

2. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник / Под ред. Н.Д. Егупова; издание 2-ое, стереотипное. - М.:Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. - 744 с.
3. Д. А. Юрков. Синтез нейронных сетей с фрактальной структурой. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. №4-3 (40) - Харьков: Технологический центр, 2009 г. С 39-44.
4. Д.А. Юрков. Метод синтеза нейросетевых модельных структур. // Вісн. Східноукр. нац. ун-ту. - 2009. - № 5 (135). - С.115-122.
5. Р. Дуда, П. Харт. Распознавание образов и анализ сцен. - М.:Мир, 1976. - 512 с.
6. Гаскаров Д.В., Шаповалов В.И. Малая выборка. - М.: Статистика, 1978. - 248 с.

*У статті розглядається метод синтезу багатозв'язних регуляторів, заснованих на VARMAX-моделі, для керування технологічним процесом вирощування органічних монокристалів. Приведено використаний алгоритм структурної і параметричної ідентифікації VARMAX-моделі, що відповідає даному процесу*

*Ключові слова: органічний монокристал, метод Бриджмена-Стокбаргера, кристалізація, віджиг, оптимальне керування, синтез регулятора, VARMAX-модель*

*В статье рассматривается метод синтеза многосвязных регуляторов, основанных на VARMAX-модели, для управления технологическим процессом выращивания органических монокристаллов. Приведен использованный алгоритм структурной и параметрической идентификации VARMAX-модели, соответствующей данному процессу*

*Ключевые слова: органический монокристалл, метод Бриджмена-Стокбаргера, кристаллизация, отжиг, оптимальное управление, синтез регулятора, VARMAX-модель*

*In this article the multivariate controllers synthesis method founded on VARMAX-models for governing of organic monocrystals growing technological process is considered. The structural and parametrical used algorithm of VARMAX-models identification is represented*

*Key words: organic monocrystal, Bridgman-Stockbarger method, crystallization, anneal, optimal control, controller synthesis, VARMAX-model*

УДК 658.012

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СИНТЕЗА МНОГОСВЯЗНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

**А.Д. Тевяшев**

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой\*

**В.Н. Щелкалин**

Аспирант\*

\*Кафедра прикладной математики

Харьковский национальный университет

радиоэлектроники

пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61200

**Ю.М. Епифанов**

Кандидат технических наук\*\*

**Ю.С. Козьмин**

Инженер\*\*

\*\*Институт сцинтилляционных материалов НАН

Украины

пр. Ленина, 60, г. Харьков, Украина, 61001

### 1. Введение

Органические монокристаллы (ОМК) — это системы, обладающие наилучшими характеристиками для задач спектроскопии короткопробежных заряженных частиц и быстрых нейтронов. Наиболее широкое рас-

пространение получили кристаллы стильбена и партерфенила. Последний является наиболее эффективным органическим сцинтиллятором с наилучшими механическими характеристиками [8].

Технология получения органических монокристаллов состоит из следующих основных стадий:

очистка исходного сырья, выращивание (кристаллизация) монокристаллов, отжиг кристаллов.

Органические кристаллы выращиваются методом Бриджмена-Стокбаргера в ростовых ампулах на заправку [7].

Технологическая установка для выращивания ОМК из расплава (рис. 1) содержит ампулу 1 с кристаллизующим веществом, расположенную в вертикальной плоскости двухзонной печи, которая представляет собой стеклянную трубу 2, укрепленные на ней верхний 3 и нижний 4 нагреватели, систему 5 теплоизоляции нижнего нагревателя 4, разделительную диафрагму 6 "горячей" и "холодной" камер, гибкий металлический трос 7 с грузом 8 его натяжения, систему шкивов 9, двигатель 10 перемещения ампулы 1 с блоком управления 11, энкодер 12 на валу двигателя, последовательно соединенные термопары 13, 14 и регуляторы температуры 15, 16 верхнего 3 и нижнего 4 нагревателей, блок 17 программно-логического управления, устройство 18 отображения информации. Ростовая печь укреплена на подставке 19.

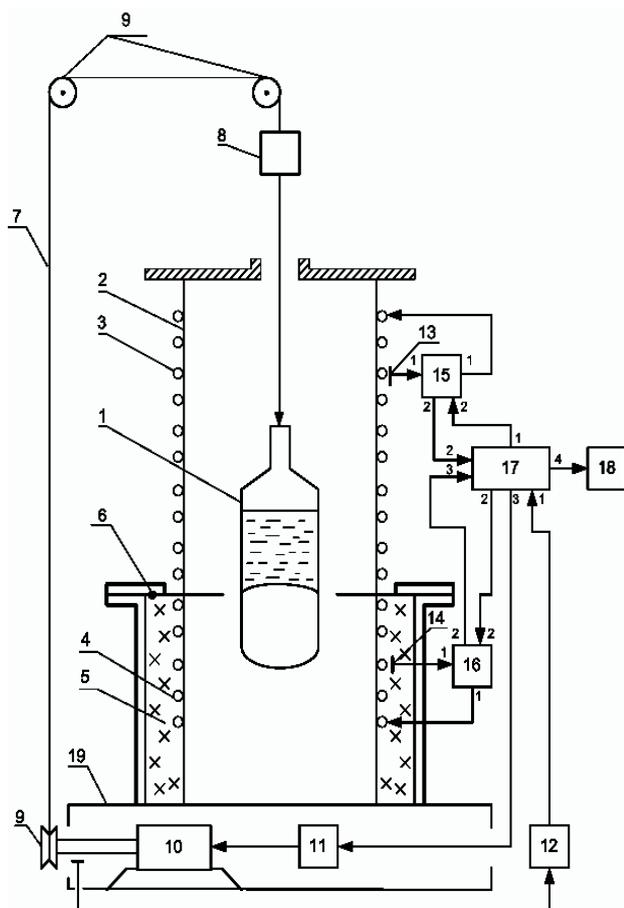


Рис. 1. Схема технологической установки для выращивания органических кристаллов методом Бриджмена-Стокбаргера

Установка работает следующим образом. Для регулирования роста ОМК из расплава в ампуле диаметром 80 мм и длиной цилиндрической части 100 мм, кварцевую ампулу с загруженным сырьем помещают в верхнюю камеру. Кристаллизующее вещество в ампуле

нагреваются тепловым узлом, состоящим из верхнего и нижнего нагревателей.

