

рахунку на оброблену ділянку 198 га становить 140 кілограмів. При вартості дизельного палива 8грн. 50 коп. сумарна економія коштів на паливі склала 1190 грн.

3. Термін окупності додаткових витрат на запропоновану конструкцію торсіонно-ударного розпушувача ґрунту становитиме 0,71 року.

Література

1. Мазнєв Г.Е. Економічне обґрунтування інженерних рішень в сфері АПК. / Навч. посібник / Мазнєв Г.Е., Турченко М.М., Щетиніна М.Д. – Харків: ХДТУСГ, 2001. – 401 с.
2. Механізовані польові роботи. Методика розрахунку, норми виробітку та витрат палива на основний обробіток ґрунту. Кн. 2 / За ред. В.В. Вітвіцького. – К.: ТОВ Комплекс Віта. – 1997. – 274 с.

□ □

Розроблено та застосовано метод послідовних наближень. Розглядається рішення нелінійних задач для пружних стержневих конструкцій на основі даного методу. Досліджено виникаюче при цьому явище гістерезису

Ключові слова: *стержнева конструкція, процес навантаження, гістерезис*

□ ————— □

Разработан и применен метод последовательных приближений. Рассматривается решение нелинейных задач для упругих стержневых конструкций на основе данного метода. Исследовано возникающее при этом явление гистерезиса

Ключевые слова: *стержневая конструкция, процесс нагрузки, гистерезис*

□ ————— □

The method of successive approximations is developed and applied. The solution of nonlinear problems for elastic beam structures based on this method is considered. The hysteresis phenomenon is investigated

Keywords: *beam structure, loading process, hysteresis*

□ □

УДК 531

ЯВЛЕНИЕ ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

А.Д. Шамровский
Доктор технических наук, профессор, профессор*
E-mail: adshamr@rambler.ru

Т.А. Миняйло
Аспирант*
*Кафедра программного обеспечения
автоматизированных систем
Запорожская государственная инженерная академия
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина, 69006
Контактный тел.: (061) 223-82-16
E-mail: minyajlo_tanja@ukr.net

1. Введение

На основе работы [1] представлен усовершенствованный метод последовательных перемещений для расчета стержневых систем с целью уменьшения количества итераций и сокращения времени расчета конструкций, а также улучшения надежности алгоритма вычислений.

Возможности этого метода приводят к выявлению ряда принципиально нелинейных эффектов, связанных, в первую очередь, с явлениями потери устойчивости системы.

В работе изучаются процессы нагружения и разгрузки систем, приводящих к явлению гистерезиса.

2.Метод последовательных приближений

Рассмотрим одноярусную стержневую систему, состоящую из n стержней, изображенную на рис. 1.

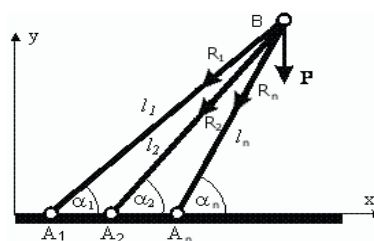


Рис. 1. Система из n стержней

Начальные координаты узлов будут:

$$x_{B0}, y_{B0}, x_{Ai} = \text{const}, y_{Ai} = \text{const}, \quad (i=1, \dots, n). \quad (1)$$

Пусть система находится в произвольном положении, отвечающему некоторому смещению узла В вдоль осей координат: u_{B0}, v_{B0}

Начальные длины стержней равны:

$$L_{i0} = \sqrt{(x_{B0} - x_{Ai})^2 + (y_{B0} - y_{Ai})^2} \quad (i=1, \dots, n). \quad (2)$$

Координаты узла В в произвольном положении:

$$x_B = x_{B0} + u_{B0}, \quad y_B = y_{B0} + v_{B0}. \quad (3)$$

Длины стержней при произвольном положении узла В равны:

$$L_i = \sqrt{(x_B - x_{Ai})^2 + (y_B - y_{Ai})^2} \quad (i=1, \dots, n). \quad (4)$$

Обозначим углы между стержнем номер i и осью координат через α_i ($i=1, \dots, n$).

