

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЕЛЕКТИВНЫХ СИГНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ И КУБИЧЕСКИХ В- СПЛАЙНОВ

И. В. Стрелковская  
Д. Ю. Бухан

*Проведено дослідження властивостей селективних сигналів, що апроксимовані кубічним сплайном та кубічним В-сплайном за допомогою критеріїв – величини розкриття око-діаграми та розподілу енергії в сигналі. Вказано значення параметрів сигналу, при яких рекомендується використання тих або інших сигналів*

*Ключові слова: селективний сигнал, кубічний сплайн, перший критерій Найквіста, око-діаграма, горизонтальний розкриття, концентрація енергії*

*Проведено исследование свойств селективных сигналов, аппроксимированных кубическим сплайном и кубическим В-сплайном с помощью критериев – величины раскрытия глаз-диаграммы и распределения энергии в сигнале. Указаны значения параметров сигнала, при которых предпочтительным является применение тех или иных сигналов*

*Ключевые слова: селективный сигнал, кубический сплайн, первый критерий Найквиста, глаз-диаграмма, горизонтальный раскрытия, концентрация энергии*

*The investigation of selective signals properties approximated by cubic spline and cubic B-spline with the help of the criteria – value dependence of eye-pattern aperture and energy distribution in signal is defined. The meanings of signal parameters whereby the use of B-spline is preferable are shown. It will give the opportunity to increase the spectral effectiveness such or other splines*

*Key words: selective signal, cubic spline, Nyquist first criterion, eye-pattern, horizontal domain, energy distribution*

## 1. Введение

Качество передачи информации в цифровых системах обычно измеряется количеством ошибочных бит за единицу времени (Bit Error Rate, BER). Классическим способом уменьшения количества ошибок является помехоустойчивое кодирование. Альтернативой помехоустойчивому кодированию может выступать использование сигналов специальной формы.

Большие возможности в этом направлении открывает перед исследователями применение сигналов, удовлетворяющих первому критерию Найквиста, так как они позволяют организовать передачу цифровой информации без межсимвольной интерференции.

## 2. Цель и постановка задачи

Целью данной статьи является исследование свойств селективных сигналов, аппроксимированных в частотной области кубическими сплайнами и кубическими В-сплайнами и определение возможностей применения тех или иных сигналов в цифровых системах передачи информации.

## 3. Результаты исследований

Согласно первому критерию Найквиста передача цифровых сигналов без межсимвольной интерференции (МСИ) возможна, если сигнальная функция во временной области удовлетворяет условию [1]:

$$g(kT) = \begin{cases} U & \text{при } k = 0; \\ 0 & \text{при } k = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

где T – длительность тактового интервала.

Сигналы, удовлетворяющие условию, получили название селективных.

Сравнивать селективные сигналы можно с помощью различных критериев. Одним из таких критериев является величина горизонтального раскрыва глаз-диаграммы, которая впервые рассматривалась в работе [2]. Также можно рассматривать распределение энергии в сигнале, т.е. ее концентрацию на промежутке, симметричном относительно центрального отсчета [3]. Большая доля энергии на меньшем промежутке означает большую устойчивость такого сигнала к воздействию помех.

Для расчета энергии селективного сигнала, сосредоточенной на определенном промежутке, воспользуемся средой математического моделирования MATLAB.

В работе [4] было получено выражение для селективного сигнала, описываемого в частотной области кубическим В-сплайном:

$$g(t) = 12U \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \left[ \frac{1}{\Delta \omega^3 t^3} \left( 4 \sin \frac{\Delta \omega t}{2} - \sin \Delta \omega t \right) - \frac{1}{\Delta \omega^2 t^2} \right], \quad (2)$$

где  $\Delta \omega = \alpha \omega_c$ ,  $\alpha$  – коэффициент скругления спектра,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Коэффициент  $\alpha$  характеризует ширину переходной области селективного сигнала.