В процессе роста ОМК обеспечивается плавное, с автоматическим отсчетом величины, перемещение ампулы вниз строго по вертикальной оси. Система управления температурными полями в верхней и нижней камерах является автоматизированной, включает в себя два независимых PID-регулятора для каждой из камер и предусматривает вмешательство оператора для перестройки параметров регуляторов при переходе между этапами кристаллизации и отжига. Форма теплового поля при управляемых в процессе роста ОМК технологических режимах должна обеспечивать требуемый перегрев расплава, стабильный градиент температуры на фронте кристаллизации, стабильность его положения и однородную по температуре зону охлаждения выросшего кристалла. После выращивания включают ускоренное перемещение ампулы для выгрузки ОМК, повторной загрузки сырья и переходят к выращиванию следующего ОМК.

При выращивании крупных ОМК (диаметр 80–120 мм) наблюдается следующий эффект: хотя диафрагменная перегородка, разделяющая камеры печи, существенно ослабляет конвекцию воздуха в рабочем объеме, однако, на начальной стадии выращивания, когда ростовая ампула опускается из верхней камеры в нижнюю, при перекрытии конусным дном ампулы отверстия диафрагмы возникают нестационарные конвективные потоки из-за непрерывно увеличивающейся площади экранирования пространства, соединяющего обе камеры печи. Это приводит к тому, что фронт кристаллизации вначале смещается вниз относительно первоначального положения, затем поднимается вверх, по мере прохождения конического дна ампулы через диафрагму, в результате чего меняется форма фронта кристаллизации и скорость выращивания ОМК. Фронт кристаллизации имеет вогнутую форму, а скорость кристаллизации вначале уменьшается, а затем возрастает, причем более чем в два раза. При этом происходит нарушение условий торцевого теплоотвода и однородности теплофизических условий кристаллизации на поверхности раздела кристалл-расплав и, следовательно, ухудшается качество монокристалла.

Построение динамических математических моделей физических процессов кристаллизации ОМК связано со значительными математическими проблемами, но, даже преодолев их, построить адекватную модель и оценить ее параметры только по конструктивным параметрам технологической установки, пространственному расположению ампулы и по точечным значениям температур верхней и нижней камер печи практически невозможно. Это приводит к необходимости рассматривать технологический процесс кристаллизации ОМК не как детерминированный, а как стохастический управляемый процесс. Более того, при выращивании крупных ОМК возникают серьезные трудности, связанные с отжигом полученных монокристаллов, т.е. с их охлаждением от температуры выращивания до комнатной температуры. Несовершенство системы автоматизированного управления технологическим процессом выращивания ОМК приводит к тому, что при отжиге ОМК в ростовой камере сохраняются значительные осевые и радиальные тем-

пературные градиенты, которые вызывают в выращенных ОМК значительные термические напряжения. Низкая механическая прочность ОМК и значительные термические напряжения могут привести к появлению в выращенном кристалле микротрещин или даже к его механическому разрушению. Это приводит к необходимости совершенствования системы управления температурным режимом отжига ОМК.

Следовательно, установку для выращивания ОМК необходимо рассматривать как многомерный, многосвязный стохастический объект управления. Такой подход позволяет решить задачу стабилизации скорости роста кристалла, а, значит, и повысить его качество за счет взаимосвязанного управления тепловыми условиями кристаллизации. Актуальной является и задача определения оптимального режима отжига крупногабаритных ОМК, для решения которой необходимы разработка математических моделей температурных напряжений в кристаллах в зависимости от осевых и радиальных градиентов температур и совершенствование на этой основе системы оптимального управления температурным режимом отжига ОМК.

Практическая эксплуатация ОМК показывает, что влияние дестабилизирующих факторов на сроки работоспособности сцинтилляторов, а также изменения во времени радиационной стойкости и стабильности, термостабильности, механической прочности, гигроскопичности сцинтилляционных материалов являются не менее важными показателями, чем сцинтилляционные характеристики.

Наиболее ценные результаты по изучению температурных напряжений в ОМК до сих пор получены в основном эмпирическим путем [8]. Математическое описание, как и вычисление температурных напряжений, все еще связано со значительными трудностями. Важнейшей является информация, полученная на основе температурно-временных кривых процесса отжига для различных объемов реакционной смеси и площадей охлаждающих поверхностей. Подобная информация помогает объяснить происхождение внутреннего напряжения в сцинтилляционных композициях, рассмотреть их с точки зрения образования полимерной структуры и сформулировать требования к температурным условиям ее получения.

Однако проводимые в настоящее время экспериментальные исследования не достаточны для получения продукции, отвечающей современным требованиям рынка ОМК. Необходимо изучение процесса образования внутренних напряжений на основе математического моделирования.

Таким образом, для любой технологии производства ОМК актуальными являются задачи определения оптимальных режимов выращивания и отжига ОМК, для решения которых необходимы:

- исследования на основе математических моделей физических процессов кристаллизации для определения требований к системе управления температурными режимами кристаллизации и отжига ОМК;

- синтез системы оптимального управления температурными режимами выращивания и отжига ОМК.

Данная работа посвящена методам синтеза системы оптимального управления температурными ре-

жимами кристаллизации и отжига ОМК и оценки их эффективности по экспериментальным данным.

## 2. Класс моделей

Синтез системы оптимального управления температурными режимами кристаллизации и отжига ОМК будем проводить в классе математических моделей многомерных многосвязных линейных стохастических систем вида многомерной ARMAX-модели, имеющей  $r$  входов,  $m$  выходов и  $m$  шумов [1]:

$$A(B)Y(k) = G(B)U(k) + D(B)W(k), \quad (1)$$

где

-  $A(B)$ ,  $G(B)$  и  $D(B)$  - матричные полиномы

$$A(B) = I + \sum_{j=1}^{n_a} A_j B^j, \quad G(B) = \sum_{j=0}^{n_g} G_j B^j, \quad D(B) = I + \sum_{j=1}^{n_d} D_j B^j$$

степеней  $n_a$ ,  $n_g$  и  $n_d$  соответственно;

$$U(k) = [u_1(k) \quad u_2(k) \quad \dots \quad u_r(k)]^T,$$

$$Y(k) = [y_1(k) \quad y_2(k) \quad \dots \quad y_m(k)]^T,$$

$W(k) = [w_1(k) \quad w_2(k) \quad \dots \quad w_m(k)]^T$  - векторы входов, выходов и шумов системы соответственно для  $k$ -го шага. Матричные полиномы выровняем по максимальному порядку  $n_p$  одного из них, тогда  $A_j$  [ $m \times m$ ],  $G_j$  [ $m \times r$ ] и  $D_j$  [ $m \times m$ ],  $j = \overline{1, n_p}$  - матрицы коэффициентов системы, которые необходимо оценить по экспериментальным данным. Алгоритм линейного многоэтапного метода оценивания структуры и параметров VARMAX-модели будет приведен далее.