Тогда косинусы и синусы этих углов будут равны соответственно:

$$\cos \alpha_i = \frac{x_B - x_{Ai}}{L_i}, \quad \sin \alpha_i = \frac{y_B - y_{Ai}}{L_i} \quad (i=1, \dots, n). \quad (5)$$

Абсолютные деформации стержней равны:

$$\Delta L_i = L_i - L_{i0}, \quad (i=1, \dots, n). \quad (6)$$

Для реакций стержней имеем:

$$R_i = D_i \Delta L_i, \quad D_i = \frac{E_i F_i}{L_{i0}} \quad (i=1, \dots, n). \quad (7)$$

Здесь E_i – модуль упругости материала стержня номер i ; F_i – площадь поперечного сечения стержня номер i . Эти реакции направлены вдоль стержней от узла (рис. 1).

Пусть теперь из положения со смещением узел В получит дополнительное смещение: u_B, v_B .

Составим уравнения равновесия узла В с учетом этого дополнительного смещения в линейной постановке. Дополнительные деформации стержней, вызванные смещениями, будут:

$$dL_i = u_B \cos \alpha_i + v_B \sin \alpha_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (8)$$

Вызванные этими смещениями реакции равны:

$$r_i = D_i dL_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (9)$$

Складывая реакции (7) и (9) получаем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= P_x - \sum_{i=1}^n (R_i + r_i) \cos \alpha_i = 0, \\ \sum Y &= P_y - \sum_{i=1}^n (R_i + r_i) \sin \alpha_i = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражения (9) с учетом (8) получаем:

$$\begin{aligned} a_{11} u_B + a_{12} v_B &= \sum x = P_x - \sum_{i=1}^n R_i \cos \alpha_i, \\ a_{21} u_B + a_{22} v_B &= \sum y = P_y - \sum_{i=1}^n R_i \sin \alpha_i, \\ a_{11} &= \sum_{i=1}^n D_i \cos^2 \alpha_i, \quad a_{12} = a_{21} = \\ &= \sum_{i=1}^n D_i \cos \alpha_i \sin \alpha_i, \quad a_{22} = \sum_{i=1}^n D_i \sin^2 \alpha_i \end{aligned} \quad (11)$$

Решая систему уравнений (11) находим новое перемещение узла В:

$$u_{B0} \rightarrow u_{B0} + u_B, \quad v_{B0} \rightarrow v_{B0} + v_B. \quad (12)$$

После этого выкладки повторяются, начиная с (3). Условием окончания циклического процесса можно взять:

$$\sqrt{(\sum x)^2 + (\sum y)^2} < \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \epsilon, \quad (13)$$

где ϵ – заданная относительная погрешность.

Однако описанный алгоритм действителен не всегда. Возможны случаи, когда определитель систем уравнений равен или близок к нулю, что характерно, например, для потери устойчивости системы. В таких случаях рекомендуется заменить поиск смещений u_B, v_B формулами, которые применялись в методе последовательных перемещений:

$$u_B = \gamma \sum x, \quad v_B = \gamma \sum y, \quad (14)$$

где γ – коэффициент пропорциональности, который равен меньшей из величин, обратных жесткостям:

$$\gamma \approx \min \left(\frac{1}{D_i} \right) \quad (i=1, \dots, n). \quad (15)$$

Однако и при неравном нулю определителе может оказаться, что перемещения u_B, v_B слишком велики, что противоречит условиям составления линейной системы уравнений (11), т.е. предположениям о малости данных перемещений. Для того, чтобы не допустить этого, зададим какие-то максимальные значения перемещений: u_{\max}, v_{\max} .

Если выясняется, что $u_B > u_{\max}$, то выполняем замены:

$$k = \frac{u_{\max}}{u_B}, \quad u_B \rightarrow k u_B, \quad v_B \rightarrow k v_B. \quad (16)$$

При этом вектор перемещения узла В сохраняет свое направление, но перемещение u_B уже не превосходит заданного максимального значения (равно ему). После этого для вновь полученных значений перемещений выполняем аналогичную проверку для второго перемещения. При $v_B > v_{\max}$ выполняем замены:

$$k = \frac{v_{\max}}{v_B}, \quad u_B \rightarrow k u_B, \quad v_B \rightarrow k v_B. \quad (17)$$

Таким образом, обеспечиваются достаточно малые значения линейных перемещений узла с сохранением его направления.

