3) розрахунок елементів матриці відстаней;
4) розрахунок коефіцієнтів ієрархії;
5) множення стандартизованої матриці на коефіцієнти ієрархії;
6) розрахунок еталонної точки розвитку;
7) розрахунок вектора відстаней між елементами стандартизованої матриці й еталонною точкою;
8) розрахунок показника рівня розвитку об'єкта.

Література

1. Czekanowski J. Zarys metod statystycznych w zastosowaniu do antropologii / J. Czekanowski. – Warszawa, 1913. – 190 p.
2. Majewski K. Proba zastosowania metody taksonomicznej do badan nad rozmieszczeniem systemow rolniczych w woj. Olsztynskim / K. Majewski. – Olsztyn: Zeszyty Naukowe WSR, 1962. – Z.4. – 201 p.
3. Florek K. Taksonomia wroclawska. / K. Florek, J. Zukaszewicz, J. Perkal, H. Steinhaus, S. Zubrzycki. – Przeglad Antropologiczny, 1951. – T. XVII. – 133 p.
4. Hellwig Z. Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podzialu krajow ze wzgledu na poziom ich rozwoju i strukture wykwalifikowanych kadr / Z. Hellwig. – Przeglad Statistyczny, 1968. – N4. – 211 p.
5. Елисеева И.И. Группировка, корреляция, распознавание образов [Текст] / И.И. Елисеева, В.О. Рукавишников. – М.: Статистика, 1977. – 144 с.
6. Терехина А.Ю. Анализ данных методами многомерного шкалирования [Текст] / А.Ю. Терехина. – М.: Наука, 1986. – 167 с.
7. Podolec B. Studium z zakresu ustalania rejonow konsumpcyjnych w Polsce / B. Podolec, K. Zajac. – Przeglad Statystyczny, 1970. – N1. – 178 p.
8. Steczkowski J. Zasady i metody rejonizacji produkcji rolniczej / J. Steczkowski. – Warszawa: PWRiL, 1966. – 199 p.
9. Bukietynski W. Uwagi o dyskryminacji zbiorow skonczonych / W. Bukietynski, Z. Hellwig, U. Krolik, A. Smoluk. – Wroclaw: Prace Naukowe WSE, 1969. – Z.21. – 217 p.
10. Hellwig Z. The selection of a set of "core" indicators of socio-economic development / Z. Hellwig. – UNESCO, 1972. – 117 p.
11. Pluta W. Przyczynek do grafowej metody klasyfikacji cech / W. Pluta. – Wroclaw: Prace Naukowe WSE, Z.33, 1972. – 191 p.
12. Веслав П. Сравнительный многомерный анализ в экономических исследованиях [Текст] / П. Веслав. – М.: Статистика, 1980. –151с.

УДК 656.02.2

ПОШУК НАЙКОРОТШИХ ШЛЯХІВ У МІСЬКИХ МАРШРУТНИХ МЕРЕЖАХ

О.Ф. Кузькін
Кандидат технічних наук, доцент
Кафедра транспортних технологій
Запорізький національний технічний університет
вул. Жуковського, 64, м. Запоріжжя, Україна, 69063
Контактний тел.: (061) 769-84-40, 067-686-52-88
E-mail: horz@ukr.net

Подана загальна постановка задачі знаходження найкоротших шляхів у міських маршрутних мережах. Запропонована методика пошуку найкоротшого за часом шляху пересування пасажира з урахуванням тривалості очікування транспорту та пересаджень на шляху прямування

Ключові слова: маршрутна мережа, найкоротший шлях, пересадження

Представлена общая постановка задачи поиска кратчайших путей в городских маршрутных сетях. Предложена методика поиска кратчайшего по времени пути перемещения пассажира с учетом времени ожидания транспорта и пересадок на пути следования

Ключевые слова: маршрутная сеть, кратчайший путь, пересадки

A general formulation of search problem the shortest paths in public transport networks is presented. The technique of finding the shortest path by time in route for passengers, taking into account the waiting time and transfers on the route is suggested