В работе [5] были синтезированы селективные сигналы, спектральная характеристика которых аппроксимировалась кубическим сплайном. Этот селективный сигнал имеет вид:

$$g(t) = U \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \left[ \frac{12}{\Delta \omega^3 t^3} \sin \Delta \omega t - \frac{6}{\Delta \omega^2 t^2} (1 + \cos \Delta \omega t) \right]. \quad (3)$$

Выражения и описывают однопараметрические селективные сигнальные функции, единственным параметром которых является коэффициент  $\alpha$ .

Проведем сравнительный анализ экстремальных свойств селективных сигналов, спектральная плотность которых аппроксимирована кубическим сплайном и кубическим В-сплайном. В работе [2] для нахождения экстремальных свойств селективных сигналов использовалась глаз-диаграмма, а именно – ее горизонтальный раскрыв. Использование величины горизонтального раскрыва глаз-диаграммы в качестве критерия оптимизации параметров селективных сигналов позволяет синтезировать сигналы, наиболее устойчивые к сдвигам моментов взятия отсчетов – джиттеру.

На рис. 1 показана зависимость величины горизонтального раскрыва H глаз-диаграммы от коэффициента скругления спектра  $\alpha$  для сигналов вида (2) и (3).

Приведенные зависимости позволяют сделать следующий вывод. Аппроксимация сигнальной функции в частотной области кубическим В-сплайном дает большую величину горизонтального раскрыва глаз-диаграммы по сравнению с сигналом вида (3) при  $\alpha > 0,81$ . В это же время, при  $\alpha > 0,6$  величина горизонтального раскрыва глаз-диаграммы сигнала изменяется незначительно. Это позволяет при тех же показателях помехоустойчивости использовать сигнал с меньшей полосой частот, т.е. сигнал вида (3).

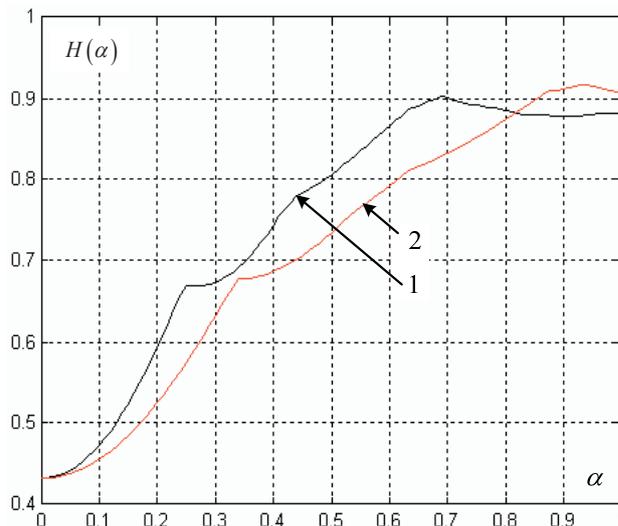


Рис. 1. Зависимость величины горизонтального раскрыва глаз-диаграммы от коэффициента  $\alpha$  для сигналов, спектральная плотность которых аппроксимирована кубическим сплайном (линия 1) и кубическим В-сплайном (линия 2)

В качестве иллюстрации на рис. 2 а, б показаны глаз-диаграммы селективных сигналов (2) и (3) при  $\alpha = 0,6$ , а на рис. 2 в, г – при  $\alpha = 0,81$ .

