:

$$A\cdot{}^tA^t=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & E_0 & -E_3 & E_2 \\ E_2 & E_3 & E_0 & -E_1 \\ E_3 & -E_2 & E_1 & E_0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix},$$

т.е. структура результирующей матрицы определяется базисом E_i в виде:

$$A\cdot{}^tA^t=\|a_0\quad a_1\quad a_2\quad a_3\|\begin{Vmatrix}a_0&-a_1&-a_2&-a_3\\a_1&a_0&a_3&-a_2\\a_2&-a_3&a_0&a_1\\a_3&a_2&-a_1&a_0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}E_0\\E_1\\E_2\\E_3\end{Vmatrix}.$$

Здесь компоненты искомой результирующей кватернионной матрицы имеют структуру, определяемую базисом E_i, и принимают простейшую форму в силу того, что

$$\|a_0\quad a_1\quad a_2\quad a_3\|\begin{Vmatrix}a_0&-a_1&-a_2&-a_3\\a_1&a_0&a_3&-a_2\\a_2&-a_3&a_0&a_1\\a_3&a_2&-a_1&a_0\end{Vmatrix}=\|a^2\quad 0\quad 0\quad 0\|,$$

где a^2 обозначает норму кватерниона:

$$a^2=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2.$$

Вводя матрицу строку $a^t=\|a_0\quad a_1\quad a_2\quad a_3\|$, представим полученную формулу лаконичной записью

$$a^t\cdot{}^tA^t=a^2\|1\quad 0\quad 0\quad 0\|.$$

Откуда следует:

$$A\cdot{}^tA^t=a^2\|1\quad 0\quad 0\quad 0\|\begin{Vmatrix}E_0\\E_1\\E_2\\E_3\end{Vmatrix},$$

т.е. $A\cdot{}^tA^t=a^2E_0$.

Учитывая коммутативность матриц A и ${}^tA^t$, получим ${}^tA^t\cdot A=a^2E_0$. Аналогичным образом показывается ${}^tA\cdot A^t=a^2E_0$, а также $A^t\cdot{}^tA=a^2E_0$. Следовательно, устанавливаем:

$$A\cdot{}^tA^t={}^tA^t\cdot A={}^tA\cdot A^t=A^t\cdot{}^tA.$$

Развернем произведение $A\cdot A$ в виде:

$$A\cdot A=\|a_0\quad a_1\quad a_2\quad a_3\|\begin{Vmatrix}E_0\\E_1\\E_2\\E_3\end{Vmatrix}\cdot\|E_0\quad E_1\quad E_2\quad E_3\|\begin{Vmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{Vmatrix}.$$

Воспользовавшись таблицей умножения группы для базисных матриц E_i ${}^tE_i^t$ E_0 I ($i=1,2,3$) и принимая во внимание, что ${}^tE_i^t=-E_i$ и $I=-E_0$, найдем:

$$A\cdot A=\|a_0\quad a_1\quad a_2\quad a_3\|\begin{Vmatrix}E_0&E_1&E_2&E_3\\E_1&-E_0&E_3&-E_2\\E_2&-E_3&-E_0&E_1\\E_3&E_2&-E_1&-E_0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{Vmatrix}$$

Полученная результирующая матрица может быть представлена в виде кватернионной матрицы, имеющей структуру соответствующую базису E_i:

$$A\cdot A=\|a_0\quad a_1\quad a_2\quad a_3\|\begin{Vmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\-a_1&a_0&-a_3&a_2\\-a_2&a_3&a_0&-a_1\\-a_3&-a_2&a_1&a_0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}E_0\\E_1\\E_2\\E_3\end{Vmatrix},$$

а также:

$$A\cdot A=\|E_0\quad E_1\quad E_2\quad E_3\|\begin{Vmatrix}a_0&-a_1&-a_2&-a_3\\a_1&a_0&-a_3&a_2\\a_2&a_3&a_0&-a_1\\a_3&-a_2&a_1&a_0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{Vmatrix},$$

или в принятых обозначениях:

$$A\cdot A=a^t\cdot A\begin{Vmatrix}E_0\\E_1\\E_2\\E_3\end{Vmatrix},\quad A\cdot A=\|E_0\quad E_1\quad E_2\quad E_3\|\cdot{}^tA\cdot a,$$

