УДК 514.74 : 531.3

УСТАНОВЛЕНИЕ БАЗИСА КВАТЕРНИОННЫХ МАТРИЦ

Встановлюється ізоморфність групи кватерніонів та двох некомутативних підгруп 8-го порядку на множині мономіальних (1, 0, -1) – матриць четвертого порядку. Наводяться варіанти співставлення елементів базису простору кватерніонів та виділених мономіальних матриць. Із кінцевої множини варіантів співставлення обирається варіант, який задовольняє критерію симетрії. Вводяться доцільні позначення, досліджуються властивості базисних матриць

Ключові слова: мономіальні (1,0,-1)-матриці, група кватерніонів, таблиці Келі, кватерніоні матриці

Устанавливается изоморфность группы кватернионов и двух некоммутативных подгрупп 8-го порядка на множестве мономиальных (1, 0, -1) – матриц четвертого порядка. Приводятся варианты сопоставления элементов базиса пространства кватернионов и выделенных мономиальных матриц. Из конечного множества вариантов сопоставления выбирается вариант, удовлетворяющий критерию симметрии. Вводятся целесообразные обозначения, исследуются свойства базисных матриц

Ключевые слова: мономиальные (1, 0, -1) – матрицы, группа кватернионов, таблицы Кэли, кватернионные матрицы

An isomorphism of quaternion group and two noncommutative subgroups of eighth order was determined. Some variants of comparison of elements of basis of quaternion space and monomial matrices that were singled out are shown. From the finite set of comparison variants one that satisfy the criteria of symmetry is selected. Appropriate designation are entered. And features of basic matrices are analyzed

Key words: monomial (1, 0, -1) – matrices, quaternion group, tables of Cayley, quaternionic matrices

В.В. Кравец
Доктор технических наук, профессор кафедры специализированных компьютерных систем „Украинский государственный химико-технологический университет”
пр. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, Украина, 49005
Контактный тел.: 8-067-726-07-72; 8 (056) 748-07-06

Т.В. Кравец
Ассистент
Кафедра «Теоретическая механика»*
Контактный тел.: 8-067-921-10-67, 8 (056) 713-58-03

А.В. Харченко
Аспирант
Кафедра «Прикладная математика»*
Контактный тел.: 8-050-321-14-60
*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В.Лазаряна
ул Лазаряна, 2, г. Днепропетровск, Украина, 49010

Введение

В вычислительном эксперименте [1, 11] к форме представления алгоритмов предъявляются специфические требования, удовлетворить которые оказывается возможным удачным выбором переменных, новой организацией вычислительных процессов, обусловленной спецификой этих переменных, применением матричного исчисления, в частности, исчисления кватернионных матриц [7, 9, 13, 14]. Элементы исчисления кватернионных матриц получили признание и применение не только в аналитической механике при построении математических моделей, по существу заменяя векторное исчисление, но и оказались хорошо адаптированным к современной технологии проведения вычислительного эксперимента по исследованию нелинейной динамики сложных механических систем в пространственном движении. При этом математические модели и соответствующие им алгоритмы обретают симметрию, компактность, универсальность, что ускоряет программирование, отладку вычислительного процесса, обеспечивают удобства в работе, т.е. повышает производительность интеллектуального труда [2, 3, 8, 12].

Постановка задачи

Среди мономиальных (1, 0, -1) – матриц [10, 15] четвертого порядка, представляющих тождественные и четные подстановки четвертой степени на множестве элементов четырехмерного ортонормированного базиса и противоположных элементов находятся некоммутативные подгруппы, изоморфные группе кватернионов и составляющие базис кватернионных матриц. Исследуются свойства базисных матриц.

Решение задачи

Для элементов базиса пространства кватернионов приняты специальные правила умножения [6]:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1;$$
$$ij = -ji = k;$$
$$jk = -kj = i;$$
$$ki = -ik = j.$$

Множество, состоящее из восьми элементов $1, i, j, k;\ -1, -i, -j, -k$ (здесь знак минус служит различительным значком), составляет группу кватернионов с известной таблицей умножения [4].

На множестве мономиальных (1, 0, -1) – матриц находятся семь подгрупп восьмого порядка, из которых пять подгрупп являются Абелевыми, а две некоммутативными (табл. 1) [10].

