

# НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОГО БАЛАНСА В СИСТЕМАХ ЛОТКИ- ВОЛЬТЕРРА С ВОЗМУЩЕНИЕМ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Мохаммад Ракан Абед Алнаби  
Альджаафрех  
Аспирант  
Кафедра прикладной математики  
Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники  
пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61166  
E-mail: mohammadrakan1987@yahoo.com

*Досліджено основні ефекти і закономірності, що характеризують модель співіснування двох видів при слабких синусоїдальних зовнішніх впливах на швидкість розмноження, описувану рішенням системи диференціальних рівнянь типу Лотки-Вольтерра. Знайдено чисельні рішення при частотах впливу, близьких до частоти циклу незбуреної системи; досліджено стійкість неавтономної системи*

*Ключові слова: модель Лотки-Вольтерра, проблеми стійкості, фазовий простір, аттрактор, хаос, нерезонансний тор*

*Исследованы основные эффекты и закономерности, характеризующие модель сосуществования двух видов при слабких синусоидальных внешних воздействиях на скорость размножения, описываемую решением системы дифференциальных уравнений типа Лотки-Вольтерра. Найдены численные решения при частотах воздействия, близких к частоте цикла невозмущенной системы; исследована устойчивость неавтономной системы*

*Ключевые слова: модель Лотки-Вольтерра, проблемы устойчивости, фазовое пространство, аттрактор, хаос, нерезонансный тор*

## 1. Введение

В работе рассмотрена математическая модель совместного сосуществования двух биологических видов (популяций) типа «хищник - жертва», называемая моделью Вольтерра – Лотки. Впервые она была получена А. Лоткой (1925 г.) который использовал её для описания динамики взаимодействующих биологических популяций. Чуть позже и независимо от Лотки аналогичные более сложные модели были разработаны итальянским математиком В. Вольтерра (1926 г.), глубокие исследования которого в области экологических проблем заложили фундамент математической теории биологических сообществ или так называемой математической экологии [1]. В настоящей работе содержится описание основных механизмов перехода к неустойчивости и хаосу в модели сосуществования двух достаточно многочисленных видов в замкнутом ареале, и алгоритмы их численного анализа, необходимые для решения задачи. Объектом исследования является процесс динамики сосуществования видов «жертв» и «хищников» в среде их обитания с внешним воздействием; предметом исследования – модели Лотки–Вольтерра с возмущенной правой частью и численные методы их анализа.

Цель работы – системный анализ экосистемы и проведение численных экспериментов по исследованию и использованию особенностей и периодических процессов в эволюционных моделях.

## 2. Литературный обзор

Эффект хаотизации движений в детерминированных нелинейных системах, еще совсем недавно

казавшийся просто невероятным в рамках традиционных стереотипов классической механики и теории колебаний, сейчас уже представляется как научно обоснованное явление фундаментальной значимости. Интерес к этой тематике не только не ослабевает, но продолжает нарастать, о чем свидетельствует увеличивающийся поток научной информации в виде научных статей [2], в частности, в работе [3] приведено теоретическое обоснование результатов расчета по рассмотренной ниже модели 1. В докладах [4] и [5] показаны возможные сценарии перехода к хаотическому движению в таких экологических системах через бифуркации. Модель Лотки-Вольтерра и её обобщения широко используется, например, в монографии [6] по биологии и диссертации [7], работах по экологии [8, 9] и экономике [10], где, в частности, показано, что после незначительной модификации трофической функции, модель адекватно описывает взаимоотношение секторов производства и поставок.

Теория предсказывает, что при наличии определенных типов внешних воздействий со стороны среды на такую систему, её устойчивость может нарушаться, и движения приобретают квази-случайный вид [11, 12].

## 3. Математическое описание и модель объекта

Рассматривается в малом ареале (остров) экосистема из двух видов:

- 1) «жертвы» – в отсутствие хищников могут размножаться неограниченно;
- 2) «хищники» – размножение ограничено численностью жертв.

Численность тех и других достаточно велика, и меняется гладко во времени.

Первоначальная автономная система (1) возбуждается малым, по сравнению с остальными параметрами, периодическим колебанием размножения одного или обоих видов этой экосистемы.

Базовая модель Лотки-Вольтерра – совместного существования двух видов:

$$\begin{aligned} dx / dt &= rx - \gamma_1 xy, \\ dy / dt &= -sy + \gamma_2 xy, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $r, s, \gamma_1, \gamma_2$  – положительные константы – мальтузианские и трофические коэффициенты, соответственно;  $x$  – число особей жертв;  $y$  – число особей хищников;  $x, y \gg 1$ .