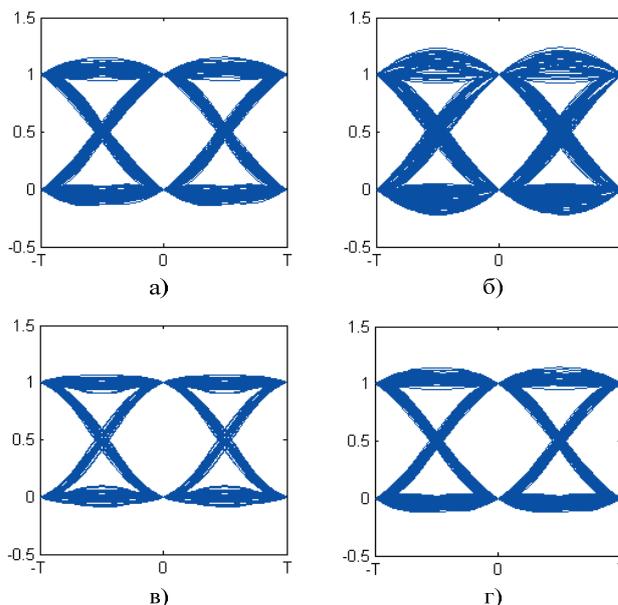


Рис. 2. Глаз-диаграммы селективных сигналов, аппроксимированных в частотной области кубическим сплайном и кубическим В-сплайном:

- а) аппроксимация кубическим сплайном,  $\alpha = 0,6$ ;
- б) аппроксимация кубическим В-сплайном,  $\alpha = 0,6$ ;
- в) аппроксимация кубическим сплайном,  $\alpha = 0,81$ ;
- г) аппроксимация кубическим В-сплайном,  $\alpha = 0,81$

Таким образом, выбирая определенное значение  $\alpha$ , можем получать селективные сигналы с различными, но заранее известными свойствами.

Однако, величина горизонтального раскрыва глаз-диаграммы, хоть и является очень наглядной харак-

теристикой сигнала, имеет существенный недостаток – для ее расчета требуется выполнять очень большой объем вычислений.

Так, для расчета всего одного значения величины  $N$  требуется строить всю глаз-диаграмму, состоящую из сотен графиков сигнала. Даже на современных быстродействующих ЭВМ этот процесс занимает значительное время.

Например, для построения глаз-диаграммы, состоящей из 300 отрезков сигнальной функции, на компьютере с процессором Pentium Core2 Duo с тактовой частотой 2 ГГц, необходимо 2-3 сек. Время расчета зависимости величины раскрыва от каких-то параметров подразумевает нахождение десятков, а то и сотен значений  $N$  – затраты времени уже измеряются десятками минут.

Уменьшить время расчета величины горизонтального раскрыва глаз-диаграммы можно, если обнаружить ее зависимость от характеристик, которые рассчитываются существенно быстрее. При этом во многих практических случаях имеет значение только характер изменения  $N$  в зависимости от параметров сигнала.

Учитывая, что величина раскрыва определяется величиной боковых лепестков временной функции сигнала, можно предположить, что концентрация энергии сигнала на промежутке  $[-T, T]$  и величина горизонтального раскрыва  $N$  должны быть взаимосвязаны.

Энергию сигнала можно вычислить, используя равенство Парсеваля [6]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega. \quad (4)$$

Здесь  $G(j\omega)$  – комплексная спектральная функция сигнала  $g(t)$ .

В работе [3] был введен коэффициент  $\eta$ , показывающий степень концентрации энергии сигнала на конечном временном промежутке.

Применительно к однопараметрическим селективным сигналам, этот коэффициент можно записать следующим образом:

$$\eta(n, \alpha) = \frac{E(n, \alpha)}{E_0(\alpha)}, \quad (5)$$

$$\text{где } E(n, \alpha) = \int_{-nT}^{nT} g^2(t; \alpha) dt, \quad E_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t; \alpha) dt.$$

На рис. 3, а показаны результаты исследования зависимости коэффициента  $\eta$  от параметра  $\alpha$  при  $n = 1$ .

Рис. 3, б отображает эту же зависимость при  $n = 2$ .

Рис. 3, а показывает, что для селективного сигнала (3) при  $\alpha < 0,81$  энергия главного лепестка больше, чем для селективного сигнала вида (2). Для  $\alpha > 0,81$  энергия селективного сигнала вида (2) больше энергии сигнала вида (3).

Это позволяет, в зависимости от параметра  $\alpha$ , синтезировать селективные сигналы, которые увеличивают спектральную эффективность цифровых систем передачи информации.

