УДК 531.383

АНАЛІЗ СКЛАДОВИХ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ ВИСОКОТОЧНИМ ВИМІРЮВАЧЕМ КУТА

В статті проаналізовано складові похибки вимірювання кутів високоточним вимірювачем кута на основі гоніометра з кільцевим лазером. Розглянуто розподіл похибки, проведено оцінку ймовірності густини розподілу похибки

Ключові слова: похибка вимірювання, випадкова гаусова величина, густина випадкової величини

В статье проанализировано составляющие ошибки измерения углов высокоточным измерителем углов на основе гониометра с кольцевым лазером. Рассмотрено распределение ошибки, проведено оценку вероятности плотности распределения ошибки

Ключевые слова: ошибка измерения, случайная гауссова величина, плотность случайной величины

In article it is analyzed making errors of measurement of corners by a precision measuring instrument of corners on the basis of goniometr with the ring laser. Distribution of an error is considered, lead an estimation of probability of density of distribution of an error

Key words: an error of measurement, a random gaussian variable, density of a random variable

О.М. Безвесільна
Доктор технічних наук, професор*
Контактний тел.: 8 (044) 236-09-26

С.С. Ткаченко
Аспірантка*
*Кафедра приладобудування
Національний технічний університет України “КПІ”
пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03037
E-mail: tkachenkoss@ukr.net

1. Вступ

Дослідження в даній статті відносяться до області високоточного вимірювання кутів у приладобудуванні.

Аналіз публікацій та літератури показав, що в літературі [1-4] відсутній аналіз складових похибки вимірювань високоточним вимірювачем кута на основі гоніометра з кільцевим лазером, тому проведемо такий аналіз в даній статті.

Задача полягає у дослідженні закону розподілу похибки вимірювання кутів високоточним вимірювачем кута на основі гоніометра з кільцевим лазером $\Delta\varphi$ та ймовірностей розподілу густину $P\{|\Delta\varphi|>\varepsilon\},\varepsilon>0$.

Мета статті: провести аналіз складових похибки вимірювання кутів високоточним вимірювачем кута на основі гоніометра з кільцевим лазером за допомогою методів теорії ймовірностей.

2. Відомості про похибку

Похибка вимірювання кутів визначається виразом:

$$\Delta\varphi=\varphi-\varphi_u,\ \varphi=2\pi\frac{N_\varphi}{N_{2\pi}}, \tag{1}$$

де φ – виміряне значення кута,

φ_u – істинне значення кута,

$$N_{2\pi}=K\int_{t_0+t_{2\pi,1}}^{t_{2\pi}+t_{2\pi,2}}\omega_0 dt,\ N_\varphi=K\int_{t_0+t_{\varphi,1}}^{t_\varphi+t_{\varphi,2}}\omega_0 dt,$$

$$2\pi=\int_{t_0}^{t_{2\pi}}\omega_0 dt,\ \varphi=\int_{t_1}^{t_\varphi}\omega_0 dt,$$

$t_{\varphi,2},t_{\varphi,2},t_{2\pi,1},t_{2\pi,2}$ – незалежні гаусові випадкові величини з параметрами:

$$Mt_{\varphi,1}=Mt_{\varphi,2}=Mt_{2\pi,1}=Mt_{2\pi,2}=0$$

$$Dt_{\varphi,1}=\sigma^2_{\varphi,1},Dt_{\varphi,2}=\sigma^2_{\varphi,2},Dt_{2\pi,1}=\sigma^2_{2\pi,1},Dt_{2\pi,2}=\sigma^2_{2\pi,2},$$

3. Попередні відомості про $\Delta\varphi$

Перепишемо $\Delta\varphi$ у зручному вигляді.

$$\Delta\varphi=\varphi-\varphi_u=\varphi-2\pi\frac{K\varphi+K\omega_0(t_{\varphi,2}-t_{\varphi,1})}{K2\pi+K\omega_0(t_{2\pi,2}-t_{2\pi,1})}=$$

$$=\frac{\varphi\omega_0(t_{2\pi,2}-t_{2\pi,1})-2\pi\omega_0(t_{\varphi,2}-t_{\varphi,1})}{2\pi+\omega_0(t_{2\pi,2}-t_{2\pi,1})}=\frac{\theta}{\eta} \qquad (2)$$