Рассмотренный метод применяется и для конструкции произвольной степени сложности, имеющей много подвижных узлов. В таком случае метод решения аналогичен используемому для конструкции с одним подвижным узлом. На одном шаге вычислений предполагается, что конструкция имеет лишь один подвижный узел, все остальные закреплены. Решаем задачу приведенным выше способом для данного узла и переходим к следующему. Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие (13) для всех узлов одновременно.

3. Изучение процесса нагружения

В линейной постановке решение задач о равновесии систем приводит к нахождению состояния равновесия и отвечающих ему усилий в стержнях, т.е. находится конечный результат, вызванный приложением к системе какой-то нагрузки. Процесс нагружения не изучается, как не представляющий самостоятельного интереса процесс.

Решение задач на основе нелинейного подхода позволяет выявить некоторые количественные отличия по сравнению с линейным подходом, а также продемонстрировать ряд принципиальных явлений, существенно отличающих нелинейные задачи от линейных.

В первую очередь это относится к вопросу о перемещении подвижного узла системы. До сих пор это перемещение задавалось вектором, что в линейном случае оправдано, поскольку все характеристики напряженно-деформированного состояния системы пропорциональны величине нагрузки (рис. 3). В отличие от этого в нелинейных задачах траектории перемещения узлов могут иметь достаточно сложную форму отличную от прямолинейной (рис. 4). Также достаточно сложными могут быть зависимости усилий в стержнях от величины нагрузки в процессе ее изменения.

Поэтому задание только одной точки этой траектории, отвечающей какой-то фиксированной нагрузке, недостаточно для полного описания процесса деформирования. Таким образом, главной задачей нелинейности является не нахождение положение равновесия системы после нагружения, а сам процесс нагружения, т.е. поиск функциональных зависимостей перемещения от приложенной силы.

Предложенный нелинейный алгоритм позволяет это сделать, изменяя компоненты нагрузки с небольшим наперед заданным шагом.

Рассмотрим модель простой стержневой конструкции, состоящей из 3 стержней, шарнирно соединенных в верхнем узле, изображенной на рис. 2.

Приведем примеры расчета конструкции показанной на рис. 2, при этом изменение нагрузки происходит постепенно, с заданным малым шагом, достигая в конечном итоге, приложенной силы.

На рис. 3 изображен процесс нагружения стержневой конструкции для линейного случая задачи. Для сравнения на рис. 4 изображено решение нелинейной задачи той же конструкции.