Модель (1) позволяет адекватно описывать чрезвычайно широкий класс многомерных, многосвязных стохастических управляемых процессов [1]. Именно поэтому синтез системы оптимального управления технологическим процессом производства ОМК будем вести именно в этом классе.

## 3. Метод синтеза системы оптимального управления температурными режимами кристаллизации и отжига ОМК

В качестве метода синтеза системы оптимального управления температурными режимами кристаллизации и отжига ОМК будем использовать принцип обобщенного регулирования с прогнозированием [6].

Как показано в [6], значения выходов системы для произвольного такта  $k+i$  можно получить через предыдущие значения входных и выходных данных и шумов без знания значений выходов для тактов  $k, \dots, k+i-1$ :

$$\begin{aligned} Y(k+i) = & -A_1^{(i)} \cdot Y(k-1) - \dots - A_{n_p}^{(i)} \cdot Y(k-n_p) + G_0 \cdot U(k+i) + \\ & + G_0^{(i)} \cdot U(k+i-1) + \dots + G_0^{(i)} \cdot U(k) + G_1^{(i)} \cdot U(k-1) + \dots + \\ & + G_{n_p}^{(i)} \cdot U(k-n_p) + W(k+i) + D_0^{(i)} \cdot W(k+i-1) + \dots + \\ & + D_0^{(i)} \cdot W(k) + D_1^{(i)} \cdot W(k-1) + \dots + D_{n_p}^{(i)} \cdot W(k-n_p), \quad (2) \end{aligned}$$

где матрицы коэффициентов  $A_j^{(i)}$ ,  $G_j^{(i)}$  и  $D_j^{(i)}$  могут быть рекурсивно вычислены по оцененным матрицам коэффициентов  $A_j$ ,  $G_j$  и  $D_j$ ,  $j = \overline{1, n_p}$  соответственно из выражений:

$$\begin{aligned} A_j^{(i)} &= A_1^{(i-1)} \cdot A_j + A_{j+1}^{(i-1)}, \quad j = \overline{1, n_p - 1}; \quad A_{n_p}^{(i)} = A_1^{(i-1)} \cdot A_{n_p}; \\ G_j^{(i)} &= A_1^{(i-1)} \cdot G_j + G_{j+1}^{(i-1)}, \quad j = \overline{1, n_p - 1}; \quad G_{n_p}^{(i)} = A_1^{(i-1)} \cdot G_{n_p}; \\ D_j^{(i)} &= A_1^{(i-1)} \cdot D_j + D_{j+1}^{(i-1)}, \quad j = \overline{1, n_p - 1}; \quad D_{n_p}^{(i)} = A_1^{(i-1)} \cdot D_{n_p}; \\ G_0^{(i)} &= A_1^{(i-1)} \cdot G_0 + G_1^{(i-1)}; \quad D_0^{(i)} = A_1^{(i-1)} \cdot D_0 + D_1^{(i-1)}, \end{aligned}$$

где  $A_0^{(0)} = I$ ;  $A_i^{(0)} = A_i$ ,  $i = \overline{1, n_p}$ ;  $G_i^{(0)} = G_i$ ,  $i = \overline{0, n_p}$ ;  $D_0^{(0)} = I$ ;  $D_i^{(0)} = D_i$ ,  $i = \overline{1, n_p}$ .

Пусть  $i$  изменяется от 1 до  $n_p + n_q - 1$ , где  $n_q$  - промежуточный временной шаг, тогда, основываясь на уравнении (2), можно записать следующее матричное уравнение:

$$\begin{aligned} Y_{n_p+n_q}(k) &= T_u \cdot U_{n_p+n_q}(k) + G \cdot U_{n_p}(k - n_p) - A \cdot Y_{n_p}(k - n_p) + \\ &+ T_w \cdot W_{n_p+n_q}(k) + D \cdot W_{n_p}(k - n_p), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} Y_{n_p+n_q}(k) &= \text{col}[Y(k) \quad Y(k+1) \quad \dots \quad Y(k+n_p+n_q-1)], \\ U_{n_p+n_q}(k) &= \text{col}[U(k) \quad U(k+1) \quad \dots \quad U(k+n_p+n_q-1)], \\ W_{n_p+n_q}(k) &= \text{col}[W(k) \quad W(k+1) \quad \dots \quad W(k+n_p+n_q-1)], \\ Y_{n_p}(k-n_p) &= \text{col}[Y(k-n_p) \quad Y(k-n_p+1) \quad \dots \quad Y(k-1)], \\ U_{n_p}(k-n_p) &= \text{col}[U(k-n_p) \quad U(k-n_p+1) \quad \dots \quad U(k-1)], \\ W_{n_p}(k-n_p) &= \text{col}[W(k-n_p) \quad W(k-n_p+1) \quad \dots \quad W(k-1)], \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_p & A_{p-1} & A_{p-2} & \dots & A_1 \\ A_p^{(1)} & A_{p-1}^{(1)} & A_{p-2}^{(1)} & \dots & A_1^{(1)} \\ A_p^{(2)} & A_{p-1}^{(2)} & A_{p-2}^{(2)} & \dots & A_1^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_p^{(n_p+n_q-1)} & A_{p-1}^{(n_p+n_q-1)} & A_{p-2}^{(n_p+n_q-1)} & \dots & A_1^{(n_p+n_q-1)} \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} G_p & G_{p-1} & G_{p-2} & \dots & G_1 \\ G_p^{(1)} & G_{p-1}^{(1)} & G_{p-2}^{(1)} & \dots & G_1^{(1)} \\ G_p^{(2)} & G_{p-1}^{(2)} & G_{p-2}^{(2)} & \dots & G_1^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_p^{(n_p+n_q-1)} & G_{p-1}^{(n_p+n_q-1)} & G_{p-2}^{(n_p+n_q-1)} & \dots & G_1^{(n_p+n_q-1)} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} D_p & D_{p-1} & D_{p-2} & \dots & D_1 \\ D_p^{(1)} & D_{p-1}^{(1)} & D_{p-2}^{(1)} & \dots & D_1^{(1)} \\ D_p^{(2)} & D_{p-1}^{(2)} & D_{p-2}^{(2)} & \dots & D_1^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_p^{(n_p+n_q-1)} & D_{p-1}^{(n_p+n_q-1)} & D_{p-2}^{(n_p+n_q-1)} & \dots & D_1^{(n_p+n_q-1)} \end{bmatrix},$$