Рис. 3, б иллюстрирует тот факт, что при  $\alpha < 0,45$  и  $\alpha > 0,81$  суммарная энергия главного и первого бокового лепестков сигнала больше, чем суммарная энергия главного и первого бокового лепестков сигнала (2). Подтверждается вышесказанное предположение о взаимосвязи между зависимостями  $N(\alpha)$  (рис. 1) и  $\eta(1, \alpha)$  (рис. 3, а).

Анализ зависимостей, показанных на рис. 3 а, б, позволяет установить диапазон значений параметра  $\alpha$ , при которых достигается требуемая концентрация энергии в заданном промежутке. Например, если необходимо синтезировать сигнал с энергией боковых лепестков не более 1%, то можно воспользоваться выражением (2) при  $\alpha > 0,68$  или выражением (3) при  $\alpha > 0,52$ .

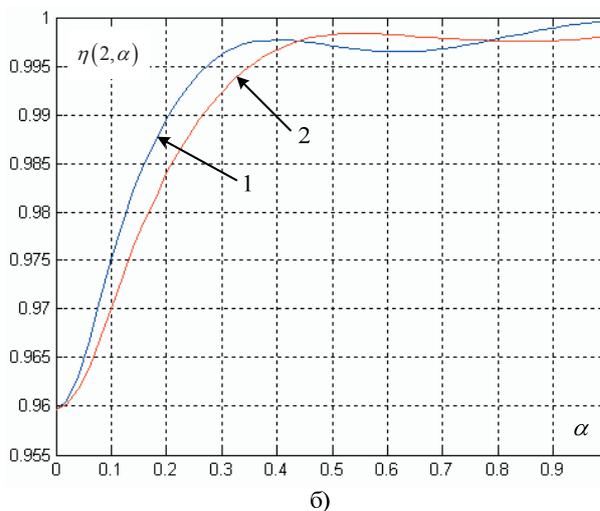
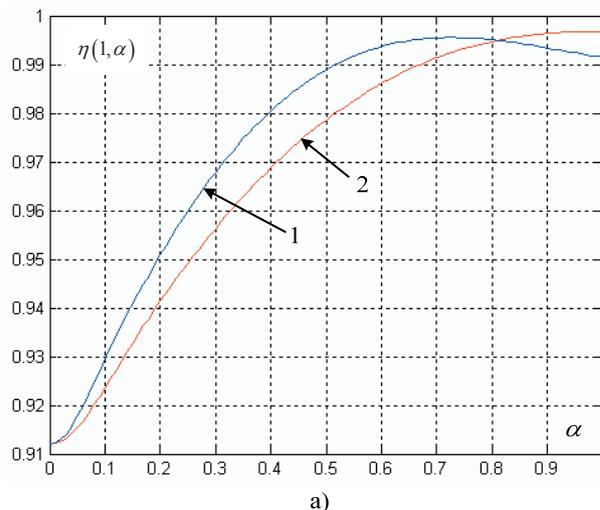


Рис. 3. Доля энергии селективных сигналов, сосредоточенной в конечном промежутке  $I$ . Линия 1 соответствует сигналу, аппроксимированному в частотной области кубическим сплайном, линия 2 – кубическим В-сплайном.  
а)  $I = [-T, T]$ ; б)  $I = [-2T, 2T]$ .

На рис. 4, а показано распределение энергии в первых четырех лепестках временной функции сигнала (2). Рис. 4, б иллюстрирует распределение энергии в первых четырех лепестках сигнала (3).