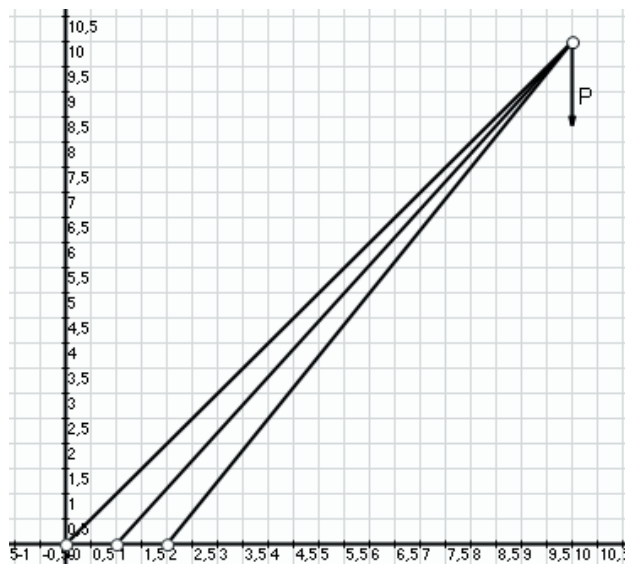


Рис. 2. Модель стержневой конструкции

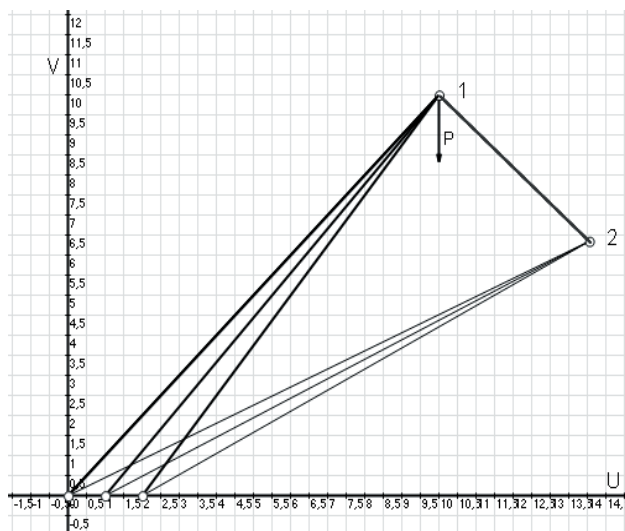


Рис. 3. Процесс нагружения для случая линейной задачи

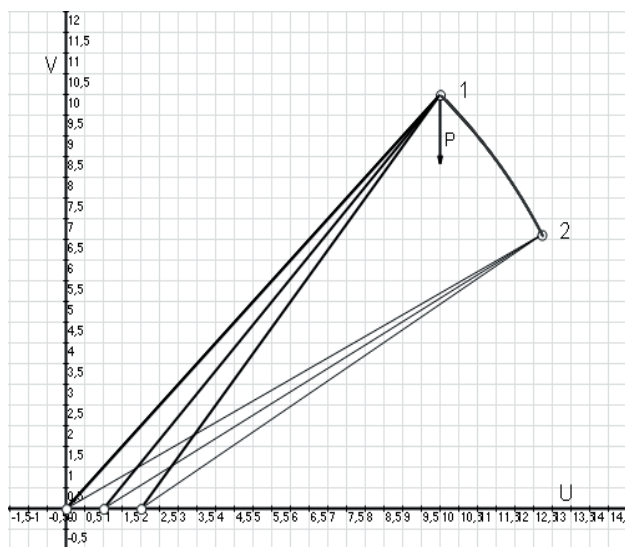


Рис. 4. Процесс нагружения для случая нелинейной задачи

Хорошо видно, что в случае нелинейной задачи траектория перемещения неподвижного узла является кривой линией. Это явление можно объяснить тем, что в линейном случае перемещение подвижного узла пропорционально величине этой нагрузки и представляет собой прямолинейную зависимость. При одновременном изменении обеих компонент проекций нагрузки в одинаковое число раз в такое же число раз изменятся и обе компоненты вектора перемещения узла вдоль осей координат. В то же время в нелинейном случае при изменении нагрузки узел движется по криволинейной траектории. Поэтому задание только одной точки этой траектории, отвечающей какой-то фиксированной нагрузке, недостаточно для полного описания процесса деформирования.

Следовательно, для получения более полной картины в нелинейном случае следует изучить процесс нагружения при постепенном росте приложенных сил. Однако в большинстве случаев отличия нелинейных задач от линейных является скорее количественным, чем качественным. Качественно новые эффекты возникают при возникновении потери устойчивости системы. Здесь изучение поведения системы в процессе постепенного роста нагрузки является принципиально важным, поскольку, в первую очередь, позволяет найти критическую силу, и возможности предложенного метода последовательных приближений таковы, что они позволяют исследовать за критическую деформацию после потери устойчивости, а также появляется возможность изучения и процесса разгрузки.

Приведем на рис. 6 пример нагрузки конструкции, изображенной на рис. 2 в случае потери устойчивости. Этот процесс сам по себе является нелинейным.

В этом случае при увеличении нагрузки до определенного предела происходит скачкообразное изменение положения конструкции. Такое явление называется потерей устойчивости или, в современной терминологии, катастрофой, при котором дальнейшее поведение конструкции предсказать невозможно.

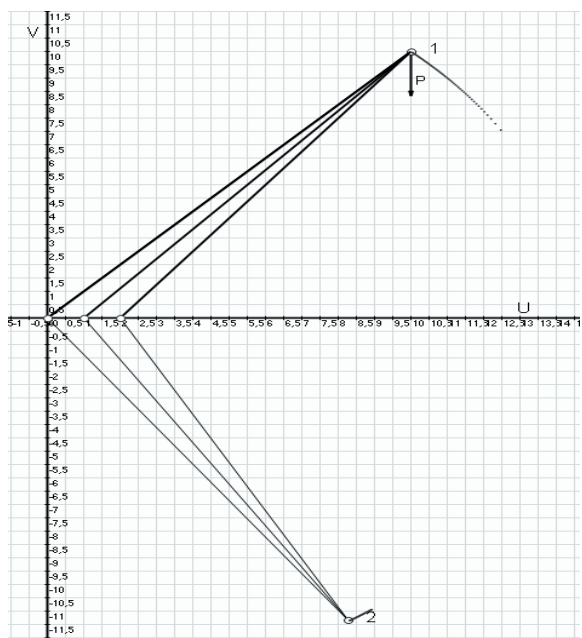


Рис. 5. Процесс нагружения стержневой конструкции в случае потери устойчивости

Кроме изображения траектории движения узла в процессе нагружения можно также изобразить зависимости перемещения узла вдоль осей координат от приложенной нагрузки. Как и прежде нас интересует процесс нагружения, т.е. постепенное увеличение силы.