де $\theta=\varphi\omega_0(t_{2\pi,2}-t_{2\pi,1})-2\pi\omega_0(t_{\varphi,2}-t_{\varphi,1})$ – гаусова випадкова величина $M\theta=0$,

$$D\theta=\varphi^2\omega_0{}^2(\sigma^2_{2\pi,1}+\sigma^2_{2\pi,2})+4\pi^2\omega_0^2(\sigma^2_{\varphi,1}+\sigma^2_{\varphi,2})=\sigma^2_\theta, \qquad (3)$$

η – гаусова випадкова величина $M\eta=2\pi$

$D\eta=M(\eta-2\pi)^2=\omega_0^2(\sigma^2_{2\pi,1}+\sigma^2_{2\pi,2})=\sigma^2_\eta$

$$\operatorname{cov}(\theta,\eta)=M\theta(\eta-2\pi)=\varphi^2\omega_0^2(\sigma^2_{2\pi,1}+\sigma^2_{2\pi,2}), \qquad (4)$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(\theta,\eta)}{\sqrt{\sigma_\theta^2\sigma_\eta^2}}=\sqrt{\frac{\varphi^2(\sigma^2_{2\pi,1}+\sigma^2_{2\pi,2})}{\varphi^2(\sigma^2_{2\pi,1}+\sigma^2_{2\pi,2})+4\pi^2(\sigma^2_{\varphi,1}+\sigma^2_{\varphi,2})}}, \qquad (5)$$

$\operatorname{cov}(\theta,\eta)$ – гаусов вектор, оскільки його можна представити у вигляді лінійного перетворення гаусового вектора з незалежними компонентами.

Дійсно, нехай

$$\xi_1=t_{2\pi,2}-t_{2\pi,1}$$

$$\xi_2=t_{\varphi,2}-t_{\varphi,1}. \qquad (6)$$

Тоді

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\phi\omega_0 & -2\pi\omega_0\\ \omega_0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 2\pi\end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Тому сумісна густина випадкових величин, θ,η – задається формулою [5]:

$$P_{\theta,\eta}(x,y)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_0\sigma_\eta\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_\theta^2}-2\rho\frac{x(y-2\pi)}{\sigma_\theta\sigma_\eta}+\frac{(y-2\pi)^2}{\sigma_\eta{}^2}\right]\right\}. \qquad (8)$$

Зауваження 1.

У випадку, якщо $\sigma_{\varphi,1}=\sigma_{\varphi,2}=\sigma_1=\sigma_{2\pi 2}=\sigma$,

то $\sigma_\theta^2=2\omega_0^2\sigma^2[\varphi^2+2\pi^2]$, $\sigma_\eta^2=2\omega_0^2\sigma^2$, $\rho=\sqrt{\dfrac{\varphi^2}{\varphi^2+4\pi^2}}$.

Зауваження 2. Випадкова величина θ/η не має математичного очікування (і тим більше дисперсію). Дійсно $M\dfrac{\theta}{\eta}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\dfrac{x}{y}\rho_\theta(x,y)dxdy$, а цей інтеграл розходиться, тому що $\rho_\theta(0,0)\neq 0$.

4. Розподіл $\Delta\varphi$

Знайдемо густину розподілу $\Delta\varphi\rho_{\Delta\varphi}(z)$. За формулою для густини відношення двох випадкових величин [5]:

$$P\Delta\varphi(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|\rho_{\theta,\eta}(zy,y)dy=\frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_\theta\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}Q(z,y)\right\}dy, \qquad (9)$$

де

$$Q(z,y)=\frac{z^2y^2}{\sigma_\theta^2}-2\rho\frac{zy(y-2\pi)}{\sigma_\theta\sigma_\eta}+\frac{(y-2\pi)^2}{\sigma_\eta{}^2}=$$

$$=A^2\left(y+\frac{B}{A^2}\right)^2-\left(\frac{B^2}{A^2}-C\right)$$

$$A^2=\frac{z^2\sigma_\eta^2-2\sigma_\theta\sigma_\eta z\rho+\sigma_\theta^2}{\sigma_\theta^2\sigma_\eta^2},\ B=\frac{2\pi(\sigma_\eta\rho z-\sigma_\theta)}{\sigma_\theta\sigma_\eta^2},\ C=\frac{(2\pi)^2}{\sigma_\eta^2},$$

тобто

$$P_{\Delta\varphi}(z)=\frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_\theta\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|\exp\left\{-\frac{A^2}{2(1-\rho^2)}\left(y+\frac{B}{A^2}\right)^2\right\}dy\cdot\exp\left\{-\frac{C-\dfrac{B^2}{A^2}}{2(1-\rho^2)}\right\}. \qquad (10)$$