#### 4. Анализ и преобразования модели

Нетривиальное состояние равновесия модели (1)  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$  имеет координаты

$$x_* = s / \gamma_2, y_* = r / \gamma_1.$$

С помощью замены переменных  $x := x - x_*, y := y - y_*$ , система (1) преобразуется к виду:

$$\dot{x} = -\gamma_1(x_* \cdot y + x \cdot y), \dot{y} = \gamma_2(y_* \cdot x + x \cdot y). \tag{2}$$

Её динамику в окрестности новой точки равновесия (0,0) исследуем аналитически. Для этого делим второе уравнение из (2) на первое и получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

Потенцируем и обозначим:  $\exp(C_0) = C, \Theta_1$  и  $\Theta_2$  – однотипные функции переменных  $x$  и  $y$ . Соответственно, получим:

$$\begin{aligned} \Theta(x,y) &= \Theta_1(x) \cdot \Theta_2(y) = \\ &= \frac{e^{x/\gamma_1} e^{y/\gamma_2}}{[\gamma_1(x+x_*)]^{x_*/\gamma_1} [\gamma_2(y+y_*)]^{y_*/\gamma_2}} = C \end{aligned}$$

– его общий интеграл.

Он представляет решения  $x(t), y(t)$  системы (2) как неявную функцию. Он постоянен на каждом решении системы (2), а значит, является, по определению, её первым интегралом [11]. Прямым дифференцированием функций  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  проверяем, что в точке  $(x^*, y^*)$  они имеют локальный изолированный максимум. А значит, и их произведение – функция  $\Theta(x, y)$  – тоже. Во всех приложениях интересны, в основном, конечные движения, в частности, периодические, поскольку только они имеют физический смысл. Для их выявления в данной системе сначала исследуем решение (2). При  $x_0 > -x_*, y_0 > -y_*$  решения периодические, поскольку функция  $\Theta(x,y)$  имеет максимум в  $(x^*, y^*)$  и, значит, фазовые траектории системы замкнуты (кроме стационарной точки  $x=0, y=0$ ), т. к. принадлежат на XY ее линиям уровня, не содержащим других стационаров. Решая задачу Коши, получим графики периодических решений и фазовый портрет систем (1), (2).

Проблема состоит в исследовании поведения системы, характеризующейся близостью периода  $T$  циклов невозмущенной системы (1–2) и периода возмущения  $(1/\Omega)$ .

Здесь  $\Omega$  – бифуркационный параметр всех частных моделей, полученных из базовой (1–2). Поведение моделей исследуется вдали от начала:  $t \gg 0$ .

Во всех случаях синусоидального возмущения базовой модели для численного анализа задачи Коши типа (1–2), соответствующие модели приводятся к форме:

$$Z' = f(Z, m, \Omega, t), \tag{3}$$

где  $f(Z, m, \Omega, t) = F(Z) + P(m, \Omega, t), Z^T = (x(t), y(t))$ , при начальных условиях  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  для каждой траектории.

Здесь автономное слагаемое вектора правой части системы (3) для всех моделей одинаково и имеет вид:

$$F(Z) = \begin{pmatrix} -\gamma_1(x_* y + xy) \\ \gamma_2(y_* x + xy) \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемых моделей возмущающие слагаемые в (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} P_1(m, \Omega, t) &= \begin{pmatrix} m \sin \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}, P_2(m, \Omega, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ m \sin \Omega t \end{pmatrix}, \\ P_3(m, \Omega, t) &= \begin{pmatrix} m \sin^2 \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}, P_4(m, \Omega, t) = \begin{pmatrix} m \sin(\Omega t + \alpha) \\ m \sin \Omega t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

#### 5. Численный анализ возмущенных моделей

##### Модель 1. Синусоидальное возмущение «жертв» $P_1(m, \Omega, t)$

Приведены результаты работы MathCad-программы, фазовый портрет и график решения по точкам (рис. 1). Бифуркационный параметр –  $\Omega$  мало отличается от частоты  $1/T$  цикла в (2);  $r, s, g_0, g_1$  – нормированные к 1 параметры из (1); при этом  $T \approx 1$ .

В полном соответствии с теорией [3, 12], фазовый портрет в  $(x, y, t)$  и его проекция на XY показывают, что амплитуда колебаний меняется нерегулярно, с тенденцией к неограниченному увеличению с ростом  $t$ .