Key words: traffic network, the shortest path, transfers

1. Вступ

При проектуванні маршрутних мереж транспорту загального користування у містах, їх оптимізації, розподілі пасажиропотоків по ділянках маршрутної мережі постає задача визначення найкращих у деякому сенсі шляхів прямування пасажирів між вершинами маршрутної мережі, які у загальному випадку представляють собою транспортні мікрорайони чи існуючі зупинки громадського транспорту. Такий шлях пересування може здійснюватися одним чи декількома видами транспорту з використанням одного чи декількох маршрутів (тобто, з пересадженнями або без них).

Задача пошуку найкращого шляху пересування на маршрутній мережі може бути сформульована як пошук шляху, який містить у собі дві визначені вершини мережі і забезпечує оптимальне значення цільової функції, що відбиває ефективність процесу пересування з точки зору пасажира і, можливо, ефективність маршрутної мережі в цілому.

У більшості випадків таке пересування можна здійснити декількома варіантами, кількість яких у реальних маршрутних мережах міст може бути досить великою. Кожен пасажир обирає спосіб і шлях пересування на підставі своїх власних міркувань, але переважній більшості пасажирів при цьому виборі властиве прагнення мінімізувати загальну тривалість пересування (з урахуванням тривалості піших переходів та очікування транспорту), грошові витрати на його реалізацію та кількість пересаджень на шляху прямування.

Пошук найкращого шляху на мережі є класичною комбінаторною оптимізаційною задачею, яка постає у задачах оптимального планування різних галузей знань. Зважаючи на значну кількість вершин і маршрутів у маршрутних мережах великих міст, для свого рішення вона потребує ефективних з обчислювальної точки зору алгоритмів.

2. Постановка задачі і аналіз публікацій

Проектування і оптимізація маршрутної мережі пасажирського транспорту (ММПТ) загального користування у містах є складною комбінаторною та NP–повною з обчислювальної точки зору задачею [1, 2]. Інакше кажучи, знайти оптимальне рішення такої задачі у загальному випадку можна тільки шляхом повного перебору всіх можливих варіантів рішень. Здійснити такий перебір у більшості практичних задач є неможливим через їх велику розмірність. Крім того, при цьому доводиться враховувати низку технічних і технологічних обмежень.

Практична неможливість отримання оптимального рішення при проектуванні ММПТ спонукала появу низки методик, побудованих на пошукові наближено оптимальних (раціональних) рішень з використанням евристичних, метаевристичних та комбінаторних методів [3, 4]. Кількість варіантів ММПТ, формованих в процесі пошуку раціонального рішення з використанням наближених методів значно скорочується, але все ж таки залишається великим. При цьому оцінка кожного з них потребує виконання низки трудомістких обчислювальних процедур, одною з яких є розподіл пасажирських кореспонденцій на транспортній мережі. Найпоширенішим з методів розподілу пасажиропотоків на мережі є накладення пасажирських кореспонденцій по найкращим з точки зору пасажира шляхам прямування. У якості критеріїв вибору такого шляху найчастіше виступають тривалість пересування, його вартість, кількість пересаджень на шляху прямування чи їх зважена комбінація [4]. Будемо надалі називати такий шлях *найкоротшим* у широкому розумінні цього поняття стосовно заданого критерію оптимальності.

Дамо постановку задачі пошуку найкращого шляху у загальному вигляді. Транспортна мережа може бути представлена у вигляді графа $G=(V,E)$, де $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ - кінцева множина вершин графа (центри тяжіння транспортних районів або існуючі зупинки ММПТ), $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_M\}$ - кінцева множина ребер графа, які представляють спрямовані транспортні зв'язки між його вершинами. Маршрут транспорту загального користування може бути поданий у вигляді шляху на транспортній мережі, який подається послідовністю вершин (або ребер) графа, тобто $r_k=\{j_k^{(1)},j_k^{(2)},\ldots,j_k^{(z_k)}\}$, де z_k - кількість вершин, що обслуговуються маршрутом r_k. Сукупність всіх маршрутів на транспортній мережі утворює множину маршрутів $R=\{r_k \mid k=1,\ldots K\}$.