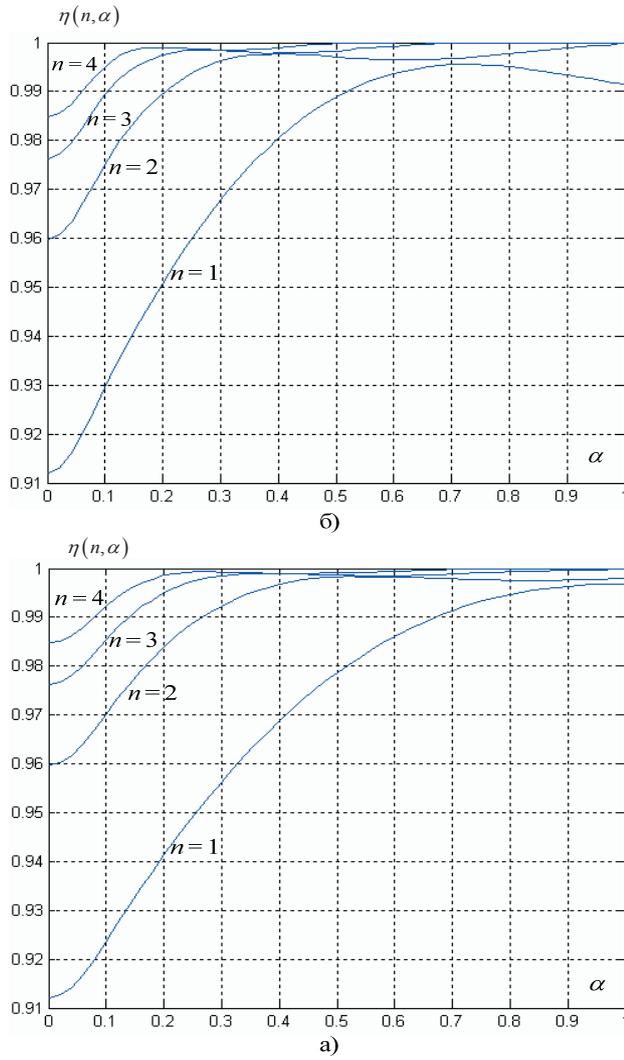


Рис. 4. Доля энергии селективных сигналов, сосредоточенная в промежутке  $[-nT, nT]$ :  
 а) сигнал аппроксимирован в частотной области кубическим сплайном;  
 б) сигнал аппроксимирован в частотной области кубическим В-сплайном.

Графики, показанные на рис. 4 а, б полностью подтверждают выводы, сделанные выше.

При проектировании высокоскоростных систем передачи данных предпочтительным является применение сигналов, у которых уровень боковых лепестков быстро уменьшается с увеличением расстояния от главного лепестка. Это означает уменьшение энергии боковых лепестков с увеличением расстояния от главного лепестка. Для более полного и наглядного представления о концентрации энергии в отдельных лепестках временной функции селективного сигнала введем понятие относительной концентрации энергии селективного сигнала. Для этого введем следующие обозначения:

$$I_1 = [t_1, t_1 + \tau_1]; \quad I_2 = [t_2, t_2 + \tau_2],$$

где  $t_1, t_2, \tau_1, \tau_2$  – положительные числа.

$E_{t_1}(\tau_1, \alpha)$  – частичная энергия селективного сигнала на отрезке  $I_1$ , которая определяется формулой:

$$E_{t_1}(\tau_1, \alpha) = \int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} g^2(t; \alpha) dt. \tag{6}$$

$E_{t_2}(\tau_2, \alpha)$  – частичная энергия селективного сигнала, заключенная на отрезке  $I_2$ , которая определяется формулой:

$$E_{t_2}(\tau_2, \alpha) = \int_{t_2}^{t_2 + \tau_2} g^2(t; \alpha) dt. \tag{7}$$

Определение. Относительной концентрацией энергии селективного сигнала  $g(t; \alpha)$ , сосредоточенной на промежутке  $I_1$  относительно промежутка  $I_2$  называется отношение энергии селективного сигнала, сосредоточенной на промежутке  $I_1$ , к энергии селективного сигнала, сосредоточенной на промежутке  $I_2$ , т.е. справедлива следующая формула:

$$\theta(I_1, I_2, \alpha) = \frac{E_{t_1}(\tau_1, \alpha)}{E_{t_2}(\tau_2, \alpha)}, \tag{8}$$