Таблица 1

Таблицы умножения некоммутативных подгрупп порядка 8

*	A_0	T_1	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$
A_0	A_0	T_1	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$
T_1	T_1	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	A_0	S_3	$\bar{R}_2$
R_2	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	T_1
S_3	S_3	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	A_0
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	T_1	R_2	S_3
$\bar{T}_1$	$\bar{T}_1$	A_0	S_3	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_3$	R_2
$\bar{R}_2$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	A_0	T_1	R_2	S_3	$\bar{A}_0$	$\bar{T}_1$
$\bar{S}_3$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	A_0	S_3	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{A}_0$

	A_0	S_1	T_2	R_3	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
A_0	A_0	S_1	T_2	R_3	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
S_1	S_1	$\bar{A}_0$	R_3	$\bar{T}_2$	$\bar{S}_1$	A_0	$\bar{R}_3$	T_2
T_2	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{A}_0$	S_1	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{A}_0$	S_1
R_3	R_3	T_2	$\bar{S}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{T}_2$	S_1	A_0
$\bar{A}_0$	$\bar{A}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	A_0	S_1	T_2	R_3
$\bar{S}_1$	$\bar{S}_1$	A_0	$\bar{R}_3$	T_2	S_1	$\bar{A}_0$	R_3	$\bar{T}_2$
$\bar{T}_2$	$\bar{T}_2$	R_3	A_0	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	R_3	A_0	$\bar{S}_1$
$\bar{R}_3$	$\bar{R}_3$	$\bar{T}_2$	S_1	A_0	R_3	T_2	$\bar{S}_1$	$\bar{A}_0$

Таблица 2

Варианты сопоставления элементов базиса пространства кватернионов элементами некоммуттивных подгрупп порядка 8

Элементы базиса	Элементы подгрупп											
1	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
i	S_1	T_2	R_3	S_1	T_2	$\bar{R}_3$	S_1	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	T_2	R_3
j	T_2	R_3	S_1	$\bar{R}_3$	S_1	T_2	R_3	S_1	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	T_2
k	R_3	S_1	T_2	T_2	$\bar{R}_3$	S_1	$\bar{T}_2$	R_3	S_1	T_2	R_3	$\bar{S}_1$
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
i	T_1	S_3	R_2	T_1	R_2	$\bar{S}_3$	T_1	$\bar{R}_2$	S_3	$\bar{T}_1$	R_2	S_3
j	S_3	R_2	T_1	R_2	$\bar{S}_3$	T_1	$\bar{R}_2$	S_3	T_1	R_2	S_3	$\bar{T}_1$
k	R_2	T_1	S_3	$\bar{S}_3$	T_1	R_2	S_3	T_1	$\bar{R}_2$	S_3	$\bar{T}_1$	R_2
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10*	11	12

Элементы базиса	Элементы подгрупп											
1	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
i	S_1	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$
j	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	S_1	T_2	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$
k	$\bar{R}_3$	S_1	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$	T_2	R_3	$\bar{S}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{S}_1$
N	13	14	15	16*	17	18	19	20	21	22	23	24
1	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0	A_0
i	T_1	$\bar{S}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$
j	$\bar{S}_3$	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_1$
k	$\bar{R}_2$	T_1	$\bar{S}_3$	R_2	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{R}_2$	$\bar{T}_1$	S_3	$\bar{S}_3$	$\bar{T}_1$	$\bar{R}_2$
N	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Приведенным элементам базиса пространства кватернионов сопоставляются элементы некоммутативных подгрупп восьмого порядка. Варианты сопоставления элементов базиса пространства кватернионов и элементов полученных некоммутативных подгрупп приводятся в табл. 2.

Варианты сопоставления выбираются по критерию симметрии, и для первой из рассмотренных подгрупп соответствует номеру 16, а для второй номеру 10. Представляется целесообразным переобозначить выделенные мономиальные матрицы используя операцию транспонирования (табл. 3)

Таблица 3

Мономиальные матрицы, эквивалентные элементам пространства кватернионов

Элементы кватерниона	Базисные матрицы
1	$E_0=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{Vmatrix}$
i	$E_1=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{Vmatrix}$ ${}^{t}E_1=\begin{Vmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{Vmatrix}$
j	$E_2=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{Vmatrix}$ ${}^{t}E_2=\begin{Vmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{Vmatrix}$
k	$E_3=\begin{Vmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{Vmatrix}$ ${}^{t}E_3=\begin{Vmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{Vmatrix}$
-1	$I=\begin{Vmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{Vmatrix}$
-i	${}^{t}E_1^{t}=\begin{Vmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{Vmatrix}$ $E_1^{t}=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{Vmatrix}$
-j	${}^{t}E_2^{t}=\begin{Vmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{Vmatrix}$ $E_2^{t}=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{Vmatrix}$
-k	${}^{t}E_3^{t}=\begin{Vmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{Vmatrix}$ $E_3^{t}=\begin{Vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{Vmatrix}$