Маршрутна мережа представляється зваженим орієнтованим мультиграфом $G_R=(V,\tilde{E})$, кожна з дуг якого $\tilde{e}_k^{(i)}$ представляє собою спрямований і –ий перегін маршруту r_k, тобто $\tilde{e}_k^{(i)}=(j_k^{(i)},j_k^{(i+1)})$, $i=1,\ldots z_k-1$. Вага дуги c_{ijk} (взагалі $c_{ijk}\neq c_{jik}$) є довжиною перегону, тривалістю або вартістю пересування між суміжними вершинами $j_k^{(i)}$ та $j_k^{(i+1)}$ на маршруті r_k.

На множині вершин графа маршрутної мережі задані:

1) множина $T=\{\tau_{ijk}\}$, елементи якої виражають вагу (тривалість, вартість) пересадження з маршруту r_i на маршрут r_j ($r_i,r_j\in R$) у вершині v_k (у загальному випадку $\tau_{ijk}\neq\tau_{jik}$);

2) множина $W=\{w_{ik}\}$, елементи якої виражають вагу (тривалість очікування, вартість) посадки у транспортний засіб маршруту r_k у вершині v_i ($v_i\in r_k$).

Зауважимо, що граф маршрутної мережі повинен бути зв'язним, тобто, будь-які його дві довільні вершини можна зв'язати принаймні одним шляхом. Найкоротшим шляхом між двома обраними вершинами v_s (початковою) та v_d (кінцевою) будемо називати шлях $L=\{v_s,\ldots,v_d\}$, який мінімізує узагальнені сумарні витрати на посадку у початковій вершині, пересування, та пересадження на шляху прямування

$$F(L)=C_1\underset{r_k\in R}{w_{sk}}+C_2\sum_{\substack{(v_i,v_j)\in L\\ r_k\in R}}c_{ijk}+C_3\sum_{\substack{r_i,r_j\in R\\ v_k\in L}}\tau_{ijk}\rightarrow\min. \tag{1}$$

де C_1, C_2, C_3 - відносна вага відповідно, витрат на посадку у початковій вершині, пересування та пересадження, причому $C_1+C_2+C_3=1$.

У роботі [2] подана методика пошуку найкоротшого шляху між вершинами з урахуванням тривалості пересаджень на шляху прямування, які у цьому випадку є вагами відповідних вершин. Таким чином час, що витрачається на пересадження, залежить тільки від пункту, у якому воно відбувається і не залежить від маршрутів, між якими пасажир здійснює пересадження. Для рішення пропонується використання методу потенціалів.

У роботі [3] пропонується методика пошуку найкоротшого шляху з врахуванням тривалості пересаджень, побудована на методі динамічного програмування. Однак, при цьому висувається припущення, що шлях між двома суміжними на маршруті пунктами завжди коротший ніж шлях між ними через будь-які проміжні пункти.

Більшість робіт іноземних науковців [4] пропонує застосовувати для пошуку найкоротших шляхів алгоритми Дейкстри або Флойда-Воршелла та їх модифікації [5]. Однак ці досить ефективні у обчислювальному сенсі алгоритми пошуку шляхів не можуть бути застосовані безпосередньо для орієнтованих мультиграфів, зважених за вершинами і ребрами.