или, что то же самое,

$$\theta(I_1, I_2, \alpha) = \frac{\int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} g^2(t; \alpha) dt}{\int_{t_2}^{t_2 + \tau_2} g^2(t; \alpha) dt}. \tag{9}$$

Рассмотрим  $t_1 = T; t_2 = 0; \tau_1 = \tau_2 = T$ , тогда  $E_{t_1}(\tau_1, \alpha)$  и  $E_{t_2}(\tau_2, \alpha)$  имеют соответственно следующий вид:

$$E_{t_1}(\tau_1, \alpha) = \int_T^{2T} g^2(t; \alpha) dt; \tag{10}$$

$$E_{t_2}(\tau_2, \alpha) = \int_0^T g^2(t; \alpha) dt. \tag{11}$$

Согласно формуле (9) имеем

$$\theta_1(\alpha) = \theta([T; 2T], [0; T], \alpha) = \frac{\int_T^{2T} g^2(t; \alpha) dt}{\int_0^T g^2(t; \alpha) dt}. \tag{12}$$

Аналогично вводится относительная концентрация энергии селективного сигнала  $g(t)$ , сосредоточенная на промежутке  $[2T; 3T]$  относительно промежутка  $[T; 2T]$ . Имеем:

$$\theta_2(\alpha) = \theta([2T; 3T], [T; 2T], \alpha) = \frac{\int_T^{3T} g^2(t; \alpha) dt}{\int_T^{2T} g^2(t; \alpha) dt}. \tag{13}$$

Рис. 5 а, б иллюстрирует зависимость относительной концентрации энергии  $\theta_1(\alpha)$  и  $\theta_2(\alpha)$  рассматриваемых селективных сигналов, которые определяются формулами (12) и (13).

Полученные характеристики позволяют сделать следующие выводы. Прежде всего, зависимость энергии первого бокового лепестка по отношению к энергии главного лепестка от параметра  $\alpha$  достаточно хорошо согласуется с зависимостью величины горизонтального раскрытия от  $\alpha$ . Это говорит о значительном сходстве формы главного и первого бокового лепестков обеих сигналов. В то же время энергия второго лепестка может превосходить энергию первого (рис. 5, б). Показанная на рис. 5, б зависимость позволяет сделать вывод о том, что применение селективного сигнала, аппроксимированного в частотной области кубиче-

ским сплайном имеет смысл при  $\alpha < 0,6$  и  $\alpha > 0,78$ , поскольку энергия сигнала распределена в небольшом промежутке времени. По аналогичной причине рекомендуется использовать сигнал, аппроксимированный кубическим В-сплайном при  $\alpha < 0,85$ . Однако, при  $\alpha < 0,45$  энергия второго бокового лепестка сигнала, аппроксимированного кубическим В-сплайном, оказывается больше, чем для сигнала, аппроксимированного кубическим сплайном. Поэтому применение сигнала, аппроксимированного в частотной области кубическим В-сплайном, более предпочтительно, если  $\alpha$  находится в промежутке  $[0,45; 0,81]$ . С другой стороны, анализируя зависимость  $H(\alpha)$  (рис. 1), можно отметить целесообразность использования этого сигнала только при  $\alpha > 0,75$ , поскольку в противном случае при такой же ширине спектра существует другой сигнал, обеспечивающий значительно большую величину горизонтального раскрытия глаз-диаграммы.