Эти обозначения отражают возможность преобразования базисных матриц применением вводимых операций транспонирования: полного (перестановка всех строк и столбцов), внешнего (перестановка первой строки и столбца) и внутреннего (перестановка элементов, исключая первую строку и столбец). Кватерниону и сопряженному кватерниону сопоставляются четыре матрицы упорядоченной структуры:

$$\begin{Vmatrix}A\\{}^{t}A^{t}\\{}^{t}A\\A^{t}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}E_0&E_1&E_2&E_3\\E_0&{}^{t}E_1^{t}&{}^{t}E_2^{t}&{}^{t}E_3^{t}\\E_0&{}^{t}E_1&{}^{t}E_2&{}^{t}E_3\\E_0&E_1^{t}&E_2^{t}&E_3^{t}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{Vmatrix}$$

Составленные четыре вида упорядоченных матриц, эквивалентных кватернионам, преобразуются одна в другую применением предложенных операций полного, внешнего и внутреннего транспонирования. В развернутой записи получим соответственно:

$$A=\begin{Vmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\-a_1&a_0&-a_3&a_2\\-a_2&a_3&a_0&-a_1\\-a_3&a_2&a_1&a_0\end{Vmatrix};\quad {}^{t}A=\begin{Vmatrix}a_0&-a_1&-a_2&-a_3\\a_1&a_0&-a_3&a_2\\a_2&a_3&a_0&-a_1\\a_3&-a_2&a_1&a_0\end{Vmatrix};$$

$${}^{t}A^{t}=\begin{Vmatrix}a_0&-a_1&-a_2&-a_3\\a_1&a_0&a_3&-a_2\\a_2&-a_3&a_0&a_1\\a_3&a_2&-a_1&a_0\end{Vmatrix};\quad A^{t}=\begin{Vmatrix}a_0&a_1&a_2&a_3\\-a_1&a_0&a_3&-a_2\\-a_2&-a_3&a_0&a_1\\-a_3&a_2&-a_1&a_0\end{Vmatrix}$$

Составленные матрицы обладают очевидной упорядоченностью. Матрица ${}^{t}A$ образуется из матрицы A в результате перестановки первой строки и первого столбца, матрица ${}^{t}A^{t}$ является транспонированной по отношению к матрице A, а матрица A^{t} - транспонированной по отношению к ${}^{t}A$, т.е. имеет место следующее правило транспонирования:

$${}^{t}(A)^{t}={}^{t}A^{t},\qquad {}^{t}(A)={}^{t}A,\qquad (A)^{t}=A^{t},$$

$${}^{t}\left({}^{t}A^{t}\right)^{t}=A,\qquad {}^{t}\left({}^{t}A^{t}\right)=A^{t},\qquad \left({}^{t}A^{t}\right)^{t}={}^{t}A,$$

$${}^{t}\left({}^{t}A\right)^{t}=A^{t},\qquad {}^{t}\left({}^{t}A\right)=A,\qquad \left({}^{t}A\right)^{t}={}^{t}A^{t},$$

$${}^{t}\left(A^{t}\right)^{t}={}^{t}A,\qquad {}^{t}\left(A^{t}\right)={}^{t}A^{t},\qquad \left(A^{t}\right)^{t}=A.$$

Отметим, что иные варианты сопоставления приводят к матрицам, не имеющим столь упорядоченного вида. Например, для варианта 2 первой подгруппы имеем:

$$A_0a_0+T_2a_1+R_3a_2+S_1a_3=\begin{Vmatrix}a_0&a_3&-a_1&a_2\\-a_3&a_0&a_2&a_1\\a_1&-a_2&a_0&a_3\\-a_2&-a_1&-a_3&a_0\end{Vmatrix};$$

а для варианта 22 второй подгрупп:

$$A_0a_0+\bar{T}_1a_1+\bar{R}_2a_2+\bar{S}_3a_3=\begin{Vmatrix}a_0&a_1&-a_2&-a_3\\-a_1&a_0&a_3&-a_2\\a_2&-a_3&a_0&-a_1\\a_3&a_2&a_1&a_0\end{Vmatrix}.$$

Поэтому эти варианты и другие для представления кватернионов далее не используются.

Из сравнения таблицы умножения группы кватернионов и таблиц умножения некоммутативных подгрупп восьмого порядка устанавливается их изоморфность (табл. 4).