$$T_u = \begin{bmatrix} G_0 & O & O & \dots & O \\ G_0^{(1)} & G_0 & O & \dots & O \\ G_0^{(2)} & G_0^{(1)} & G_0 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_0^{(n_p+n_q-1)} & G_0^{(n_p+n_q-2)} & G_0^{(n_p+n_q-3)} & \dots & G_0 \end{bmatrix},$$

$$T_w = \begin{bmatrix} D_0 & O & O & \dots & O \\ D_0^{(1)} & D_0 & O & \dots & O \\ D_0^{(2)} & D_0^{(1)} & D_0 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_0^{(n_p+n_q-1)} & D_0^{(n_p+n_q-2)} & D_0^{(n_p+n_q-3)} & \dots & D_0 \end{bmatrix}.$$

Синтез многосвязной системы оптимального управления будем осуществлять по схеме обобщенного регулирования с прогнозированием [7]. Не нарушая общности, задачу синтеза системы оптимального управления температурными режимами кристаллизации и отжига ОМК представим в виде оптимизационной задачи нахождения такого управления  $U_{n_p+n_q}(k)$ ,  $k=1, 2, \dots$ , которое обеспечивает минимум квадратичного функционала вида:

$$\begin{aligned} J(k) &= [Y_{n_p+n_q}(k) - Y_{n_p+n_q}^*(k)]^T \cdot Q \cdot [Y_{n_p+n_q}(k) - Y_{n_p+n_q}^*(k)] + \\ &+ [U_{n_p+n_q}(k)]^T \cdot R \cdot U_{n_p+n_q}(k), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$Y_{n_p+n_q}^*(k) = \text{col}[Y^*(k) \quad Y^*(k+1) \quad \dots \quad Y^*(k+n_p+n_q-1)]$  - вектор заданных (желаемых) значений выходов системы управления в моменты времени  $k, k+1, \dots, k+n_p+n_q-1$ ;  $Y_{n_p+n_q}(k) = \text{col}[Y(k) \quad Y(k+1) \quad \dots \quad Y(k+n_p+n_q-1)]$  - вектор фактических значений выходов системы для тех же моментов времени;  $Q, R$  - диагональные матрицы.

Первое слагаемое в (4) определяет дисперсию отклонений фактических значений выходов системы управления от заданных, а второе слагаемое - дисперсию управлений.

Таким образом, оптимальность синтезируемой системы управления заключается в минимизации суммы дисперсии отклонения выходов объекта управления от заданных (желаемых) значений и дисперсии управляемых переменных. Для поиска стационарной точки квадратичного функционала (4) получим выражение для производной целевой функции  $J(k)$  по управлению  $U_{n_p+n_q}(k)$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{U_{n_p+n_q}} J &= 2 \cdot T_u^T \cdot Q \cdot [G \cdot U_{n_p}(k - n_p) - \\ &- A \cdot Y_{n_p}(k - n_p) + T_w \cdot W_{n_p+n_q}(k) + \\ &+ D \cdot W_{n_p}(k - n_p) - Y_{n_p+n_q}^*(k)] + \\ &+ 2 \cdot T_u^T \cdot Q \cdot T_u \cdot U_{n_p+n_q}(k) + R \cdot U_{n_p+n_q}(k). \end{aligned} \quad (5)$$

Приравняв равенство (5) к нулю и решив полученное уравнение относительно  $U_{n_p+n_q}(k)$ , получаем выражение для вектора управления:

$$U_{n_p+n_q}^*(k) = -[T_u^T \cdot Q \cdot T_u + R]^{-1} \times \\ \times T_u^T \cdot Q \cdot [G \cdot U_{n_p}(k-n_p) - A \cdot Y_{n_p}(k-n_p) + \\ + T_w \cdot W_{n_p+n_q}(k) + D \cdot W_{n_p}(k-n_p) - Y_{n_p+n_q}^*(k)]. \quad (6)$$

Можно доказать [6], что полученное значение  $U_{n_p+n_q}^*(k)$  обеспечивает минимум функционала (4) и, следовательно, является оптимальным.

Изменением параметров  $n_q$ ,  $R$  добиваемся устойчивости решения задачи регулирования [6]. Значения вектора  $W_{n_p+n_q}(k)$  могут быть найдены, используя VARX-модель шумов. Для каждого момента времени в качестве входных значений системы выбираются первые  $m$  значений вектора  $U_{n_p+n_q}^*(k)$ , а далее процедура оценивания системы и синтеза регулятора повторяется.

При регулировании на этапе кристаллизации желаемые значения первого и второго выходов системы фиксируются и равны определенным величинам. Значение первого выхода системы берется равным значению температуры верхней камеры ростовой печи 114°C, а значение второго выхода берется равным разнице между значением температуры верхней камеры ростовой печи и значением температуры нижней камеры 114°C - 93°C = 21°C.

На этапе перехода от кристаллизации к отжигу значение второго выхода системы фиксируется и равно 93°C, а значения первого выхода плавно устремляются к фиксированной величине второго выхода системы.

На этапе отжига в момент времени, когда температуры верхней и нижней камер ростовой печи совпали, осуществляется переход к процессу идентификации модели и синтеза регулятора с учетом того, что в качестве значений второго выхода системы берутся значения разницы между значениями температуры верхней камеры печи и значениями температуры нижней камеры, значения первого выхода принимаются равными значениям температуры верхней камеры ростовой печи. При этом желаемые значения первого выхода системы плавно устремляются к значению температуры 20°C, а желаемые значения второго выхода системы берутся равными нулю. Для получения управлений многосвязной системой необходимо знать оценки параметров матричных полиномов VARMAX-модели (1).

#### 4. Алгоритм оценивания структуры и параметров VARMAX-модели

Для получения оценок всех матричных полиномов VARMAX-модели воспользуемся алгоритмом линейного многоэтапного метода оценивания параметров [3], который включает в себя выполнение следующих шагов:

*Шаг 1.* Оценивание векторной ARX-модели как сокращенного представления векторной ARMAX-модели.