На рис. 6-7 изображены примеры зависимостей перемещений для стержневой конструкции, изображенной на рис. 2, в случае потери ею устойчивости.

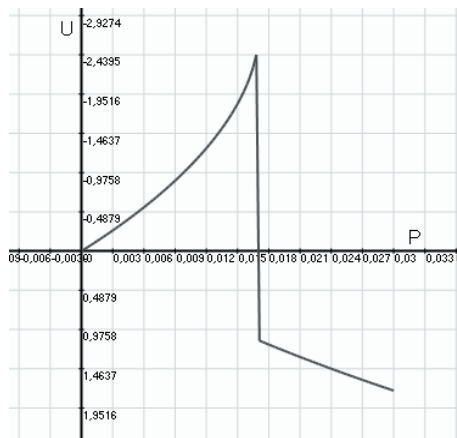


Рис. 6. График зависимости перемещения вдоль оси x от приложенной нагрузки

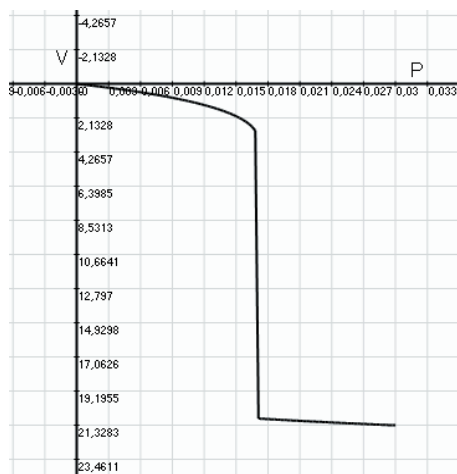


Рис. 7. График зависимости перемещения вдоль оси y от приложенной нагрузки

4. Гистерезис

Гистерезисом в механике твердых тел называют несовпадение кривых нагружения и разгрузки деформируемого тела [2].

Образование петель гистерезиса связано с появлением в деформируемом теле остаточных, необратимых деформаций, пластических или разрывных, в связи с чем, тело, или его отдельные элементы, при снятии деформирующих сил частично возвращается к первоначальной форме. Петля гистерезиса ограничивает некоторую площадь, величина которой есть мера работ, затраченной на необратимую деформацию.

Исследуем процесс приложение нагрузки: найдем положение равновесия системы и построим соответ-

ствующие графики перемещения подвижного узла, а также зависимость перемещений вдоль осей координат от значения приложенной силы.

Рассмотрим подробнее результаты примера потери устойчивости стержневой конструкции изображенной на рис. 5. Соответствующая система до приложения нагрузки занимает естественное положение равновесия сверху над горизонтальной линией, проходящей через неподвижные шарниры. Однако эта же система может, при отсутствии нагрузки, занимать и второе естественное положение равновесия, расположенное снизу от указанной горизонтальной линии оси X симметрично верхнему положению.

Приложенная вертикально вниз нагрузка может при достижении определенной величины переместить систему из окрестности верхнего положения равновесия в окрестность нижнего положения равновесия. Указанное перемещение происходит скачком, после которого система оказывается ниже, чем нижнее положение равновесия в силу наличия направленной вниз вертикальной нагрузки.

Если теперь плавно увеличить нагрузку до нуля, то система перейдет в естественное положение равновесия, но не в исходное верхнее, а в нижнее, т.е. снятие приложенной нагрузки не возвращает систему в первоначальное положение. Для возврата в верхнее положение необходимо приложить вертикальную положительную нагрузку. После достижения этой нагрузки определенной величины система перейдет, вновь скачком, в окрестность верхнего естественного положения равновесия. Уменьшив теперь нагрузку до нуля, система вернется в первоначальное положение равновесия.