Таблица 4

Таблица умножения базисных матриц, соответствующих кватерниону и сопряженному кватерниону

*	E_0	E_1	E_2	E_3	I	${}^tE_1^t$	${}^tE_2^t$	${}^tE_3^t$
E_0	E_0	E_1	E_2	E_3	I	${}^tE_1^t$	${}^tE_2^t$	${}^tE_3^t$
E_1	E_1	I	E_3	${}^tE_2^t$	${}^tE_1^t$	E_0	${}^tE_3^t$	E_2
E_2	E_2	${}^tE_3^t$	I	E_1	${}^tE_2^t$	E_3	E_0	${}^tE_1^t$
E_3	E_3	E_2	${}^tE_1^t$	I	${}^tE_3^t$	${}^tE_2^t$	E_1	E_0
I	I	${}^tE_1^t$	${}^tE_2^t$	${}^tE_3^t$	E_0	E_1	E_2	E_3
${}^tE_1^t$	${}^tE_1^t$	E_0	${}^tE_3^t$	E_2	E_1	I	E_3	${}^tE_2^t$
${}^tE_2^t$	${}^tE_2^t$	E_3	E_0	${}^tE_1^t$	E_2	${}^tE_3^t$	I	E_1
${}^tE_3^t$	${}^tE_3^t$	${}^tE_2^t$	E_1	E_0	E_3	E_2	${}^tE_1^t$	I

*	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$
E_0	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$
E_1^t	E_1^t	I	${}^tE_3$	E_2^t	${}^tE_1$	E_0	E_3^t	${}^tE_2$
E_2^t	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$	E_0	E_1^t
E_3^t	E_3^t	${}^tE_2$	E_1^t	I	${}^tE_3$	E_2^t	${}^tE_1$	E_0
I	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t
${}^tE_1$	${}^tE_1$	E_0	E_3^t	${}^tE_2$	E_1^t	I	${}^tE_3$	E_2^t
${}^tE_2$	${}^tE_2$	${}^tE_3$	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$
${}^tE_3$	${}^tE_3$	E_2^t	${}^tE_1$	E_0	E_3^t	${}^tE_2$	E_1^t	I

С помощью составленных таблиц умножения исследуются свойства четырех совокупностей базисных матриц: находятся аддитивно-обратные, мультипликативно-обратные, ортогональные, кососимметричные матрицы, устанавливаются коммутативные произведения, правила полного, внешнего и внутреннего транспонирования произведений.

Для базисных матриц $E_0,\ E_i,\ I,\ {}^tE_i^t (i=1,2,3)$ адитивно-обратными являються:

$$E_i + {}^tE_i^t = 0, \qquad E_0 + I = 0;$$

кососимметричными:

$$E_i = -{}^tE_i^t;$$

мультипликативно-обратными:

$$E_i^{-1} = {}^tE_i^t, \qquad \left({}^tE_i^t\right)^{-1} = E_i,$$

ортогональными:

$$E_i \odot {}^tE_i^t = E_0, \qquad {}^tE_i^t \odot E_i = E_0,$$

а также

$$E_i \odot E_i = I, \qquad {}^tE_i^t \odot {}^tE_i^t = I.$$

Произведения матриц удовлетворяют равенствам:

$$E_i \odot E_j = {}^tE_i^t \odot {}^tE_j^t,$$
$$E_i \odot {}^tE_j^t = {}^tE_i^t \odot E_j,$$
$$E_i \odot E_j = -E_i \odot {}^tE_j^t, \ \left(i,j=1,2,3\right)$$

в частности при $i=j$

$$E_i \odot E_i = {}^tE_i^t \odot {}^tE_i^t = I,$$
$$E_i \odot {}^tE_i^t = {}^tE_i^t \odot E_i = E_0,$$
$$E_i \odot E_i = -E_i \odot {}^tE_i^t,$$

то есть $I = -E_0$.