где компоненты результирующей матрицы r_j ($j=0,1,2,3$) определяются матрицей строкой $r^t=a^t\cdot A$ или матрицей столбцом $r={}^tA\cdot a$. В развернутой записи соответственно получим:

$$r^t=\|a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2\quad 2a_0a_1\quad 2a_0a_2\quad 2a_0a_3\|$$

или

$$r=\begin{Vmatrix}a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2\\2a_0a_1\\2a_0a_2\\2a_0a_3\end{Vmatrix}.$$

Тогда результирующая кватернионная матрица R, определяемая базисом E_i, имеет вид:

$$R=\begin{Vmatrix}a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2&2a_0a_1&2a_0a_2&2a_0a_3\\-2a_0a_1&a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2&-2a_0a_3&2a_0a_2\\-2a_0a_2&2a_0a_3&a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2&-2a_0a_1\\-2a_0a_3&-2a_0a_2&2a_0a_1&a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2\end{Vmatrix}$$

т.е. $A\cdot A=R$,

а также

$$A\cdot A=\left(a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)E_0+2a_0a_1E_1+2a_0a_2E_2+2a_0a_3E_3$$

или

$$A\cdot A=2a_0A-a^2E_0$$

Принимая во внимание, что базисные матрицы E_i кососимметричны, не трудно выделить в результирующей матрице R кососимметричную $2a_0a_1E_1+2a_0a_2E_2+2a_0a_3E_3$ и симметричную $\left(a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)E_0$ составляющие. Искомое произведение $A\cdot A$ имеет также иную форму представления, учитывая:

$$A\begin{Vmatrix}E_0\\E_1\\E_2\\E_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}AE_0\\AE_1\\AE_2\\AE_3\end{Vmatrix},$$

$$\|E_0\quad E_1\quad E_2\quad E_3\|{}^tA=\|E_0\cdot{}^tA\quad E_1\cdot{}^tA\quad E_2\cdot{}^tA\quad E_3\cdot{}^tA\|$$

где

$$AE_0 = A, \qquad E_0\,{}^tA = {}^tA$$

$$AE_1 = \begin{Vmatrix} -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \end{Vmatrix}; \quad E_1\cdot{}^tA = \begin{Vmatrix} a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & -a_0 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \end{Vmatrix};$$

$$AE_2 = \begin{Vmatrix} -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & -a_2 & -a_1 & a_0 \\ -a_0 & a_1 & -a_2 & a_3 \\ -a_1 & -a_0 & -a_3 & -a_2 \end{Vmatrix}; \quad E_2\cdot{}^tA = \begin{Vmatrix} a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \\ -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & -a_0 & a_3 & -a_2 \end{Vmatrix};$$

$$AE_3 = \begin{Vmatrix} -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \\ -a_2 & -a_3 & -a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & -a_2 \\ -a_0 & a_1 & a_2 & -a_3 \end{Vmatrix}; \quad E_3\cdot{}^tA = \begin{Vmatrix} a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \\ -a_2 & -a_3 & -a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}.$$

т.е.

$$A\cdot A = a_0\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix} + a_1\begin{Vmatrix} -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_0 & -a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \end{Vmatrix} +$$

$$+a_2\begin{Vmatrix} -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & -a_2 & -a_1 & a_0 \\ -a_0 & a_1 & -a_2 & a_3 \\ -a_1 & -a_0 & -a_3 & -a_2 \end{Vmatrix} + a_3\begin{Vmatrix} -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \\ -a_2 & -a_3 & -a_0 & -a_1 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & -a_2 \\ -a_0 & a_1 & a_2 & -a_3 \end{Vmatrix};$$

или

$$A\cdot A = a_0\begin{Vmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix} + a_1\begin{Vmatrix} a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & -a_0 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \end{Vmatrix} +$$

$$+a_2\begin{Vmatrix} a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \\ -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & -a_0 & a_3 & -a_2 \end{Vmatrix} + a_3\begin{Vmatrix} a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \\ -a_2 & -a_3 & -a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}.$$

К аналогичным результатам приводит рассмотрение произведений вида ${}^tA^t\cdot{}^tA^t, {}^tA\cdot{}^tA, \quad A^t\cdot A^t$, т.е

$${}^tA^t\cdot{}^tA^t = 2a_0\,{}^tA^t - a^2E_0$$
$${}^tA\cdot{}^tA = 2a_0\,{}^tA - a^2E_0$$
$$A^t\cdot A^t = 2a_0A^t - a^2E_0$$