Основываясь на предположении обратимости (все нули детерминанта  $D(B)$  лежат вне единичного круга),  $m$ -мерное представление VARMAX (1) представим в виде:

$$H_Y(B) \cdot Y(k) = H_U(B) \cdot U(k) + W(k),$$

где

$$H_Y(B) = I + \sum_{j=1}^{\infty} H_Y(j) \cdot B^j = D^{-1}(B) \cdot A(B) \quad [m \times m]; \quad (7)$$

$$H_U(B) = \sum_{j=0}^{\infty} H_U(j) \cdot B^j = D^{-1}(B) \cdot G(B) \quad [m \times r]. \quad (8)$$

Алгоритм начинается с оценивания  $m$ -мерного представления модели ARX порядка  $n_p$ :

$$Y(k) + \sum_{j=1}^{n_p} H_Y(j) \cdot Y(k-j) = \sum_{j=0}^{n_p} H_U(j) \cdot U(k-j) + \epsilon_1(k), \quad (9)$$

где  $\epsilon_1(k)$  - вектор ошибки прогноза на шаг вперед для модели ARX  $(n_p, n_p)$ .

Модель (9) может быть эквивалентно записана как

$$Y(k) = \Phi^T(k) \cdot h + \epsilon_1(k), \quad (10)$$

где

$$\Phi^T(k) = I \otimes u^T(k) \quad [m \times (n_p \cdot m^2 + n_p \cdot r \cdot m + r \cdot m)]; \\ u(k) = \\ = [-Y^T(k-1) \quad \dots \quad -Y^T(k-n_p) \quad U^T(k) \quad \dots \quad U^T(k-n_p)]^T \\ [(n_p \cdot m + n_p \cdot r + r) \times 1]; \\ h = \text{col} [H_Y(1) \quad \dots \quad H_Y(n_p) \quad H_U(1) \quad \dots \quad H_U(n_p)]^T \\ [(n_p \cdot r^2 + n_p \cdot r \cdot m + r \cdot m) \times 1], \quad (11)$$

где  $\otimes$  - обозначение произведения Кронеккера, а  $\text{col}(M)$  - вектор, получаемый путем записи каждого последующего столбца матрицы  $M$  под предыдущий столбец. Из (10) можно выразить  $\epsilon_1(k) = Y(k) - \Phi^T(k) \cdot h$ .

Оценки вектора  $h$  можно получить в результате минимизации квадратичной целевой функции  $J$  по  $h$ :

$$J = \sum_{k=1}^N \epsilon_1^T(k) \cdot W \cdot \epsilon_1(k) \rightarrow \min_h,$$

где  $W$  - симметричная положительно определенная матрица размерности  $m \times m$ . Решение этой задачи можно найти аналитически в явном виде. В этом случае оценку вектора  $h$  можно представить в виде:

$$\hat{h} = \left( \sum_{k=1}^N \Phi(k) \cdot W \cdot \Phi^T(k) \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{k=1}^N \Phi(k) \cdot W \cdot Y(k) \right),$$

где  $\hat{h}$  - оценки вектора  $h$ . Зная оценки  $\hat{h}$  и используя выражение (11), получаем оценки  $\hat{H}_Y(l)$  и  $\hat{H}_U(l)$  матриц  $H_Y(l)$ ,  $H_U(l)$ ,  $l = 1, \dots, n_p$ .

*Шаг 2.* Начальное оценивание полиномиальных матриц скользящего среднего.

Основываясь на выражении (7), для последовательности  $H_Y(j)$  можно получить следующие выражения:

$$\sum_{j=0}^{\min(i, n_p)} D_j \cdot H_Y(i-j) = A_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где  $A_i = 0$  для  $i > n_a$ .

Используя матричные уравнения (12) для  $i = r - n_d + 1, \dots, r$  ( $r = \max(n_a, n_d) + n_d$ ) и оценки  $\hat{H}_Y(i)$ , полученные на предыдущем шаге, построим систему уравнений для определения начальных оценок матриц скользящего среднего:

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_H(0) & \hat{R}_H(-1) & \dots & \hat{R}_H(1-n_d) \\ \hat{R}_H(1) & \hat{R}_H(0) & \dots & \hat{R}_H(2-n_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_H(n_d-1) & \hat{R}_H(n_d-2) & \dots & \hat{R}_H(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D}_1^T \\ \hat{D}_2^T \\ \vdots \\ \hat{D}_{n_d}^T \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} \hat{R}_H(1) \\ \hat{R}_H(2) \\ \vdots \\ \hat{R}_H(n_d) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\hat{R}_H(k-j) = \begin{cases} \sum_{i=n_p+1}^{n_p-(k-j)} \hat{H}_Y(i) \cdot \hat{H}_Y^T(i+k-j) & (k \geq j); \\ \sum_{i=n_p+1}^{n_p-(j-k)} \hat{H}_Y(i+j-k) \cdot \hat{H}_Y^T(i) & (k \leq j). \end{cases}$$

Решая систему (13) относительно  $\hat{D}_1^T, \hat{D}_2^T, \dots, \hat{D}_{n_d}^T$ , получим искомые оценки матриц скользящего среднего  $D_1, D_2, \dots, D_{n_d}$ .

**Шаг 3.** Оценивание матричного полинома авторегрессии и матричного полинома управляющих воздействий.

Оценивание матриц авторегрессии и матриц коэффициентов управляющих воздействий основывается на предположении, что целевая функция является квадратичной по отношению к матрицам скользящего среднего. Используя полученные на предыдущем шаге оценки  $\hat{D}(B)$ , выражение (1) модели VARMAX может быть записано как

$$\begin{aligned} \hat{D}^{-1}(B) \cdot Y(k) &= \hat{D}^{-1}(B) \sum_{j=0}^{n_g} G_j \cdot U(k-j) - \\ - \hat{D}^{-1}(B) \sum_{j=1}^{n_a} A_j \cdot Y(k-j) + \varepsilon_2(k), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\varepsilon_2(k)$  - ошибка прогнозирования на шаг вперед для структуры модели (14). Преобразование данной модели приводит к выражению:

$$\begin{aligned} y_U(k) &= \sum_{j=0}^{n_g} U_U(k-j) \cdot \text{col}(G_j) - \\ - \sum_{j=1}^{n_a} Y_U(k-j) \cdot \text{col}(A_j) + \varepsilon_2(k), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$y_U(k) = (y^T(k) \otimes \hat{D}^{-1}(B)) \cdot \text{col}(I) \quad [m \times 1]; \quad (16)$$

$$Y_U(k-j) = y^T(k-j) \otimes \hat{D}^{-1}(B) \quad [m \times m^2]; \quad (17)$$

$$U_U(k-j) = U^T(k-j) \otimes \hat{D}^{-1}(B) \quad [m \times r \cdot m]. \quad (18)$$