Если $i \neq j$, то

$$E_i \odot E_j = E_j \odot {}^tE_i^t,$$
$$E_i \odot E_j = -E_j \odot E_i,$$
$$E_i \odot {}^tE_j^t = -E_j \odot {}^tE_i^t,$$

а также

$${}^tE_i^t \odot {}^tE_j^t = {}^tE_j^t \odot E_i,$$
$${}^tE_i^t \odot {}^tE_j^t = -{}^tE_j^t \odot {}^tE_i^t,$$
$${}^tE_i^t \odot E_j = -{}^tE_j^t \odot E_i.$$

Откуда следует, например,

$$E_i \odot {}^tE_j^t = -{}^tE_j^t \odot E_i,$$

так как

$$E_i \odot {}^tE_j^t = {}^tE_i^t \odot E_j, \qquad {}^tE_i^t \odot E_j = -{}^tE_j^t \odot E_i.$$

Для базисных матриц $E_0,\ E_i^t,\ I,\ {}^tE_i \ (i=1,2,3)$ устанавливаются аналогичные свойства. Матрицы ${}^tE_i$ и E_i^t - аддитивно-обратные:

$${}^tE_i + E_i^t = 0;$$

кососимметричные:

$${}^tE_i = -E_i^t;$$

мультипликативно-обратные:

$$\left({}^tE_i\right)^{-1} = E_t; \qquad \left(E_i^t\right)^{-1} = {}^tE_i;$$

Ортогональные:

$${}^tE_i \odot E_i^t = E_0; \qquad E_i^t \odot {}^tE_i = E_0.$$

Имеют место равенства:

$$E_i^t \odot E_j^t = {}^tE_i \odot {}^tE_j,$$
$$E_i^t \odot {}^tE_j = {}^tE_i \odot E_j^t,$$
$$E_i^t \odot E_j^t = -E_i^t \odot {}^tE_j.$$

Откуда, в частности, при $i=j$

$$E_i^t \odot E_i^t = {}^tE_i \odot {}^tE_i = I,$$
$$E_i^t \odot {}^tE_i = {}^tE_i \odot E_i^t = E_0,$$
$$E_i^t \odot E_i^t = -E_i^t \odot {}^tE_i.$$

то есть $I = -E_0$
Если $i \neq j$, то

$$E_i^t \odot E_j^t = E_j^t \odot {}^tE_i,$$
$$E_i^t \odot E_j^t = -E_j^t \odot E_i^t,$$
$$E_i^t \odot {}^tE_j = -E_j^t \odot {}^tE_i,$$

а также

$${}^tE_i \odot {}^tE_j = {}^tE_j \odot E_i^t,$$
$${}^tE_i \odot {}^tE_j = -{}^tE_j \odot {}^tE_j,$$
$${}^tE_i \odot E_j^t = -{}^tE_i \odot E_i^t.$$

С помощью этих равенств получаем, например:

$$E_i^t \odot {}^tE_j = {}^tE_i \odot E_j^t,$$
$${}^tE_i \odot E_j^t = -{}^tE_j \odot E_i^t.$$

Базисные матрицы E_0, E_i, I, ${}^tE_i^t$, ${}^tE_i$, E_i^t в совокупности составляют группу тридцать второго порядка, фрагменты которой представлены в табл. 4 и табл. 5.

Таблица 5

Умножение базисных матриц, составляющих подгруппу 32-го порядка

*	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$
E_0	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$
E_1	E_1	$\bar{R}_0$	$\bar{A}_3$	S_2	${}^tE_1^t$	R_0	A_3	S_2
E_2	E_2	T_3	$\bar{S}_0$	$\bar{A}_1$	${}^tE_2^t$	T_3	S_0	A_1
E_3	E_3	$\bar{A}_2$	R_1	T_0	${}^tE_3^t$	A_2	$\bar{R}_1$	$\bar{T}_0$
I	I	${}^tE_1$	${}^tE_2$	${}^tE_3$	E_0	E_1^t	E_2^t	E_3^t
${}^tE_1^t$	${}^tE_1^t$	R_0	A_3	S_2	E_1	$\bar{R}_0$	$\bar{A}_3$	S_2
${}^tE_2^t$	${}^tE_2^t$	T_3	S_0	A_1	E_2	T_3	$\bar{S}_0$	$\bar{A}_1$
${}^tE_3^t$	${}^tE_3^t$	A_2	$\bar{R}_1$	$\bar{T}_0$	E_3	$\bar{A}_2$	R_1	T_0

*	E_0	E_1	E_2	E_3	I	${}^tE_1^t$	${}^tE_2^t$	${}^tE_3^t$
E_0	E_0	E_1	E_2	E_3	I	${}^tE_1^t$	${}^tE_2^t$	${}^tE_3^t$
E_1^t	E_1^t	$\bar{R}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{A}_2$	${}^tE_1$	R_0	T_3	A_2
E_2^t	E_2^t	A_3	$\bar{S}_0$	R_1	${}^tE_2$	A_3	S_0	$\bar{R}_1$
E_3^t	E_3^t	S_2	$\bar{A}_1$	T_0	${}^tE_3$	$\bar{S}_2$	A_1	$\bar{T}_0$
I	I	E_1	E_2	E_3	E_0	E_1	E_2	E_3
${}^tE_1$	${}^tE_1$	R_0	T_3	A_2	E_1^t	$\bar{R}_0$	$\bar{T}_3$	A_2
${}^tE_2$	${}^tE_2$	A_3	S_0	$\bar{R}_1$	E_2^t	$\bar{A}_3$	$\bar{S}_0$	R_1
${}^tE_3$	${}^tE_3$	$\bar{S}_2$	A_1	$\bar{T}_0$	E_3^t	S_2	$\bar{A}_1$	T_0