Зауважимо, що $\dfrac{C-\dfrac{B^2}{A^2}}{2(1-\rho^2)}=\dfrac{2\pi^2z^2}{(z^2\sigma_\eta^2-2\sigma_\theta\sigma_\eta z\rho+\sigma_\theta^2)}$

Розглянемо інтеграл:

$$I(\sigma,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(y+b)^2}{2\sigma 2}\right\}|y|dy. \qquad (11)$$

Позначимо $\Phi(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{t^2}{2}}dt$

$$I(\sigma,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}|t\sigma-b|dt=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{b}{\sigma}}(t\sigma-b)\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(t\sigma-b)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt=$$

$$=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{b}{\sigma}}t\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt+\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{b}{\sigma}}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt+$$

$$+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{b}{\sigma}}^{\infty}t\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt-\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{b}{\sigma}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt=$$

$$=\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}+2b\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right)-b.$$

Таким чином, з (8) і останньої формули витікає:

$$\rho_{\Delta\varphi}(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(C-\frac{B^2}{A^2}\right)\right\}\times$$
$$\times\left(\frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\exp\left\{-\frac{b^2}{2\sigma^2}\right\}+2b\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right)-b\right)\times$$
$$\times\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta\sigma_\theta\sqrt{1-p^2}}, \quad (12)$$

де $b=\frac{B}{A^2}$, $\sigma=\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{A}$.

Значення A, B і C дані перед (10);

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Застосування формули (12) тяжке, тому що вона громіздка і $P\Delta\varphi(z)$ не виражається через елементарні функції. Тому ймовірності (x>0) можна обчислювати, використовуючи наближені методи для обчислення інтервалів.

$$P\{|\Delta\varphi|>x\}=\int_{x}^{\infty}\rho\Delta\varphi(z)dz+\int_{-\infty}^{-x}\rho\Delta\varphi(z)dz, \quad (13)$$

5. Оцінка ймовірності $P\{|\Delta\varphi|>\varepsilon\}$

З (1) маємо, що

$$\Delta\varphi=\frac{\theta}{2\pi+\eta_1}, \quad (14)$$

де $\eta_1=\eta-2\pi$ – нормальна випадкова величина $M\eta_1=0$,

$$D\eta_1=\sigma_\eta^2=\omega_0^2(\sigma_{2\pi,1}^2+\sigma_{2\pi,2}^2).$$

Для заданого $\varepsilon>0$ і будь-якого $0<\delta<2\pi$ маємо:

$$P\{|\Delta\varphi|>\varepsilon\}=P\left\{\frac{|\theta|}{|2\pi+\eta_1|}>\varepsilon\right\}=P\left\{\frac{|\theta|}{|2\pi+\eta_1|}>\varepsilon,\eta_1\geq-\delta\right\}+$$
$$+P\left\{\frac{|\theta|}{|2\pi+\eta_1|}>\varepsilon,\eta_1<-\delta\right\}\leq P\left\{\frac{|\theta|}{|2\pi-\delta|}>\varepsilon\right\}+P\{\eta_1>-\delta\}. \quad (15)$$

Оскільки

$$P\left\{\frac{|\theta|}{2\pi-\delta}>\varepsilon\right\}=$$
$$=p\{|\theta|>\varepsilon(2\pi-\delta)\}=2\int_{\varepsilon(2\pi-\delta)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_\theta^2}\right\}dx=$$
$$=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\varepsilon(2\pi-\delta)}{\sigma_0}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt`=2\left(1-\Phi\left(\frac{\varepsilon(2\pi-\delta)}{\sigma_\theta}\right)\right), \quad (16)$$

$$P\{|\eta_1|>\delta\}=$$
$$=\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_\theta^2}\right\}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\delta}{\sigma_\eta}}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt`=\left(1-\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_\eta}\right)\right)$$

тоді отримаємо

$$P\{|\Delta\varphi|>\varepsilon\}\leq2\left(1-\Phi\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\sigma_\theta}-\frac{\varepsilon\delta}{\sigma_\theta}\right)\right)+\left(1-\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_\eta}\right)\right), \quad (17)$$

З (17), враховуючи нерівність (u>0)

$$1-\Phi(u)\leq\frac{1}{u\sqrt{2\pi}}e^{\frac{u^2}{2}},$$

отримаємо

$$P\{|\Delta\varphi|>\varepsilon\}\leq$$
$$\leq\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\sigma_\theta}-\frac{\varepsilon\delta}{\sigma_\theta}\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\sigma_\theta}-\frac{\varepsilon\delta}{\sigma_\theta}\right)^2\right\}+\frac{\sigma_\eta}{\delta\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2\sigma_\eta^2}\right\}. \quad (18)$$

6. Оцінка ймовірності $P\{|\Delta\varphi n|>\varepsilon\}$ при багатократних вимірюваннях

Нехай здійснюється n незалежних вимірювань кута φ

$$\varphi_k=2\pi\frac{N\varphi_k}{N_{2\pi_k}}, \quad (19)$$

де $N\varphi_k$, $N_{2\pi_k}$ – визначається як і раніше (k – номер вимірювання $k=\overline{1,n}$).