Таким чином, існуючі методики і алгоритми пошуку найкоротших шляхів на маршрутній мережі міського транспорту загального користування не враховують те, що:

1) тривалість пересування пасажира спільним для декількох маршрутів перегоном у загальному випадку залежить від вибраного для цього пересування маршруту. Це цілком природно, оскільки таке пересування може бути здійснене декількома видами транспорту з різними технічними швидкостями руху (наприклад, тролейбусом чи маршрутним таксі);

2) тривалість пересадження залежить від маршрутів, між якими це пересадження відбувається. Як відомо, тривалість пересадження складається з тривалості пішого переходу між зупинками змінюваних маршрутів та тривалості очікування посадки у транспортний засіб маршруту, на який виконується пересадження. Перша складова залежить від взаємного просторового розташування зупинок цих маршрутів, які можуть бути суміщеними чи не суміщеними. Друга складова визначається інтервалом руху на маршруті, на який відбувається пересадження. Оскільки інтервал руху для різних маршрутів у загальному випадку є різним, то з урахуванням просторового розміщення їх зупинок, тривалість пересадження є величиною, що не є постійною для даної вершини мережі, а залежить від номерів маршрутів, між якими відбувається пересадження.

Розробці методики пошуку найкоротшого шляху у загальному вигляді, який вільний від зазначених недоліків, присвячена дана стаття.

3. Методика рішення задачі

Методика пошуку найкоротших шляхів полягає у виконанні чотирьох кроків, які проілюструємо на прикладі. Задана транспортна мережа G , що має $N=7$ вершин (рис. 1, а). На транспортній мережі задані $K=3$ маятникових маршрути перевезень пасажирів: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,5\}$, $C=\{2,3,5,6,7\}$.

Крок 1. Побудова графа маршрутної мережі

Граф маршрутної мережі G_R , який відповідає заданій множині маршрутів на транспортній мережі, наведений на рис. 1,б. У ньому кожний перегін деякого маршруту представлений у вигляді пари різноспрямованих дуг, вага яких дорівнює тривалості пересування цим перегоном з використанням цього маршруту по відповідним напрямкам руху. Наприклад, між суміжними вершинами 2 та 3 можна проїхати з використанням одного з двох маршрутів - А чи В. Перегін 2–3 кожного з цих двох маршрутів представляємо у вигляді пари різноспрямованих дуг, які мають ваги: c_{23A} і c_{32A} для маршруту А, c_{23B} і c_{32B} для маршруту В.

Крок 2. Побудова графа вузлових вершин

Будемо називати *вузловими* вершини, через які проходить більш ніж один маршрут. Інші вершини будемо називати *лінійними*. На підставі графу маршрутної мережі побудуємо граф вузлових вершин G_N (рис. 2).

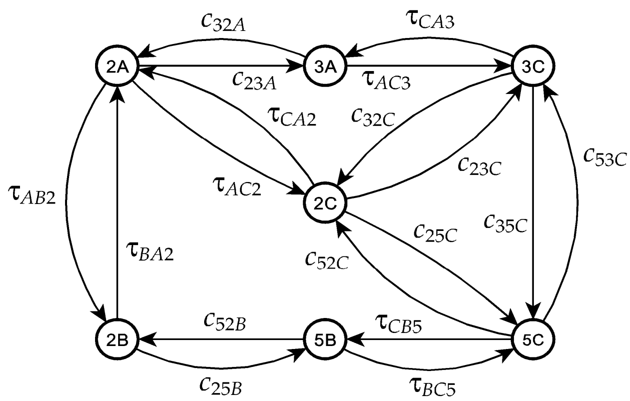
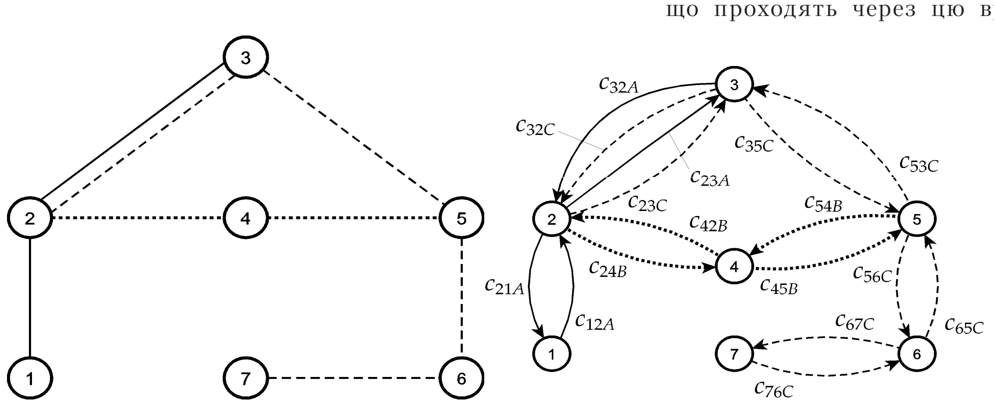