Таблица умножения группы 32-го порядка в сокращенной записи (четверть таблицы умножения) приводится в табл. 6. Для воспроизведения таблицы умножения в полном объеме достаточно воспользоваться операцией инверсии или произведением на матрицу инверсии I

Таблица 6

Четверть таблицы умножение подгруппы порядка 32

*	A_0	A_1	A_2	A_3	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3	T_0	T_1	T_2	T_3
A_0	A_0	A_1	A_2	A_3	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3	T_0	T_1	T_2	T_3
A_1	A_1	A_0	A_3	A_2	R_1	R_0	R_3	R_2	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$
A_2	A_2	A_3	A_0	A_1	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	S_2	S_3	S_0	S_1	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$
A_3	A_3	A_2	A_1	A_0	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	T_3	T_2	T_1	T_0
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	A_0	A_1	A_2	A_3	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$
R_1	R_1	R_0	R_3	R_2	A_1	A_0	A_3	A_2	T_1	T_0	T_3	T_2	S_1	S_0	S_3	S_2
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	S_2	S_3	S_0	S_1
R_3	R_3	R_2	R_1	R_0	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	T_3	T_2	T_1	T_0	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$
S_0	S_0	S_1	S_2	S_3	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_3$	A_0	A_1	A_2	A_3	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$
S_1	S_1	S_0	S_3	S_2	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_0$	$\bar{T}_3$	$\bar{T}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	R_1	R_0	R_3	R_2
S_2	S_2	S_3	S_0	S_1	T_2	T_3	T_0	T_1	A_2	A_3	A_0	A_1	R_2	R_3	R_0	R_1
S_3	S_3	S_2	S_1	S_0	T_3	T_2	T_1	T_0	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_0$
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	A_0	A_1	A_2	A_3
T_1	T_1	T_0	T_3	T_2	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_2$	R_1	R_0	R_3	R_2	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_2$
T_2	T_2	T_3	T_0	T_1	S_2	S_3	S_0	S_1	$\bar{R}_2$	$\bar{R}_3$	$\bar{R}_0$	$\bar{R}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$\bar{A}_1$
T_3	T_3	T_2	T_1	T_0	S_3	S_2	S_1	S_0	R_3	R_2	R_1	R_0	A_3	A_2	A_1	A_0

Из рассмотрения табл.5 следуют свойства:

$$E_i \odot E_j^t = {}^tE_i^t \odot {}^tE_j,$$
$$E_i \odot {}^tE_j = -{}^tE_i^t \odot E_j^t,$$
$$E_i^t \odot E_j = {}^tE_i \odot {}^tE_j^t,$$
$$E_i^t \odot {}^tE_j^t = {}^tE_i \odot E_j;$$

а также

$$E_i \odot {}^tE_j = E_j^t \odot {}^tE_i^t,$$
$$E_i \odot E_j^t = {}^tE_j \odot {}^tE_i^t,$$
$${}^tE_i^t \odot {}^tE_j = E_j^t \odot E_i,$$
$${}^tE_i^t \odot E_j^t = {}^tE_j \odot E_i;$$

из которых следует коммутативность произведений вида:

$$E_i \odot E_j^t = E_j^t \odot E_i,$$
$$E_i \odot {}^tE_j = {}^tE_j \odot E_i,$$
$${}^tE_i^t \odot E_j^t = E_j^t \odot {}^tE_i^t,$$
$${}^tE_i^t \odot {}^tE_j = {}^tE_j \odot {}^tE_i^t.$$

Из табл. 4 умножения группы для базисных матриц находим:

$$E_i \odot E_j = E_s, \qquad {}^tE_j^t \odot {}^tE_i^t = {}^tE_s^t \quad (i,j,s = 1,2,3)$$

Здесь индексы i,j,s изменяются циклически.