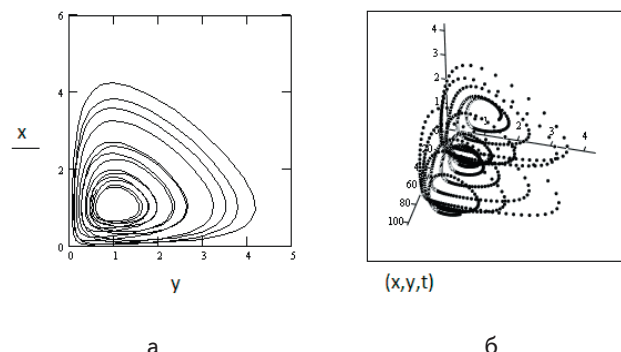


Рис. 1. Фазовые портреты модели 1: а – портрет на плоскости XY; б – портрет в расширенном фазовом пространстве

**Модель 2. Синусоидальное возмущение численности «хищников» с аналогичными параметрами:  $P_2(m, \Omega, t)$ .**

На левом графике (рис. 2, а) видна "перемежаемость", характерная для состояний вблизи странного аттрактора, и нелинейные искажения синусоиды. Из-за разного поведения "хищников" и "жертв" одинаковые периодические возмущения прироста их численности демонстрируют разную динамику системы: фазовый портрет несимметричен, в отличие от модели 1 (рис. 2, б)

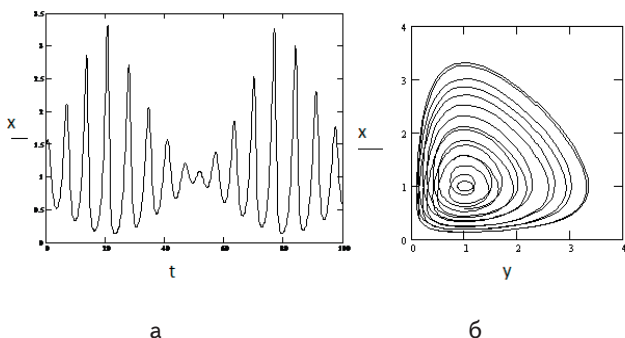


Рис. 2. Решения для модели 2: а – решение для "жертв" во времени; б – фазовый портрет на плоскости XY

**Модель 3. Возмущение типа  $P_3(m, \Omega, t) = (m \sin^2(\Omega t), 0)$  для "жертв"**

В этом случае потеря устойчивости не проявляется (рис. 3, а) – появление эффекта зависит от того, численность которого из видов возмущается и какой функцией, при неизменных амплитуде и частоте возмущения.

На правом графике (рис. 3, б) видно, что численности обоих видов стабилизируются вблизи нуля, что не предсказано теорией.

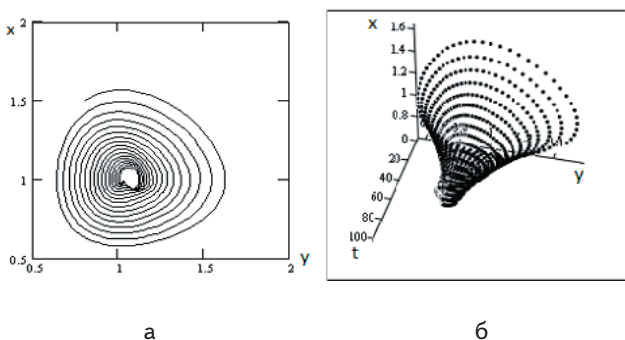


Рис. 3. Фазовые портреты модели 3: а – портрет на плоскости XY; б – портрет в расширенном фазовом пространстве

**Модель 4. Возмущение прироста обоих видов со сдвигом фаз**

Возмущение правой части системы имеет вид:

$$P_4(m, \Omega, t) = (m \sin(\Omega t + \alpha), m \sin \Omega t).$$

Фазовый портрет представлен на рис. 4.

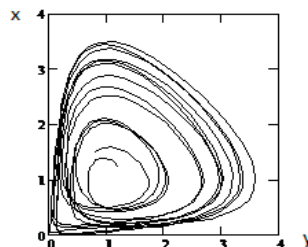


Рис. 4. "Разбегание" двух первоначально близких фазовых траекторий

Численный эксперимент показал, что траектории, имеющие близкие начальные условия, со временем демонстрируют свойства "разбегания" и "перемешивания", характерные для странного аттрактора.

**6. Выводы**

Проведено исследование проблемы динамического баланса двух биологических видов в замкнутой экосистеме с внешним возмущением популяций, которое моделируется малым по амплитуде синусоидальным возмущением правой части известной системы уравнений Лотки–Вольтерра. Применение методов качественной теории дифференциальных уравнений предсказывает неограниченные хаотические движения в неавтономной системе вблизи периодического решения автономной при совпадении периодов. Численные эксперименты показывают, что:

- 1) фазовые портреты систем, похожи на известные в физике "фигуры Лиссажу" и имеют тип вырождающегося 2-мерного нерезонансного тора;
- 2) различные по характеру нерегулярности поведения "хищников" и "жертв" проявляются в фазовых портретах при одинаковых возмущениях;
- 3) синусоидальное воздействие на популяцию, например путем изменения скорости размножения одного или обоих видов вследствие сезонных изменений пищевого рациона или охоты, приводит к неперiodической динамике системы;
- 4) определены параметры возмущений, приводящие вблизи "резонанса"  $\Omega=1/T$ , как к неперiodическому росту популяций (модель 1), так и к неперiodическим движениям в конечной области (модели 2 и 4), или к стабилизации вблизи нуля (модель 3). При этом возможна гибель популяций.