или

$${}^tA^t\cdot{}^tA^t = \left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)E_0 +$$
$$+2a_0a_1\,{}^tE_1^t + 2a_0a_2\,{}^tE_2^t + 2a_0a_3\,{}^tE_3^t$$
$${}^tA\cdot{}^tA = \left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)E_0 +$$
$$+2a_0a_1\,{}^tE_1 + 2a_0a_2\,{}^tE_2 + 2a_0a_3\,{}^t]$$
$$A^t\cdot A^t = \left(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)E_0 +$$
$$+2a_0a_1E_1^t + 2a_0a_2E_2^t + 2a_0a_3E_3^t$$

Итак, результирующие матрицы рассмотренных мультипликативных композиций являются кватернионными:

$$A\cdot A = R,\ {}^tA^t\cdot{}^tA^t = {}^tR^t,\ {}^tA\cdot{}^tA = {}^tR,\ A^t\cdot A^t = R^t.$$

Далее, рассматривая произведение вида $A\cdot{}^tA$, получим:

$$A\cdot{}^tA = a^t\begin{Vmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} E_0 & {}^tE_1 & {}^tE_2 & {}^tE_3 \end{Vmatrix}a$$

Здесь необходимо использовать таблицу умножения группы 32-го порядка [9], содержащую исходные базисные матрицы $E_i \quad {}^tE_i^t \quad {}^tE_i \quad E_i^t \quad E_0 \quad I$. С помощью этой таблицы получаем:

$$A\cdot{}^tA = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E_0 & {}^tE_1 & {}^tE_2 & {}^tE_3 \\ E_1 & R_0 & A_3 & \bar{S}_2 \\ E_2 & T_3 & S_0 & A_1 \\ E_3 & A_2 & \bar{R}_1 & \bar{T}_0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}$$

или

$$A\cdot{}^tA = a_0\left(E_0a_0 + {}^tE_1a_1 + {}^tE_2a_2 + {}^tE_3a_3\right) +$$
$$+a_1\left(E_1a_0 + R_0a_1 + A_3a_2 + \bar{S}_2a_3\right) +$$
$$+a_2\left(E_2a_0 + T_3a_1 + S_0a_2 + A_1a_3\right) +$$
$$+a_3\left(E_3a_0 + A_2a_1 + \bar{R}_1a_2 + \bar{T}_0a_3\right);$$

а также

$$A\cdot{}^tA = a_0\left(E_0a_0 + E_1a_1 + E_2a_2 + E_3a_3\right) +$$
$$+a_1\left({}^tE_1a_0 + R_0a_1 + T_3a_2 + A_2a_3\right) +$$
$$+a_2\left({}^tE_2a_0 + A_3a_1 + S_0a_2 + \bar{R}_1a_3\right) +$$
$$+a_3\left({}^tE_3a_0 + \bar{S}_2a_1 + A_1a_2 + \bar{T}_0a_3\right).$$

Из этой записи видно, что результирующая матрица не представляется структурой, соответствующей базисным матрицам $E_i \quad {}^tE_i^t \quad {}^tE_i \quad E_i^t \quad E_0 \quad I$, т.е. результатом произведения $A\cdot{}^tA$ является матрица, не эквивалентная кватерниону. При изучении структуры результирующей матрицы $A\cdot{}^tA$ следует принять во внимание, что матрицы $E_0,R_0,S_0,\bar{T}_0,A_3,\bar{S}_2,T_3,A_1,A_2,\bar{R}_1$ являются симметричными, а $E_1,E_2,E_3,{}^tE_1,{}^tE_2,{}^tE_3$ - кососимметричными.

Тогда в результирующей матрице нетрудно выделить симметричную составляющую

$$a_0^2E_0 + a_1^2R_0 + a_2^2S_0 + a_3^2\bar{T}_0 + a_1a_2A_3 + a_1a_3\bar{S}_2 +$$
$$+a_1a_2T_3 + a_2a_3A_1 + a_1a_3A_2 + a_2a_3\bar{R}_1$$

и кососимметричную

$$a_0a_1E_1 + a_0a_2E_2 + a_0a_3E_3 + a_0a_1\,{}^tE_1 + a_0a_2\,{}^tE_2 + a_0a_3\,{}^tE_3$$

или в развернутой записи для симметричной формы имеем:

$$a^2E_0 + 2\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(a_2^2 + a_3^2\right) & a_1a_2 & a_1a_3 \\ 0 & a_1a_2 & -\left(a_1^2 + a_3^2\right) & a_2a_3 \\ 0 & a_1a_3 & a_2a_3 & -\left(a_1^2 + a_2^2\right) \end{Vmatrix},$$