У якості значення вимірюваного кута беремо

$$\varphi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k. \quad (20)$$

Тоді

$$\Delta\varphi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta\varphi_k, \quad (21)$$

де $\Delta\varphi_k$ – незалежні випадкові величини, розподілені так, як $\Delta\varphi$ у попередньому пункті, тобто

$$\Delta\varphi_k=\frac{\theta_k}{2\pi+\eta_{1k}}, k=\overline{1,n}, \quad (22)$$

де θ_k і η_{1k} розподілені так само, як θ і η_1 у попередньому пункті.

Точно так, як у попередньому пункті, для заданого $\varepsilon>0$ і будь-якого $2\pi>\delta>0$ маємо

$$P\{|\Delta\varphi|>\varepsilon\}=P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\Delta\varphi_k\right|>\varepsilon\right\}=P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta_k}{2\pi+\eta_{1k}}\right|>\varepsilon\right\}=$$
$$=P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta_k}{2\pi+\eta_{1k}}\right|>\varepsilon,\min_{k=1,n}\eta_{1,k}>-\delta\right\}+$$
$$+P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta_k}{2\pi+\eta_{1k}}\right|>\varepsilon,\min_{k=1,n}\eta_{1,k}<-\delta\right\}=$$
$$=P\left\{\frac{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right|}{2\pi-\delta}>\varepsilon,\min_{k=1,n}\eta_{1,k}>-\delta\right\}+$$
$$+P\left\{\min_{k=1,n}\eta_{1,k}<-\delta\right\}\leq P\left\{\frac{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right|}{2\pi-\delta}>\varepsilon\right\}+P\left\{\min_{k=1,n}\eta_{1,k}<-\delta\right\} \quad (23)$$

Оскільки $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k$ – гаусова випадкова величина

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)=\frac{\sigma_\theta^2}{n},$$

то як і у попередньому пункті отримаємо:

$$P\left\{\frac{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right|}{2\pi-\delta}>\varepsilon\right\}=2\left(1-\Phi\left(\frac{2\pi\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_\theta}-\frac{\varepsilon\delta\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma_\theta}\right)\right). \quad (24)$$

Далі

$$P\left\{\min_{k=1,n}\eta_{1,k}<-\delta\right\}=1-\prod_{k=1}^{n}P\left\{\eta_{1,k}\geq-\delta\right\}=1-\left[P\left\{\eta_{1,k}\geq-\delta\right\}\right]^n=$$

$$=1-\left[P\left\{\eta_{1,k}<-\delta\right\}\right]^n=1-\left[\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_т}\right)\right]^n. \quad (25)$$

З (23), (24), (25) отримуємо:

$$P\left\{\Delta\varphi>\varepsilon\right\}\leq2\left(1-\Phi\left(\frac{2\pi\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_\theta}-\frac{\varepsilon\delta\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma_\theta}\right)\right)+1-\left[\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_т}\right)\right]^n. \quad (26)$$

Враховуючи нерівність

$$1-\Phi(u)\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}u}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), u>0$$

можна отримати з (26):

$$P\left\{\Delta\varphi>\varepsilon\right\}\leq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\frac{1}{\left(\frac{2\pi^2}{\sigma_\theta}-\frac{\varepsilon\delta}{\sigma_\theta}\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_\theta}-\frac{\delta\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_\theta}\right)^2\right\}+$$

$$+1-\left(1-\frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi}\delta}\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2\sigma_\eta^2}\right\}\right)^n. \quad (27)$$

Зауважимо, що формули (17), (18.), (26), (27) можна використовувати наступним чином: δ обирається так, щоб $\left(1-\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_\eta}\right)\right)$ у формулі (17) або $\left(1-\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_\eta}\right)\right)^n$ у формулі (26) було б малим. При цьому треба враховувати, що $\frac{\varepsilon\delta}{\sigma_\theta}$ у формулі (17) або $\frac{\varepsilon\delta\sqrt{n}}{\sigma_\theta}$ у формулі (26) також мають бути малими.