Минимизация целевой функции, определяемой как след ковариационной матрицы ошибок предсказания на один шаг вперед

$$J = \text{trace} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon_2(k) \cdot \varepsilon_2^T(k) \right) \quad (19)$$

приводит к линейным регрессионным оценкам

$$\hat{\theta}_2 = \left( \sum_{k=1}^N F_U^T(k) \cdot F_U(k) \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{k=1}^N F_U^T(k) \cdot y_U(k) \right) \quad (20)$$

вектора параметров

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \text{col} \left[ A_1 \quad \dots \quad A_{n_a} \quad G_0 \quad \dots \quad G_{n_g} \right] \times \\ &\times \left[ (n_a \cdot m^2 + n_g \cdot r \cdot m + r \cdot m) \times 1 \right]. \end{aligned}$$

$$F_U(k) =$$

$$= \left[ -Y_U(k-1) \quad \dots \quad -Y_U(k-n_a) \quad U_U(k) \quad \dots \quad U_U(k-n_g) \right] \times$$

$$\times \left[ m \times (n_a \cdot m^2 + n_g \cdot r \cdot m + r \cdot m) \right]$$

Для определения оценок  $\theta_2$  необходимо получить выражения (16) - (18). Для этого производим декомпозицию матрицы  $Y_U(k)$ :

$$Y_U(k) = [Y_1(k) \quad Y_2(k) \quad \dots \quad Y_m(k)],$$

где  $Y_i(k)$   $[m \times m]$  -  $i$ -тая матрица блочной матрицы  $Y_U(k)$ , а затем переписываем уравнение (17) следующим образом:

$$Y_i(k) + \sum_{j=1}^{n_d} Y_i(k-j) \cdot \hat{D}_j = y_i(k) \cdot I, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Из этого выражения может быть получена последовательность  $Y_i(k)$ ,  $k=1,2,\dots,N$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , предполагая, что  $Y_i(k) \equiv O$  для  $k \leq 0$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , и становится доступной последовательность  $y_U(k)$ ,  $k=1,2,\dots,N$ . Последовательность  $U_U(k-j)$ ,  $k=1,2,\dots,N$  определяется аналогично как и последовательность  $Y_i(k)$ ,  $k=1,2,\dots,N$ , предполагая, что  $U_U(k) \equiv O$  для  $k \leq 0$ .

**Шаг 4.** Оценивание полиномиальных матриц скользящего среднего и ковариаций остаточных ошибок.

После того, как матрицы авторегрессии и матрицы коэффициентов управляющих воздействий оценены, оценки матриц скользящего среднего обновляются, используя выражение

$$\sum_{j=0}^i \hat{D}_j \cdot \hat{H}_Y(i-j) = \hat{A}_i, \quad i=0,1,2,\dots, n_d,$$

где  $\hat{A}_i \equiv O$  для  $i > n_a$ ,  $\hat{A}_0 \equiv I$ ,  $\hat{D}_0 \equiv I$ . Последовательность  $\hat{H}_Y(i)$ ,  $i=0,1,2,\dots, n_p$  ( $\hat{H}_Y(0) = I$ ) доступна из шага 1. Последовательность остаточных ошибок  $\varepsilon(k)$  модели VARMAX затем рекурсивно определяется из выражения (1) после замены матриц авторегрессии, скользящего среднего и матриц коэффициентов управляющих воздействий их оценками. Ковариация остаточных ошибок вычисляется как

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{\varepsilon}(k) \cdot \hat{\varepsilon}^T(k) \quad [m \times m].$$

Шаги 3 и 4 повторяются, пока не будет достигнут минимум целевой функции (19). Структуру модели можно определить, например, по показателю информационного критерия Акайке и байесовского критерия Шварца, перебирая модели с различными порядками авторегрессии и скользящего среднего.

**5. Оценки эффективности разработанной системы управления по экспериментальным данным**

Оценка эффективности синтезированного регулятора температуры для технологической установки выращивания ОМК осуществлялась путем сравнительного анализа параметров зависимостей изменения температур в верхней и нижней камерах технологической установки для существующей системы автоматизированного управления с двумя независимыми PID-регуляторами и системы автоматического регулирования на основе синтезированного регулятора, учитывающей взаимосвязь температур в верхней и нижней камерах. Построение моделей и оценка их параметров осуществлялась по экспериментальным данным, полученным из SCADA системы промышленной установки в течение всех стадий производства ОМК, т.е. в течение 27 суток с шагом дискретизации 1 секунда. Общий объём экспериментальных данных составлял 1 700 000 значений.

В результате экспериментов был установлен оптимальный объем выборки для идентификации структуры и оценивания параметров VARMAX-модели. Он составил порядка 1000 посекундных значений о входах и выходах системы. Малые значения взаимных корреляционных функций между входами и выходами си-

стемы говорят об отсутствии необходимости введения задержек по управлению. Используя информационный критерий Акайке (AIC) и байесовский критерий Шварца (BIC), было установлено, что наибольший порядок системы следует выбирать не выше 2. Низкое значение AIC свидетельствует о большой точности аппроксимации. Максимальный порядок остаточных ошибок оцененной модели не превышал  $10^{-15}$  ( $1,11022 \cdot 10^{-16}$ ), что говорит о хорошей идентификации модели. Использованный линейный многоэтапный метод оценивания оказался более эффективным в сравнении с широко используемым рекурсивным методом наименьших квадратов (PMНК), однако PMНК имеет большую скорость сходимости и менее затратен в вычислительном отношении в режиме реального времени по сравнению с другими методами идентификации систем. Для оценки степени адекватности модели вычислялась автокорреляционная функция вектора остаточных ошибок модели и взаимная корреляционная функция между остаточными ошибками и входами.

Далее приводятся оцененные модели и синтезированные на их основе векторы управления полученные на каждом из 3-х этапов выращивания ОМК: кристаллизации, переходного этапа от кристаллизации к отжигу, отжига.