и соответственно для кососимметричной:

$$2\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_0a_3 & a_0a_2 \\ 0 & a_0a_3 & 0 & -a_0a_1 \\ 0 & -a_0a_2 & a_0a_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В окончательной записи структура и содержание результирующей матрицы $A\cdot{}^tA$ определяется формой, не являющейся кватернионной, т.е.:

$$A\cdot{}^tA=Q,$$

где

$$Q=\begin{Vmatrix} a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2 & 2(a_1a_2-a_0a_3) & 2(a_0a_2+a_1a_3) \\ 0 & 2(a_0a_3+a_1a_2) & a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2 & 2(a_2a_3-a_0a_1) \\ 0 & 2(a_1a_3-a_0a_2) & 2(a_0a_1+a_2a_3) & a_0^2-a_1^2-a_2^2+a_3^2 \end{Vmatrix}$$

Вводя следующие матрицы

$$a_0\,{}^tE_1+a_1R_0+a_2T_3+a_3A_2=\begin{Vmatrix} a_1 & -a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & -a_0 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \end{Vmatrix};$$

$$a_0\,{}^tE_2+a_1A_3+a_2S_0+a_3\bar{R}_1=\begin{Vmatrix} a_2 & -a_3 & -a_0 & a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & -a_0 & a_3 & -a_2 \end{Vmatrix};$$

$$a_0\,{}^tE_3+a_1\bar{S}_1+a_2A_1+a_3\bar{T}_0=\begin{Vmatrix} a_3 & a_2 & -a_1 & -a_0 \\ a_2 & -a_3 & -a_0 & a_1 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix},$$

искомое произведение приводится также к иной упорядоченной записи:

$$A\cdot{}^tA=a_0\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix}+a_1\begin{Vmatrix} a_1 & -a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & -a_0 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \end{Vmatrix}+$$

$$+a_2\begin{Vmatrix} a_2 & -a_3 & -a_0 & a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & -a_0 & a_3 & -a_2 \end{Vmatrix}+a_3\begin{Vmatrix} a_3 & a_2 & -a_1 & -a_0 \\ a_2 & -a_3 & -a_0 & a_1 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}$$

или

$$A\cdot{}^tA=a_0\begin{Vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ 0 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{Vmatrix}+a_1\begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 0 & a_3 & a_0 & -a_1 \end{Vmatrix}+$$

$$+a_2\begin{Vmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -a_0 & a_3 & -a_2 \end{Vmatrix}+a_3\begin{Vmatrix} a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & -a_0 & a_1 \\ 0 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix}$$

С помощью группы 32-го порядка [9], аналогично исследуются мультипликативные композиции вида $A\cdot A^t$ ${}^tA\cdot A$ $A^t\cdot A$, и ${}^tA^t\cdot{}^tA$, ${}^tA\cdot{}^tA^t$, ${}^tA^t\cdot A^t$, $A^t\cdot{}^tA^t$. Например, для произведения $A\cdot A^t$ получаем:

$$A\cdot A^t=F$$

где

$$F=\begin{Vmatrix} a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2 & 2a_0a_1 & 2a_0a_2 & 2a_0a_3 \\ -2a_0a_1 & a_0^2-a_1^2+a_2^2+a_3^2 & -2a_1a_2 & -2a_1a_3 \\ -2a_0a_2 & -2a_1a_2 & a_0^2+a_1^2-a_2^2+a_3^2 & -2a_2a_3 \\ -2a_0a_3 & -2a_1a_3 & -2a_2a_3 & a_0^2+a_1^2+a_2^2-a_3^2 \end{Vmatrix},$$

а также

$$A^t\cdot A=F,\qquad {}^tA\cdot A=Q,$$

причем

$${}^tA^t\cdot{}^tA={}^tF,\qquad {}^tA\cdot{}^tA^t={}^tF,$$
$${}^tA^t\cdot A^t={}^tQ,\qquad A^t\cdot{}^tA^t={}^tQ,$$

т.е.

$$A\cdot{}^tA={}^tA\cdot A,\qquad A\cdot A^t=A^t\cdot A,$$
$${}^tA^t\cdot{}^tA={}^tA\cdot{}^tA^t,\qquad {}^tA^t\cdot A^t=A^t\cdot{}^tA^t.$$