Действительно, транспонируя первое равенство ${}^t(E_i \odot E_j)^t = {}^t(E_s)^t$ и учитывая, что ${}^t(E_s)^t = {}^tE_s^t$, получим ${}^t(E_i \odot E_j)^t = {}^tE_j^t \odot {}^tE_i^t$.

Далее выберем из табл.4 умножения группы следующие равенства:

$$E_i \odot E_j = E_s, \qquad E_j^t \odot E_i^t = E_s^t \quad (i,j,s = 1,2,3)$$

Здесь операция неполного транспонирования, обозначаемая в виде $(\ )^t$, предусматривает перестановку элементов матрицы, исключая первую строку и столбец. Применяя эту операцию транспонирования к первому равенству $(E_i \odot E_j)^t = (E_s)^t$ и учитывая, что $(E_s)^t = E_s^t$, получим $(E_i \odot E_j)^t = E_j^t \odot E_i^t$ -второе равенство.

Рассмотрение равенств табл. 4

$$E_i \odot E_j = E_s, \qquad {}^tE_i \odot {}^tE_j = {}^tE_s \quad (i,j,s = 1,2,3)$$

позволяет установить свойство операции неполного транспонирования, обозначенного в виде ${}^t(\ )$. Это транспонирование предусматривает перестановку в базисной матрице элементов первой строки и столбца. Применяя эту операцию транспонирования к первому равенству

$${}^t(E_i \odot E_j) = {}^t(E_s)$$

и учитывая, что ${}^t(E_s) = {}^tE_s$, получим:

$${}^t(E_i \odot E_j) = {}^tE_i \odot {}^tE_j$$

Аналогичным образом, путем сопоставления таблиц умножения групп восьмого порядка, устанавливаются следующие правила транспонирования для базисных матриц:

$$
\begin{aligned}
&{}^t(E_i \odot {}^tE_j^t)^t = E_j \odot {}^tE_i^t, \quad &&(E_i \odot {}^tE_j^t)^t = {}^tE_j \odot E_i^t, \quad &&{}^t(E_i \odot {}^tE_j^t) = {}^tE_j \odot E_i^t,\\
&{}^t({}^tE_i^t \odot E_j)^t = {}^tE_j^t \odot E_i, \quad &&({}^tE_i^t \odot E_j)^t = E_j^t \odot {}^tE_i, \quad &&{}^t({}^tE_i^t \odot E_j) = E_i^t \odot {}^tE_j,\\
&{}^t({}^tE_i^t \odot {}^tE_j^t)^t = E_j \odot E_i, \quad &&({}^tE_i^t \odot {}^tE_j^t)^t = {}^tE_j \odot {}^tE_i, \quad &&{}^t({}^tE_i^t \odot {}^tE_j^t) = E_i^t \odot E_j^t.
\end{aligned}
$$

Из рассмотрения фрагментов таблицы умножения группы тридцать второго порядка устанавливаем следующие правила:

$$
\begin{aligned}
&{}^t(E_i \odot E_j^t)^t = {}^tE_j \odot {}^tE_i^t, \quad &&{}^t(E_i \odot {}^tE_j)^t = E_j^t \odot {}^tE_i^t,\\
&{}^t({}^tE_i^t \odot E_j^t)^t = {}^tE_j \odot E_i, \quad &&{}^t({}^tE_i^t \odot {}^tE_j)^t = E_j^t \odot E_i,\\
&{}^t({}^tE_i \odot E_j)^t = {}^tE_j^t \odot E_i^t, \quad &&(E_i^t \odot E_j)^t = {}^tE_j^t \odot {}^tE_i,\\
&{}^t({}^tE_i \odot {}^tE_j^t)^t = E_j \odot E_i^t, \quad &&(E_i^t \odot {}^tE_j^t)^t = E_j \odot {}^tE_i.
\end{aligned}
$$

В силу коммутативности рассматриваемых произведений базисных матриц имеют место равенства вида;

$$
\begin{aligned}
&{}^t(E_i \odot E_j^t)^t = {}^tE_i^t \odot {}^tE_j, \quad &&{}^t(E_i \odot {}^tE_j)^t = {}^tE_i^t \odot E_j^t,\\
&{}^t({}^tE_i^t \odot E_j^t)^t = E_i \odot {}^tE_j, \quad &&{}^t({}^tE_i^t \odot {}^tE_j)^t = E_i \odot E_j^t,\\
&{}^t({}^tE_i \odot E_j)^t = E_i^t \odot {}^tE_j^t, \quad &&(E_i^t \odot E_j)^t = {}^tE_i \odot {}^tE_j^t,\\
&{}^t({}^tE_i \odot {}^tE_j^t)^t = E_i^t \odot E_j, \quad &&(E_i^t \odot {}^tE_j^t)^t = {}^tE_i \odot E_j.
\end{aligned}
$$