Рис. 2. Граф вузлових вершин

Множину вершин цього графа утворюють репліковані вузлові вершини графа маршрутної мережі. Кожна вузлова вершина графа маршрутної мережі G_R представляється у графі G_N множиною вершин, кількість яких дорівнює кількості маршрутів, що проходять через цю вузлову вершину. Таким чином, кожна вершина графа G_N при реплікації отримує дві позначки: номер вершини у відповідності до її номеру у графі маршрутноїмережі G_R і номер маршруту. Наприклад, через вершину 2 графа маршрутної мережі проходять *три* маршрути - А, В, С. У графі вузлових вершин реплікуємо її на *три* вершини - 2А, 2В та 2С.



а) б)

Рис. 1. Топологічне представлення транспортної (а) і маршрутної (б) мереж

Послідовно переглядаючи всі пари вершин графу вузлових вершин G_N вводимо до нього зважені спрямовані дуги за такими правилами:

а) якщо деяка пара вершин має *однаковий номер маршруту* та *різні номери вершин* то вводимо між ними пару різноспрямованих дуг, ваги яких чисельно дорівнюють витратам на пересування між цими вершинами на цьому маршруті без пересаджень у відповідності до напрямку пересування. Наприклад, пара вершин 2С та 5С має однаковий номер маршруту (обидві вершини належать маршруту С). На графі вузлових вершин вводимо між ними пару дуг, ваги яких дорівнюють витратам на пересування між вершинами 2 та 5 з використанням маршруту С, тобто $c_{25C}=c_{23C}+c_{35C}$, $c_{52C}=c_{53C}+c_{32C}$.

б) якщо деяка пара вершин має *однаковий номер вершини*, але *різні номери маршрутів*, то вводимо між ними пару різноспрямованих дуг, ваги яких чисельно дорівнюють витратам на пересадження між цими маршрутами в даній вузловій вершині у відповідності до напрямку пересадження. Наприклад, вершини 2А та 2С графу вузлових вершин мають однаковий номер вершини (2), але різні номери маршрутів. Вводимо між цими вершинами пару різноспрямованих дуг, ваги яких дорівнюють витратам на пересадження з маршруту А на маршрут С (τ_{AC2}) і навпаки (τ_{CA2}) у вершині 2.

Крок 3. Розширення графа вузлових вершин введенням початкової та кінцевої вершин

Додаємо до графа вузлових вершин початкову вершину v_s та кінцеву вершину v_d і додаткові дуги за такими правилами:

а) якщо *початкова* вершина v_s є *вузловою*, то з'єднуємо її спрямованими від неї дугами з *усіма вузловими вершинами*, що мають такий же номер. Вага кожної доданої дуги чисельно дорівнює витратам на очікування транспорту маршруту, номер якого має відповідна вузлова вершина. Наприклад, якщо початковою (тобто такою, від якої шукаємо найкоротший шлях) є вузлова вершина 2, то додаємо до графу вузлових вершин вершину 2 і три спрямовані дуги, що з'єднують її з вузловими вершинами 2А, 2В та 2С (рис. 3, а). Вага кожної з дуг дорівнює витратам на очікування посадки у вершині 2 на маршрути А (w_{2A}), В (w_{2B}) та С (w_{2C});