Транспонирование

Как отмечалось в [2], структура базисных матриц E_i ${}^tE_i^t$ ${}^tE_i$ E_i^t E_0 I выбиралась из соображений симметрии, упорядоченности, выражающейся возможности транспонирования полного, внутреннего и внешнего. При полном транспонировании ${}^t[E_i]^t={}^tE_i^t$ переставляются элементы всех строк и столбцов; при внешнем транспонировании: ${}^t[E_i]={}^tE_i$ переставляются элементы первой строки и первого столбца; при внутреннем транспонировании: $[E_i]^t=E_i^t$ переставляются элементы всех строк и столбцов, исключая первую строку и столбец, т.е. операция полного транспонирования объединяет внешнее и внутреннее. Рассматриваемая совокупность четырех кватернионных матриц A ${}^tA^t$ ${}^tA$ A^t удовлетворяет введенным формам транспонирования, т.е.:

$${}^t[A]^t={}^tA^t,\qquad {}^t[A]={}^tA,\qquad [A]^t=A^t,$$
$${}^t\left[{}^tA^t\right]^t=A,\qquad {}^t\left[{}^tA^t\right]=A^t,\qquad \left[{}^tA^t\right]^t={}^tA,$$
$${}^t\left[{}^tA\right]^t=A^t,\qquad {}^t\left[{}^tA\right]=A,\qquad \left[{}^tA\right]^t={}^tA^t,$$
$${}^t\left[A^t\right]^t={}^tA,\qquad {}^t\left[A^t\right]={}^tA^t,\qquad \left[A^t\right]^t=A.$$

Применив введенные операции транспонирования к произведению вида $A\cdot A=R$, получим:

$${}^t[A\cdot A]^t={}^t[R]^t,\ \text{т.е.}\ {}^tA^t\cdot{}^tA^t={}^tR^t,$$
$${}^t[A\cdot A]={}^t[R],\ \text{т.е.}\ {}^tA\cdot{}^tA={}^tR,$$
$$[A\cdot A]^t=[R]^t,\ \text{т.е.}\ A^t\cdot A^t=R^t.$$

Для произведения вида $A\cdot{}^tA=Q$ имеем:

$${}^t\left[A\cdot{}^tA\right]^t={}^t[Q]^t,\ \text{т.е.}\ A^t\cdot{}^tA^t={}^tQ^t,$$

$$^{t}\left[A\cdot{}^{t}A\right]={}^{t}[Q],\ \text{т.е.}\ {}^{t}A\cdot A={}^{t}Q,$$

$$\left[A\cdot{}^{t}A\right]^{t}=[Q]^{t},\ \text{т.е.}\ {}^{t}A^{t}\cdot A^{t}=Q^{t}.$$

В силу свойств коммутативности $A\cdot{}^{t}A={}^{t}A\cdot A$ и применяя правила транспонирования, получим:

$$^{t}\left[A\cdot{}^{t}A\right]^{t}={}^{t}\left[{}^{t}A\cdot A\right]^{t},\ \text{т.е.}\ A^{t}\cdot{}^{t}A^{t}={}^{t}A^{t}\cdot A^{t},$$

$$^{t}\left[A\cdot{}^{t}A\right]={}^{t}\left[{}^{t}A\cdot A\right],\ \text{т.е.}\ {}^{t}A\cdot A=A\cdot{}^{t}A,$$

$$\left[A\cdot{}^{t}A\right]^{t}=\left[{}^{t}A\cdot A\right]^{t},\ \text{т.е.}\ {}^{t}A^{t}\cdot A^{t}=A^{t}\cdot{}^{t}A^{t}.$$

Откуда следует $Q={}^{t}Q$, $Q^{t}={}^{t}Q^{t}$,

т.е. $Q=A\cdot{}^{t}A={}^{t}A\cdot A,\quad Q^{t}=A^{t}\cdot{}^{t}A^{t}={}^{t}A^{t}\cdot A^{t}$.