**Первый этап – кристаллизации ОМК:**

$$\begin{aligned}
 Y(k) = & - \begin{pmatrix} -1,129 & 0,103 \\ -0,525 & -0,503 \end{pmatrix} \cdot Y(k-1) - \begin{pmatrix} 0,286 & -0,127 \\ 0,42 & -0,265 \end{pmatrix} \cdot Y(k-2) + \begin{pmatrix} 0,013 & 0,005 \\ 0,015 & 0,011 \end{pmatrix} \cdot U(k) + \begin{pmatrix} -0,019 & 0,071 \\ -0,027 & 0,038 \end{pmatrix} \times \\
 & \times U(k-1) + \begin{pmatrix} 0,007 & 0,074 \\ 0,026 & 0,123 \end{pmatrix} \cdot U(k-2) + W(k) + \begin{pmatrix} 0 & 0,628 \\ -0,628 & 0 \end{pmatrix} \cdot W(k-1) + \begin{pmatrix} -0,06 & -0,231 \\ -0,163 & -0,33 \end{pmatrix} \cdot W(k-2). \\
 U(k) = & \begin{pmatrix} 0,00479 & 0,022765 & -0,00615 & 0,00029 \\ 0,033848 & 0,244828 & -0,02139 & 0,443323 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U(k-2) \\ U(k-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,0777 & 0,048607 & 0,129455 & 0,0756 \\ -0,901 & 0,456421 & 1,770911 & 0,642586 \end{pmatrix} \times \\
 & \times \begin{pmatrix} Y(k-2) \\ Y(k-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0,107 & -0,16 & -0,073 & -0,099 & 0,13 & -0,077 & 0,042 & -0,029 & 0,037 \\ 1,317 & 1,426 & 1,423 & 1,431 & 1,093 & 1,368 & 0,449 & 0,495 & 0,141 & 0,155 \end{pmatrix} \times \\
 & \times \begin{pmatrix} W(k) \\ W(k+1) \\ W(k+2) \\ W(k+3) \\ W(k+4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,0297 & -0,06116 & -0,10494 & 0,0258 \\ -0,25257 & -0,72134 & -0,72688 & 0,538286 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W(k-2) \\ W(k-1) \end{pmatrix} - \\
 & - \begin{pmatrix} 0,132 & 0,152 & -0,062 & -0,13 & -0,021 & 0,127 & -0,040 & 0,04 & -0,029 & 0,037 \\ 0,025 & 0,061 & 0,404 & 0,23 & 0,658 & 0,902 & 0,305 & 0,343 & 0,141 & 0,155 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^*(k) \\ Y^*(k+1) \\ Y^*(k+2) \\ Y^*(k+3) \\ Y^*(k+4) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Второй этап – переход от кристаллизации к отжигу:**

$$\begin{aligned}
 Y(k) = & - \begin{pmatrix} -1,14 & -0,685 \\ -0,01 & -0,622 \end{pmatrix} \cdot Y(k-1) - \begin{pmatrix} 0,238 & 0,56 \\ -0,003 & -0,146 \end{pmatrix} \cdot Y(k-2) + \begin{pmatrix} 0,052 & -0,362 \\ -0,007 & 0,095 \end{pmatrix} \cdot U(k) + \begin{pmatrix} -0,036 & 0,305 \\ 0,009 & -0,017 \end{pmatrix} \times \\
 & \times U(k-1) + \begin{pmatrix} -0,038 & 0,096 \\ -0,011 & 0,06 \end{pmatrix} \cdot U(k-2) + W(k) + \begin{pmatrix} 0 & -0,675 \\ 0,675 & 0 \end{pmatrix} \cdot W(k-1) + \begin{pmatrix} -0,463 & 0,138 \\ 0,214 & 0,006 \end{pmatrix} \cdot W(k-2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(k) &= \begin{pmatrix} 0,00024 & -0,00015 & 0,00705 & -0,0165 \\ -0,00054 & 0,04467 & -0,0232 & 0,02665 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U(k-2) \\ U(k-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,00284 & -0,01001 & 0,05881 & 0,0947 \\ 0,077 & 0,37569 & -0,59917 & 0,18579 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} Y(k-2) \\ Y(k-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,071 & 0,072 & -0,202 & 0,096 & -0,249 & -0,012 & -0,179 & -0,011 & -0,077 & -0,027 \\ 0,17 & 0,763 & 1,459 & 0,534 & 1,141 & 0,628 & 0,679 & 0,4 & 0,222 & 0,256 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} W(k) \\ W(k+1) \\ W(k+2) \\ W(k+3) \\ W(k+4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,0103 & 0,0015348 & 0,06394 & -0,0345 \\ 0,4296102 & -0,0381244 & 0,6456613 & 0,3636449 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W(k-2) \\ W(k-1) \end{pmatrix} - \\
&- \begin{pmatrix} 0,172 & 0,017 & 0,044 & 0,108 & -0,07 & 0 & -0,073 & 0,006 & -0,077 & -0,027 \\ -1,225 & 0,326 & 0,122 & 0,073 & 0,288 & 0,336 & 0,249 & 0,239 & 0,222 & 0,256 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^*(k) \\ Y^*(k+1) \\ Y^*(k+2) \\ Y^*(k+3) \\ Y^*(k+4) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Третий этап** – отжиг ОМК:

$$\begin{aligned}
Y(k) &= - \begin{pmatrix} -1,161 & 0,011 \\ -0,41 & -0,733 \end{pmatrix} \cdot Y(k-1) - \begin{pmatrix} 0,283 & -0,047 \\ 0,37 & -0,139 \end{pmatrix} \cdot Y(k-2) + \begin{pmatrix} 0,014 & 0,01 \\ 0,015 & -0,075 \end{pmatrix} \cdot U(k) + \begin{pmatrix} -0,018 & 0,047 \\ -0,02 & -0,033 \end{pmatrix} \times \\
&\times U(k-1) + \begin{pmatrix} 0,001 & -0,08 \\ -0,001 & -0,104 \end{pmatrix} \cdot U(k-2) + W(k) + \begin{pmatrix} 0 & 0,42 \\ -0,42 & 0 \end{pmatrix} \cdot W(k-1) + \begin{pmatrix} -0,004 & -0,108 \\ -0,072 & -0,172 \end{pmatrix} \cdot W(k-2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(k) &= \begin{pmatrix} -0,00019 & -0,00215 & -0,000433 & 0,020392 \\ 0,000412 & 0,261632 & 0,053646 & 0,251926 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U(k-2) \\ U(k-1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,00783 & 0,007407 & 0,0396 & 0,035886 \\ 0,930606 & -0,29257 & -0,99561 & -1,5529 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} Y(k-2) \\ Y(k-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,031 & 0,019 & -0,018 & -0,14 & -0,148 & -0,117 & -0,09 & -0,061 & -0,037 & -0,021 \\ -0,236 & -1,879 & -0,449 & -1,754 & -0,823 & -1,52 & -0,542 & -0,837 & -0,218 & -0,33 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} W(k) \\ W(k+1) \\ W(k+2) \\ W(k+3) \\ W(k+4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,00527 & -0,00542 & -0,0257 & -0,007301 \\ 0,132 & 0,410811 & 0,860971 & -0,03321 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W(k-2) \\ W(k-1) \end{pmatrix} - \\
&- \begin{pmatrix} 0,136 & 0,159 & -0,033 & -0,017 & -0,054 & -0,046 & -0,047 & -0,031 & -0,037 & -0,021 \\ 0,062 & -0,484 & 0,36 & -0,382 & -0,249 & -0,719 & -0,292 & -0,51 & -0,218 & -0,33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^*(k) \\ Y^*(k+1) \\ Y^*(k+2) \\ Y^*(k+3) \\ Y^*(k+4) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

На рис. 2 приведены графики изменения температуры в верхней и нижней камерах технологической установки для выращивания ОМК при управлениях с применением несвязанных между собой PID-регуляторов. На рис. 3 приведены графики изменения температуры в верхней и нижней камерах технологической установки для выращивания ОМК при управлениях с применением синтезированной многосвязной системы управления. Анализ приведенных на рис. 2, 3 температурных зависимостей для существующей и синтезированной систем управления показал существенную эффективность синтезированной многосвязной системы управления в сравнении с управлениями несвязанных между собой PID-регуляторов.

## 6. Выводы

1. Переход от автоматизированной системы управления температурными режимами в технологической установке для выращивания ОМК на основе независимых PID-регуляторов к синтезированной многосвязной системе автоматического управления является целесообразным.

2. Использование синтезированной системы управления позволяет:

- существенно, более чем в два раза, уменьшить дисперсии изменения температур в верхней и нижней камерах и, следовательно, дисперсию изменения фронта кристаллизации ОМК, что является необходимым условием повышения качества производства ОМК;



Рис. 2. Графики изменения температуры в верхней и нижней камерах технологической установки с применением несвязанных между собой PID-регуляторов

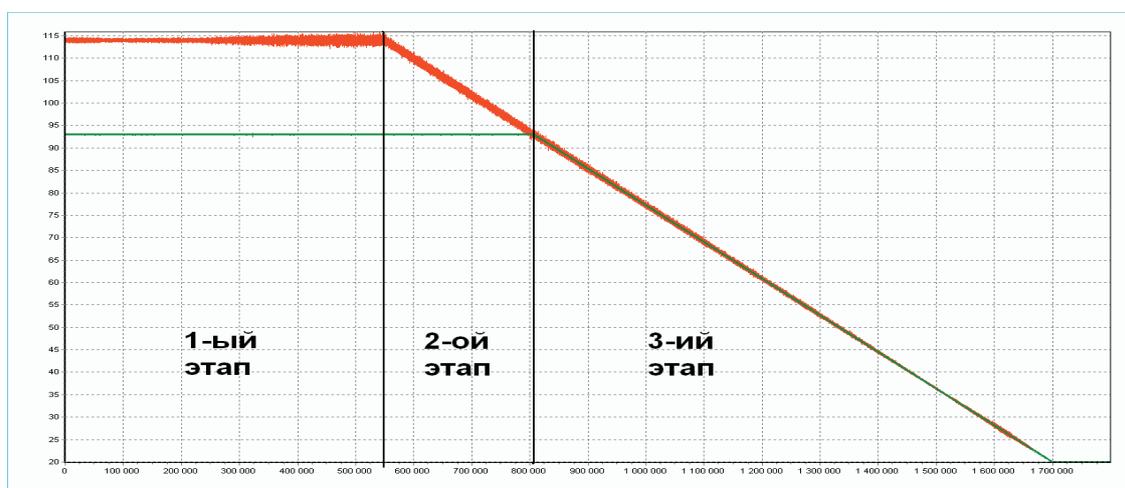


Рис. 3. Графики изменения температуры в верхней и нижней камерах технологической установки с применением синтезированной многосвязной системы управления

• свести к минимуму дисперсию разности температур в верхней и нижней камерах на этапе отжига ОМК и, следовательно, минимизировать осевые и радиальные градиенты температур в ОМК, что является необходимыми условиями снижения рисков возникновения температурных напряжений и микротрещин в ОМК.

3. Необходимо продолжить работы по повышению эффективности использования многомерных многосвязных систем управления температурными режимами работы технологических установок для выращивания ОМК за счет введения дополнительных датчиков температур в верхней и нижней камерах.

Литература

1. Кашьяп Р.Л., Рао А.Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
2. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
3. Fassois, S.D. (2000) MIMO LMS-ARMAX identification of vibrating structures – Part I: The Method. Stochastic Mechanical Systems (SMS) Group, Department of Mechanical & Aeronautical Engineering, University of Patras, Greece.
4. Florakis A., Fassois S.D. MIMO LMS-ARMAX identification of vibrating structures – Part II: A critical assessment. Stochastic Mechanical Systems (SMS) Group, Department of Mechanical & Aeronautical Engineering, University of Patras, Greece.
5. Дербунович Л.В., Суздаль В.С., Епифанов Ю.М., Герасимчук Л.И., Козьмин Ю.С. Система управления выращиванием синтиляционных монокристаллов. //Вестник Национального Технического Университета. Тематический выпуск "Автоматика и приборостроение". "ХПИ". 31'2008. С. 58-65.
6. Juang, J.-N., and Phan, M. Q. Deadbeat Predictive Controllers // AIAA 35th Aerospace Sciences Meeting.– AIAA paper number 97-0455.– Reno.– January 1997.
7. D. Stockbarger. The production of large single crystals // Rev. Sci. Instr. – 1936. - 7, 3. – P. 133-136
8. Функциональные материалы для науки и техники. Сборник статей. Под ред. В.П.Семиноженко.- Харьков: «Институт монокристаллов», 2001.- 624 с.