Всё это подтверждает, что даже достаточно простые модели экосистем выявляют их неустойчивость – чувствительность к малым внешним возмущениям.

**Литература**

1. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтерра. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 288 с.
2. Jost, C. The wolves of Isle Royale display scale-invariant satiation and density dependent predation on moose [Text] / C. Jost, G. Devulder, J. A. Vucetich, R. Peterson, R. Arditi // J. Anim. Ecol. – 2005. – № 74(5). – С. 809–816.

3. Мартынюк, А. А. Хаотическая потеря предельного цикла в задаче Вольтерра [Текст] / А. А. Мартынюк, Н. В. Никитина // Докл. АН Украины. – 1996. – № 4. – С. 1–7.
4. Hayashi, C. Bifurcations and the Generation of Chaotic States in the Solutions of Nonlinear Differential Equations [Text]: Докл. Кн. 1/ С. Hayashi, Н. Kawakami // Теоретическая и прикладная механика. – Варна, София, 1981 – С. 537–542.
5. Hoppensteadt, F. Predator-prey model [Text] / F. Hoppensteadt // Scholarpedia. – 2006. – № 1(10). – 1563 с.
6. Brauer, F. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology [Text] / F. Brauer, C. Castillo-Chavez, Springer-Verlag, 2000. – 201 p.
7. Сорокин, П. А. Моделирование биологических популяций с использованием комплексных моделей, включающих в себя индивидуум-ориентированные и аналитические компоненты [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук / П. А. Сорокин. – Долгопрудный, 2004. – 153 с.
8. Arditi, R. How Species Interact: Altering the Standard View on Trophic Ecology [Text] / R. Arditi, L. R. Ginzburg. – Oxford University Press, 2012. – 112 p.
9. Гусятников, П. П. Качественные и численные методы в задачах оптимального управления в моделях хищник-жертва и популяции леммингов [Текст] : дис. ... канд. физ.-мат. наук [Текст] / П. П. Гусятников. – Москва, 2006. – 101 с.
10. Nasritdinov, G. Limit cycle, trophic function and the dynamics of intersectoral interaction [Text] / G. Nasritdinov, R. T. Dalimov // Current Research J. of Economic Theory. – 2010. – № 2(2). – С. 32–40.
11. Эрроусмит, Д. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями [Текст] / Д. К. Эрроусмит, К. М. Плейнс. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
12. Арнольд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В. И. Арнольд. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

*Запропонована методика прогнозування рівня паводкових вод на основі побудови апроксимуючих кривих з використанням статистичних даних як про рівень води рік під час паводку (повеней), так і про метеорологічні дані. Дана методика також дозволяє проводити дослідження взаємозв'язку рівня паводкових вод і метеорологічних даних для виявлення вагомих факторів впливу на їх підняття*

*Ключові слова: рівень паводкових вод, метеорологічні дані, апроксимуючі криві, методика прогнозування*

*Предложена методика прогнозирования уровня паводковых вод на основе построения аппроксимирующих кривых с использованием статистических данных как об уровне воды рек во время паводка (наводнения), так и о метеорологических данных. Данная методика также позволяет проводить исследования взаимосвязи уровня паводковых вод и метеорологических данных, с использованием коэффициента контингенции для выявления значимых факторов влияния на их поднятия*

*Ключевые слова: уровень паводковых вод, метеорологические данные, аппроксимирующие кривые, методика прогнозирования*

УДК 514.166.06

## МЕТОДИКА ПОБУДОВИ АПРОКСИМУЮЧИХ КРИВИХ ДЛЯ ОЦІНКИ І ПРОГНОЗУВАННЯ РІВНЯ ПАВОДКОВИХ ВОД

О. І. Клапоущак

Аспірант

Кафедра комп'ютерних технологій в  
системах управління і автоматики  
Івано-Франківський національний  
технічний університет нафти і газу  
вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ,  
Україна, 76019

E-mail: oksana\_kl@meta.ua

### 1. Вступ

Негативний вплив від паводків (повеней) спостерігається як в Україні (2008 р. – 2013 р.) [1 – 3], так і за кордоном зокрема, а саме: Китай (2008 р., 2013 р.) [4,

5]; Велика Британія, Іспанія, Франція, Італія (2013 р., 2014 р.) [6] та Німеччина [7], тому задачі прогнозування і контролю рівня паводкових вод залишаються актуальними і надалі, оскільки середньорічні збитки від паводків у 1995 – 1998 роках склали 899.3 млн грн.,