б) якщо *початкова* вершина v_s є *лінійною*, то з'єднуємо її спрямованими від неї дугами з *найближчими двома* вузловими вершинами маршруту (однією, якщо вершина v_s є кінцевим пунктом деякого маршруту), якому вона належить, у кожному з напрямів руху. Ваги доданих дуг дорівнюють сумі витрат на очікування посадки у початковій вершині і витрат на пересування від початкової до найближчих вузлових вершин маршруту. Наприклад, якщо початковою є лінійна вершина 4 маршруту В, то додаємо до графу вузлових вершин вершину 4 та дві спрямовані дуги, що з'єднують цю вершину з найближчими вузловими вершинами 2 та 5 на маршруті В (рис. 3, б). Вага однієї з цих дуг дорівнює сумі витрат на очікування посадки у вершині 4 та витрат на пересування від вершини 4 до вершини 2, тобто $w_{4B}+c_{42B}$. Вага іншої відповідає пересуванню пасажира від вершини 4 до вузлової вершини 5 і дорівнює $w_{4B}+c_{45B}$.

в) якщо *кінцева вершина* v_d є *вузловою*, то з'єднуємо її спрямованими до неї дугами нульової ваги з усіма вузловими вершинами, що мають такий же номер. Наприклад, якщо кінцевою (тобто такою, до якої шукаємо найкоротший шлях) є вузлова вершина 3, то додаємо до графу вузлових вершин вершину 3 і з'єднуємо її спрямованими до неї дугами нульової ваги з вершинами 3А та 3С (рис. 3, в);

г) якщо *кінцева* вершина v_d є *лінійною*, то з'єднуємо її спрямованими до неї дугами з *найближчими двома* (однією, якщо вершина v_d є кінцевим пунктом деякого маршруту) вузловими вершинами маршруту, якому вона належить, у кожному з напрямів руху. Ваги доданих дуг дорівнюють витратам на пересування від найближчих вузлових вершин маршруту до кінцевої вершини. Наприклад, якщо кінцевою є лінійна вершина 7 маршруту С, то з'єднуємо її спрямованою до неї дугою з найближ-