7. Спрощений підхід до задачі

Передбачається, що $t_{\varphi,1}, t_{\varphi,2}, t_{2\pi,1}, t_{2\pi,2}$ – урізані гаусові випадкові величини, обмежені постійною S. Тоді з першого пункту цього параграфу випливає:

$$\Delta\varphi=\frac{\theta}{2\pi+\eta_1}, \quad (28)$$

де $\theta=\varphi\omega_0(t_{2\pi,2}-t_{2\pi,1})-2\pi\omega_0(t_{\varphi,2}-t_{\varphi,1})$,

тобто $|\theta|<2S[\varphi\omega_0+2\pi\omega_0]=S_\theta, \eta_1=\omega_0(t_{2\pi,2}-t_{2\pi,1})$,

отже $|\eta_1|\leq2S\omega_0=S_{\eta1}$.

Якщо $S_\theta<2\pi$ і $S_\eta<2\pi$, то, розкладаючи у збіжний ряд Тейлора, отримуємо:

$$\Delta\varphi=\frac{\theta}{2\pi}+\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\theta\eta_1^K(-1)^K}{(2\pi)^{K+1}},$$

$$\left|\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\theta\eta_1^K(-1)^K}{(2\pi)^{K+1}}\right|\leq\sum_{K=1}^{\infty}\frac{S_\theta S_{\eta1}^K}{(2\pi)^{K+1}}=\frac{S_\theta S_{\eta1}}{(2\pi)^2\left(1-\frac{S_{\eta1}}{2\pi}\right)}. \quad (29)$$

Якщо $\frac{S_\theta S_{\eta1}}{(2\pi)^2\left(1-\frac{S_{\eta1}}{2\pi}\right)}$ мале настільки, що цією похибкою можна знехтувати, то наближено можна вважати, що $\Delta\varphi=\frac{\theta}{2\pi}$ – гаусова випадкова величина $M\Delta\varphi=0$, $D\Delta\varphi=\sigma_\theta^2/(2\pi)^2$.

Зауваження 3. У випадку виразу з реверсом, тобто коли визначають, крім кута φ і додатковий кут $2\pi-\varphi$, за яким потім обчислюють φ і результати спостережень усереднюють, справедливі всі попередні результати, тільки треба брати наступні значення σ_θ^2 і σ_η^2:

$$\sigma_\theta^2=$$
$$=\frac{1}{4}\omega_0\left[\left(\sigma_{2\pi,1}^2+\sigma_{2\pi,2}^2\right)\cdot\left(2\varphi^2+4\pi^2-4\pi\varphi\right)+8\pi^2\left(\tau_{\varphi1}^2+\tau_{\varphi2}^2\right)\right], \quad (30)$$

$$\sigma_\eta^2=\frac{1}{2}{\omega_0}^2\left(\tau_{2\pi1}^2+\tau_{2\pi2}^2\right). \quad (31)$$

Висновки

1. Похибку вимірювання кутів представлено у вигляді випадкових гаусових величин θ та η. Приведено значення їх моментів $M\theta=0$, $M\eta=2\pi$, дисперсій, гаусовий вектор, представлено у вигляді лінійного перетворення гаусового вектора з незалежними компонентами. Виведено вираз для густини випадкових величин як у загальному випадку, так і у окремих випадках.
2. Виведено вираз для розподілу густину $\rho_{\Delta\varphi}(z)$ випадкової величини $\Delta\varphi$.
3. Проведено оцінку ймовірності густини розподілу похибки використовуючи наближені методи для обчислення інтервалу.
4. Проведено оцінку ймовірності густини розподілу похибки при багатократних вимірюваннях.

Література

1. Автоматизированный гониометр на основе кольцевого лазера. А.И. Вангорихин, И.И. Зайцев, «ОМП», 1982, №9, с. 28-31.
2. Афанасьев В.А. Оптические измерения: Учебник для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1981. – 229 с.
3. Оптические приборы в машиностроении. Справочник. -М.: Машиностроение, 1974. - 238 с.
4. Кирилловский В.К. Оптические измерения. Часть 3. Функциональная схема прибора оптических измерений. Типовые узлы. Оптические измерения геометрических параметров. – СПб.: ГУ ИТМО. 2005.- 67 с.
5. Гіхман Й.І.,Скороход А.В., Ядренко М. Теорія ймовірностей і математична статистика, К.: Вища школа, 1988, – 408 с.