На рис. 8 изображен график зависимости перемещения вдоль оси Y от приложенной нагрузки. Плавному увеличению направленной вниз нагрузки отвечает участок траектории 1–2–3–4 со скачком 2–3. Дальнейшему увеличению нагрузки до нуля отвечает участок траектории 4–5. Ненулевому значению перемещения при отсутствии нагрузки отвечает нахождение системы в верхнем, а не нижнем естественном состоянии равновесия. Увеличение направленной нагрузки отвечает участку траектории 5–6–7–8. Дальнейшее уменьшение нагрузки до нуля приводит к начальной точке траектории вдоль участка 8–1.

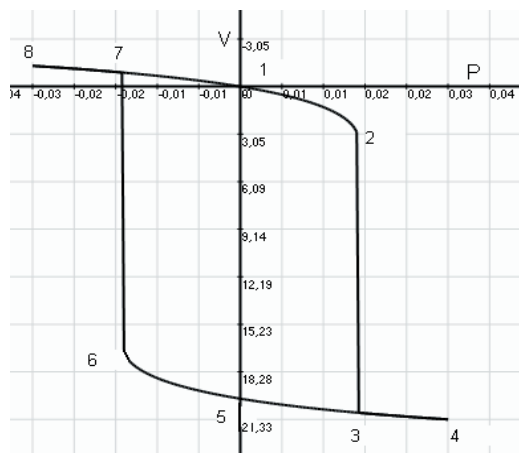


Рис. 8. График зависимости перемещения вдоль оси Y от приложенной нагрузки

Соответствующий петлеобразный график хорошо известен и описывает явление гистерезиса. Если ранее отмечалось, что нелинейные задачи отличаются от линейных криволинейным перемещением подвижного узла системы, то теперь получено новое явление, связанное с неоднозначностью зависимости перемещения от нагрузки. Это, в свою очередь, связано с наличием у системы более чем одного (при отсутствии нагрузки) состояния равновесия.

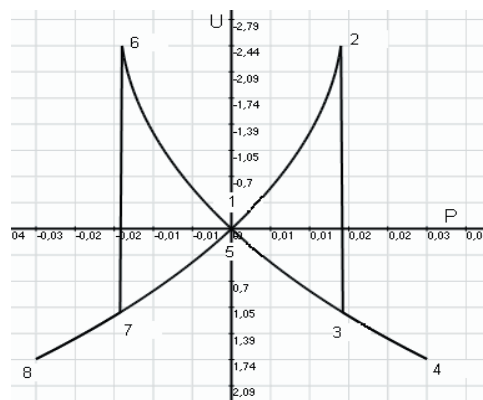


Рис. 9. График зависимости перемещения вдоль оси X от приложенной нагрузки

Проведем соответствующий анализ зависимости перемещения подвижного узла вдоль оси X (рис. 9).

Первоначальный рост нагрузки отвечает участку 1–2–3–4, со скачком в точке 2. Дальнейшее уменьшение нагрузки до нуля отвечает участку 4–5. Последующий рост нагрузки описывает участок 5–6–7–8. При достижении определенного значения нагрузки, но уже с отрицательным значением, система вновь теряет устойчивость и проваливается, но уже в верхнее положение, на графике это участок 6–7 и при дальнейшем увеличении нагрузки достигает положения равновесия, точка 8. Окончательное увеличение нагрузки до нуля и возврат в исходное положение отвечает участку 8–1.

Выводы

Предложен и применен метод последовательных приближений для исследования поведения стержневых конструкций в процессе нагружения системы. Найдены и приведены основные принципиальные отличия линейных от нелинейных задач, среди которых определение траектории движения подвижного узла конструкции и явление гистерезиса, что позволяет более детально анализировать поведение стержневых конструкций в случаях потери устойчивости.

Литература

1. Шамровський, О. Д. Розрахунок стержневих конструкцій методом послідовних переміщень із урахуванням геометричної нелінійності [Текст] / О. Д. Шамровський, Д. М. Колесник, Ю. О. Лимаренко // Нові матеріали і технології в металургії і машинобудуванні. – 2009. – №1. – С. 78 –85.
2. Ажгирей, Г.Д. Структурная геология [Текст] / Г.Д. Ажгирей. – Издательство московского университета, 1956. – 493 с.