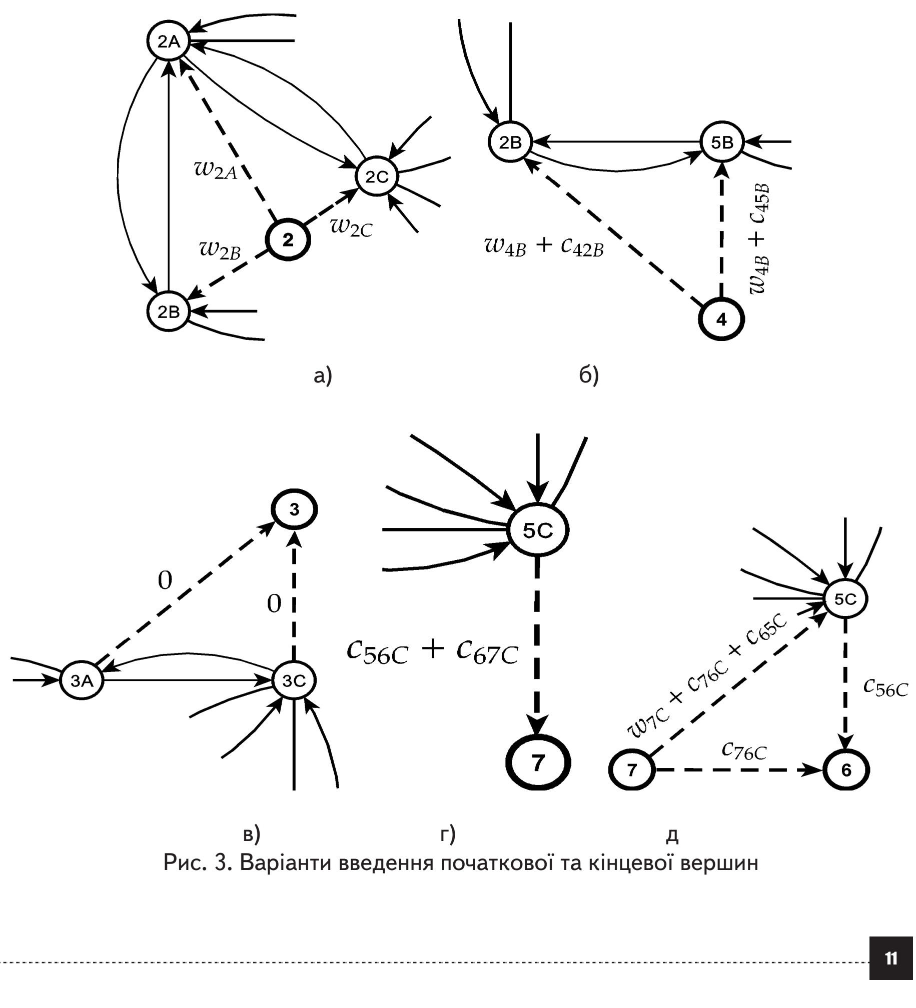


Рис. 3. Варіанти введення початкової та кінцевої вершин

чою вузловою точкою цього маршруту 5С. Вага дуги дорівнює витратам на пересування від вузлової вершини 5 до лінійної вершини 7 маршрутом С, тобто $c_{56C} + c_{67C}$ (рис. 3, г);

д) очевидно, якщо між початковою v_s та кінцевою v_d лінійними вершинами не існує жодного безпересадочного шляху, найкоротший шлях між ними обов'язково пройде через бодай одну вузлову вершину. Інакше, між ними може існувати найкоротший шлях, який не проходить через жодну з вузлових вершин. Тому, якщо *початкова та кінцева лінійні належать одному маршруту*, то у граф вузлових вершин необхідно додати ще одну дугу, спрямовану від вершини v_s до вершини v_d, вага якої дорівнює витратам на пересування між цими вершинами на спільному для них маршруті (наприклад, для пошуку найкоротшого шляху між лінійними вершинами 7 та 6, які належать маршруту С, як показано на рис. 3, д).

Крок 4. Пошук найкоротшого шляху на розширеному графі вузлових вершин

В результаті виконання дій кроку 3 отримуємо розширений граф вузлових вершин. На розширеному графі вузлових вершин відшукується найкоротший шлях з використанням одного з алгоритмів пошуку найкоротших шляхів. Оскільки ваги дуг графа є невід'ємними, найбільш доцільним з точки зору ефективності обчислень буде використання алгоритму Дейкстри [5] з використанням в якості початкової вершини v_s. При цьому, робота алгоритму завершується, коли кінцева вершина v_d отримує постійну помітку. В результаті отримаємо послідовність вершин, через які проходить найкоротший шлях, та його довжину. Якщо дві послідовні вершини на знайденому найкоротшому шляху мають однаковий номер вершини у графі вузлових вершин, то у вершині з цим номером виконується зміна маршруту (пересадження).

Висновки

Запропонований алгоритм пошуку найкоротших відстаней на маршрутних мережах враховує витрати пасажира на очікування посадки у початковому пункті, відмінності у тривалості пересування між суміжними вершинами маршрутної мережі в залежності від маршруту, витрати на пересадження на шляху прямування в залежності від змінюваних маршрутів і може бути використаний в задачах проектування і оптимізації маршрутних мереж, розподілу пасажирських кореспонденцій на маршрутних мережах.

Література

1. Magnanti, T. L. Network design and transportation planning: models and algorithms / T. L. Magnanti, R. T. Wong // Transportation Science .- 1984.- №18(1) .- P. 1–55.
2. Геронимус, Б. Л. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте [Текст] / Б. Л. Геронимус.- М.: Транспорт, 1982.- 192 с.
3. Хрущев, М. В. Исследование методов маршрутизации автобусного транспорта в городах : дис....д-ра экон. наук / М. В. Хрущев.- М., 2000.- 206 с.
4. Guihaire, V. Transit network design and scheduling: A global review [Текст] / V. Guihaire, J. Hao // Transportation Research.- 2008.- Vol. 42, №10.- P. 1251–1273.
5. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ [Текст] / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест ; под. ред. И. В. Красикова .- 2-е изд. - М.: Вильямс, 2005 .- 1296 С.