Рассматривая произведения вида $A\cdot A^{t}=F$, аналогично получим:

$$^{t}\left[A\cdot A^{t}\right]^{t}={}^{t}[F]^{t},\ \text{т.е.}\ {}^{t}A\cdot{}^{t}A^{t}={}^{t}F^{t},$$

$$^{t}\left[A\cdot A^{t}\right]={}^{t}[F],\ \text{т.е.}\ {}^{t}A\cdot{}^{t}A^{t}={}^{t}F,$$

$$\left[A\cdot A^{t}\right]^{t}=[F]^{t},\ \text{т.е.}\ A\cdot A^{t}=F^{t}.$$

В силу коммутативности произведений $A\cdot A^{t}=A^{t}\cdot A$, имеем:

$$^{t}\left[A\cdot A^{t}\right]^{t}={}^{t}\left[A^{t}\cdot A\right]^{t},\ \text{т.е.}\ {}^{t}A\cdot{}^{t}A^{t}={}^{t}A^{t}\cdot{}^{t}A,$$

$$^{t}\left[A\cdot A^{t}\right]={}^{t}\left[A^{t}\cdot A\right],\ \text{т.е.}\ {}^{t}A\cdot{}^{t}A^{t}={}^{t}A^{t}\cdot{}^{t}A,$$

$$\left[A\cdot A^{t}\right]^{t}=\left[A^{t}\cdot A\right]^{t},\ \text{т.е.}\ A\cdot A^{t}=A^{t}\cdot A.$$

Откуда $F=F^{t},\quad {}^{t}F={}^{t}F^{t}$.

Применив операции транспонирования к установленному ранее результату $A\cdot{}^{t}A^{t}=a^{2}E_{0}$ и учитывая свойства коммутативности $A\cdot{}^{t}A^{t}={}^{t}A^{t}\cdot A$, непосредственно получаем:

$$^{t}\left[A\cdot{}^{t}A^{t}\right]^{t}={}^{t}\left[a^{2}E_{0}\right]^{t},\ \text{т.е.}\ A\cdot{}^{t}A^{t}=a^{2}E_{0},$$

$$^{t}\left[A\cdot{}^{t}A^{t}\right]={}^{t}\left[a^{2}E_{0}\right],\ \text{т.е.}\ {}^{t}A\cdot A^{t}=a^{2}E_{0},$$

$$\left[A\cdot{}^{t}A^{t}\right]^{t}=\left[a^{2}E_{0}\right]^{t},\ \text{т.е.}\ {}^{t}A\cdot A^{t}=a^{2}E_{0}.$$

и далее для равенства ${}^{t}A^{t}\cdot A=a^{2}E_{0}$:

$$^{t}\left[{}^{t}A^{t}\cdot A\right]^{t}={}^{t}\left[a^{2}E_{0}\right]^{t},\ \text{т.е.}\ {}^{t}A^{t}\cdot A=a^{2}E_{0},$$

$$^{t}\left[{}^{t}A^{t}\cdot A\right]={}^{t}\left[a^{2}E_{0}\right],\ \text{т.е.}\ A^{t}\cdot{}^{t}A=a^{2}E_{0},$$

$$\left[{}^{t}A^{t}\cdot A\right]^{t}=\left[a^{2}E_{0}\right]^{t},\ \text{т.е.}\ A^{t}\cdot{}^{t}A=a^{2}E_{0}.$$

Откуда следует:

$$A\cdot{}^{t}A^{t}={}^{t}A^{t}\cdot A={}^{t}A\cdot A^{t}=A^{t}\cdot{}^{t}A=a^{2}E_{0}.$$

Ортогональность

Из приведенных результатов нетрудно определить матрицы, обратные кватернионным $[A]^{-1}$, $\left[{}^{t}A^{t}\right]^{-1}$, $\left[{}^{t}A\right]^{-1}$, $\left[A^{t}\right]^{-1}$, т.е. удовлетворяющие условиям:

$$[A]^{-1}A=E_{0},\ \left[{}^{t}A^{t}\right]^{-1}{}^{t}A^{t}=E_{0},\ \left[{}^{t}A\right]^{-1}{}^{t}A=E_{0},\ \left[A^{t}\right]^{-1}A^{t}=E_{0}.$$

Например, умножив равенство $A\cdot{}^{t}A^{t}=a^{2}E_{0}$ слева на $[A]^{-1}$, получим

$$[A]^{-1}A\cdot{}^{t}A^{t}=a^{2}[A]^{-1}E_{0}.$$

Откуда

$$E_{0}\cdot{}^{t}A^{t}=a^{2}[A]^{-1}E_{0},$$

т.е.