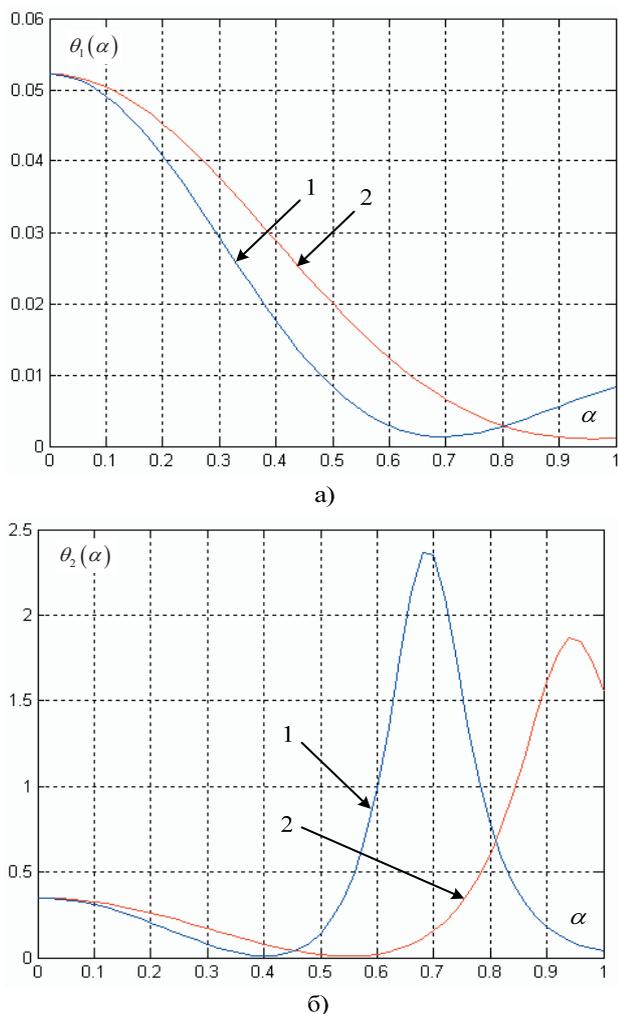


Рис. 5. Зависимость относительной концентрации энергии селективных сигналов от  $\alpha$ . Линия 1 соответствует сигналу, аппроксимированному в частотной области кубическим сплайном, линия 2 — кубическим В-сплайном.  
 а) Отношение энергии первого бокового лепестка к энергии главного лепестка;  
 б) отношение энергии второго бокового лепестка к энергии первого бокового лепестка.

#### 4. Выводы

Рассмотрены два критерия исследования свойств селективных сигналов — величина горизонтального раскрытия глаз-диаграммы и распределение энергии в сигнале, т.е. ее концентрация на произвольном промежутке. Рассматривая эти два критерия, получили, что при коэффициенте скругления спектра  $\alpha \approx 0,81$  применять селективные сигналы, аппроксимированные кубическим сплайном или кубическим В-сплайном, равносильно. При  $0,75 < \alpha < 0,85$  рекомендуется использовать селективный сигнал, спектральная характеристика которого аппроксимируется кубическим В-сплайном, так как такой сигнал проявляет большую устойчивость к воздействию помех. Для остальных  $\alpha$  из промежутка  $[0; 1]$  предпочтительнее использовать селективный сигнал, аппроксимированный кубическим сплайном.

#### Литература

1. Прокис Дж. Цифровая связь / Прокис Дж.; пер. с англ.; под ред. Д. Д. Кловского. — М.: Радио и связь, 2000. — 800 с.
2. Сукачев Э. А. Особенности использования глаз-диаграммы для исследования экстремальных свойств многопараметрических селективных сигналов / Э. А. Сукачев, И. В. Стрелковская, Д. Ю. Бухан // Наукові записки УНДІЗ. — 2009. — № 2 (10). — С. 13 — 17.
3. Сукачев Э. А. Экстремальные свойства селективных сигналов при интерполяции их спектров кубическими сплайнами / Э. А. Сукачев, И. В. Стрелковская // Радиоэлектроника (изв. вузов). — Т. 47. — 2004. — №1. — С. 32–37.
4. Стрелковская И. В. Применение кубических В-сплайнов для синтеза селективных сигналов / И. В. Стрелковская // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. — 2005. — Вып. 142. — С. 47–52.
5. Сукачев Э. А. Синтез селективных сигналов на основе сплайн-функций / Э. А. Сукачев // Зв'язок. — 1999. — № 2. — С. 35–38.
6. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы / Баскаков С. И. — М.: Высшая школа, 1983. — 536 с.