Вывод

Найдены две некоммутативные подгруппы на множестве мономиальных (1, 0, -1) - матриц четвертого порядка, изоморфные группе кватернионов и составляющие базис введенной совокупности четырех кватернионных матриц. Введенные кватернионные матрицы удовлетворяют критерию упорядоченности, симметрии, что позволяет применить к ним операции внешнего, внутреннего и полного транспонирования. На основе составленных таблиц умножения базисных матриц определены аддитивно-обратные, мультипликативно-обратные, ортогональные и кососимметричные.

Литература

1. Арутюнов С.К. Пакет прикладных программ МДССО // Пакеты прикладных программ. Программное обеспечение вычислительного эксперимента. / С.К.Арутюнов, Е.А. Дерюгин. – М.: Наука, 1987. – с.51-59.
2. Блехман И.И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. / И.И. Блехман, А.Д. Мышкис, Я.Г. Пановко. – М.: Наука. Главная ред физ-мат. лит., 1983. – 328с.
3. Глушков В.М. Фундаментальные исследования и технология программирования // Программирование. / В.М. Глушков. – 1980. – №2. – с.3-13.
4. Гроссман И. Группы и их графы / И. Гроссман, В. Магнус. Пер. с англ. – М.: Мир, 1971 – 248с.
5. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 832с.
7. Кравець Т.В. Представлення кватерніонними матрицями послідовності скінчених поворотів твердого тіла у просторі // Автоматика-2000. Міжнародна конференція з автоматичного управління: Праці у 7-ми томах. – Т.2. – Львів: Державний НДІ Інформаційної інфраструктури, 2000. – с.140-145.
8. Кравец В.В. Об оценке центробежных, кориолисовых и гироскопических сил при скоростном движении железнодорожного экипажа / В.В. Кравец, Т.В. Кравец // Прикладная механика. – 2008. – Том 44. – №1 – с.123-132.
9. Кравец В.В. Описание кинематики и нелинейной динамики ассиметричного твердого тела кватернионными матрицами. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Прикладная механика. – 2009. – Том 45. – №2 – с.133-143.

10. Кравец В.В. Составление группы мономиальных (1, 0, -1) – матриц четвертого порядка. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 3/3 (39) – с.15-27.
11. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. / Н.Н. Моисеев. – М.: 1979. – 224с.
12. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения. / И.Н. Молчанов. – К.: Наукова думка, 1988. – 344с.
13. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. / С.М. Онищенко. – Киев: Наук. думка, 1983. – 208 с.
14. Плотников П.К., Челноков Ю.Н. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела. – Сб. научно-методич. статей по теоретической механике, 1981, вып. 11, с. 122-129
15. Тараканов В.Е. Комбинаторные задачи и (0, 1) – матрицы. / В.Е. Тараканов. – М.: Наука. Гл. ред. физ. мат. лит., 1985. – 192с.

УДК 621.316:532.232

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ АНТЕННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ СУШКИ ШЕРСТИ

Приводиться розрахунок геометричних параметрів антенної системи для забезпечення заданої діаграми направленості при сушінні вовни

Ключові слова: хвилевід, електромагнітне поле, діаграма направленості

Приводится расчет геометрических параметров антенной системы для обеспечения заданной диаграммы направленности при сушке шерсти

Ключевые слова: волновод, электромагнитное поле, диаграмма направленности

A calculation over of geometrical parameters of the aerial system is brought for providing of the set diagram of orientation at drying of wool

Key words: waveguide, electromagnetic field, diagram of orientation

А.Н. Мороз
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра применения электрической энергии в сельском хозяйстве
Национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка
ул. Артема, 44, г. Харьков, Украина, 61002
Контактный тел.: 8-067-362-55-59
E-mail: moroz-fekt@inbox.ru

Одним из наиболее перспективных направлений в развитии новых технологий при первичной обработке шерсти является использование электромагнитной энергии миллиметрового диапазона длин волн для сушки шерсти. В результате этого использования уничтожаются вредные микроорганизмы в шерсти, сокращается время технологического процесса, экономятся энергоресурсы, а также сохраняются природные свойства шерсти. Однако создание равномерно распределенного ЭМП в зоне нахождения шерсти на конвейере связано со значительными трудностями как теоретического, так и конструктивного характера.