$$^{t}A^{t}=a^{2}[A]^{-1}.$$

Следовательно:

$$[A]^{-1}=\frac{1}{a^{2}}{}^{t}A^{t}$$

Аналогично доказывается:

$$\left[{}^{t}A\right]^{-1}=\frac{1}{a^{2}}A^{t},\qquad \left[{}^{t}A^{t}\right]^{-1}=\frac{1}{a^{2}}A,\qquad \left[A^{t}\right]^{-1}=\frac{1}{a^{2}}{}^{t}A.$$

В частности, если норма кватерниона удовлетворяет условию $a^{2}=1$ (например, при использовании параметров Родрига – Гамильтона в качестве компонент кватерниона [2]), рассматриваемые пары кватернионных матриц являются ортогональными, т.е. $A\cdot{}^{t}A^{t}={}^{t}A^{t}\cdot A={}^{t}A\cdot A^{t}=A^{t}\cdot{}^{t}A=E_{0}$, а их обратные матрицы равны транспонированным

$$[A]^{-1}={}^{t}A^{t},\ \left[{}^{t}A^{t}\right]^{-1}=A,\ \left[{}^{t}A\right]^{-1}=A^{t},\ \left[A^{t}\right]^{-1}={}^{t}A.$$

Выводы

Резюмируя изложенное, шестнадцать всевозможных мультипликативных композиций пар рассмотренных четырех матриц, эквивалентных равным и сопряженным кватернионам, удобно представить в виде следующей таблицы умножения

•	${}^{t}A^{t}$ A	A^{t} ${}^{t}A$
A ${}^{t}A^{t}$	$a^{2}E_{0}$ R ${}^{t}R^{t}$ $a^{2}E_{0}$	F Q Q^{t} ${}^{t}F$
${}^{t}A$ A^{t}	${}^{t}F$ Q Q^{t} F	$a^{2}E_{0}$ ${}^{t}R$ R^{t} $a^{2}E_{0}$

Приведенная таблица умножения имеет очевидную симметричность, обусловленную коммутативностью, ортогональностью, транспонированностью и содержит четыре отличных по структуре результирующих матрицы, одна из которых определяется единичной матрицей E_0, вторая R по структуре эквивалентна кватерниону, матрицы Q и F не являются кватернионными, но обладают упорядоченной структурой, определяемой симметричной и кососимметричной составляющими.

Литература

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
2. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
3. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики / Н.А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – т. 1. – 480с.; т. 2. – 544с.
4. Кравець Т.В. Представлення кватерніонними матрицями послідовності скінчених поворотів твердого тіла у просторі // Автоматика-2000. Міжнародна конференція з автоматичного управління: Праці у 7-ми томах. – т.2. – Львів: Державний НДІ Інформаційної інфраструктури, 2000. – с.140-145.
5. Кравец В.В. Об оценке центробежных, кориолисовых и гироскопических сил при скоростном движении железнодорожного экипажа / В.В. Кравец, Т.В. Кравец // Прикладная механика. – 2008. – Том 44. – №1 – с.123-132.
6. Кравец В.В. Описание кинематики и нелинейной динамики ассиметричного твердого тела кватернионными матрицами. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Прикладная механика. – 2009. – Том 45. – №2 – с.133-143.
7. Кравец В.В. Кватернионные матрицы в нелинейной динамике скоростных транспортных систем / В.В. Кравец, В.В. Кравец, Т.В. Кравец // Вісник ДНУЗТ. – 2009. – Вип. 30. – с. 155-160.
8. Кравец В.В. Алгоритм вычисления матрицы инерции колесной пары при учете погрешностей изготовления и монтажа. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Збірник наукових праць Державного економіко-технологічного університету транспорту: Серія „Транспортні системи і технології ". – Вип. 13. – К.: ДЕТУТ, 2008. – 288с.
9. Кравец В.В. Составление группы мономиальных (1, 0, -1) – матриц четвертого порядка. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 3/3 (39) – с.15-27.
10. Кравец В.В. Установление базиса кватернионных матриц. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 5/4 (41) – с.18-23.
11. Корнев Г.В. Тензорное исчисление. / Г.В. Корнев – М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 240с.
12. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 400с.
13. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. / С.М. Онищенко – Киев: Наук. думка, 1983. – 208 с.
14. Павловский М.А. Теоретична механіка: підручник. / М.А. Павловский – К.: Техніка, 2002. – 512с.
15. Плотников П.К. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела. / П.К. Плотников, Ю.Н. Челноков – Сб. научно-методич. статей по теоретической механике, 1981, вып. 11, с. 122-129