

13. Пипкин, Ю.В. Метод получения математических моделей станочных приспособлений / Ю.В. Пипкин // Сборник трудов пятой межд. науч.-техн. конф. "Современные технологии, экономика и экология в промышленности, на транспорте и в сельском хозяйстве", 7-12 сентября, г. Алушта. – К.: Институт системных исследований, 1998.
14. Піпкін, Ю.В. До питання про математичне моделювання затискової можливості обертаючих пристроїв та оснастки / Ю.В.Піпкін, А.Н.Зелінський // "Наукові нотатки" зб. наук. праць. – Луцьк : ЛДТУ. –1999. –№ 5. – С. 197-206.
15. Пипкин, Ю.В. Анализ силового замыкания в станочных приспособлениях / Ю.В.Пипкин // Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки (Машинобудування). – 2002. – № 2. – С. 88-93.
16. Зелинский, А.Н. Структурно - функциональные графовые модели технологических систем механической обработки / А.Н.Зелинский, Ю.В.Пипкин // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Международный сб. научных трудов: Специальный выпуск – Материалы V международной научно-техн. конф. "Машиностроение и техносфера на рубеже XXI века" в г. Севастополе 8-11 сентября 1998 г. В. 3-х томах. Т.2. – Донецк: ДонГТУ. Вып. 6, 1998. – С. 297–300.
17. Пипкин, Ю.В. Методика анализа силового замыкания технической системы станочного приспособления / Ю.В.Пипкин, А.Н.Зелинский, Н.В.Коцюбинская // Машиностроение и техносфера XXI века // Сборник трудов XII международной научно-технической конференции в г. Севастополе 12-17 сентября 2005 г. В 5-ти томах. – ДонНТУ: Донецк, 2005. – С. 64-69.
18. Пипкин, Ю.В. Базовая расчетная схема силового замыкания в станочных приспособлениях / Ю.В.Пипкин, А.Н.Зелинский, Н.В.Коцюбинская // Прогресивні технології і системи машинобудування: Міжнародний зб. наукових праць. – Донецьк: ДонНТУ, 2006. – Вип. 31. – С. 227-237.
19. Косаков, В.С. Основы конструирования приспособлений: Учебник для вузов. / В.С. Косаков – М.: Машиностроение, 1983. – 277 с.

Показаний один із способів математичного моделювання робочого процесу в дискретних пневмоагрегатах, що ґрунтується на розгляді умов рівноваги одномасової пружно-в'язкісної моделі (модель Максвелла). Рішення, отримані на цій основі, компактні і мають достатню для практики розрахункову точність

Ключові слова: дискретні пневмоагрегати, математичне моделювання робочого процесу, пружно-в'язкісна модель

Показан один из способов математического моделирования рабочего процесса в дискретных пневмоагрегатах, основанный на рассмотрении условий равновесия одномассовой упруго-вязкостной модели (модель Максвелла). Решения, полученные на этой основе, компактные и обладают достаточной для практики расчётной точностью

Ключевые слова: дискретные пневмоагрегаты, математическое моделирование рабочего процесса, упруго-вязкостная модель

The one way of mathematical modeling of the workflow in digital pneumatic units, based on considering the equilibrium conditions for single-mass elastic-viscous model (Maxwell model) is shown. The solutions obtained in this way are compact and have the necessary accuracy for practical calculation

Keywords: discrete pneumatic units, mathematical modeling of workflow, elastic-viscosity model

Введение

Ввиду сложности термодинамических и газомеханических процессов в полостях пневмоагрегата (ПА) математическая модель таких агрегатов представля-

ется в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений, которую принято решать численным методом.

В работе [2] была разработана линейная модель дискретного ПА на основе замены нелинейных зави-

УДК 621.5

РАСЧЁТ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПНЕВМОАГРЕГАТА НА ОСНОВЕ ЕГО УПРУГО– ВЯЗКОСТНОЙ МОДЕЛИ

Г.А. Крутиков

Кандидат технических наук, доцент*

М.Г. Стрижак

Аспирант*

*Кафедра «Гидропневмоавтоматика и гидропривод»

Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, 61002

симостей секущими, а не касательными, что в значительной степени повысило точность аналитических решений для всех переменных состояния ПА. Однако, общие решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений, соответствующих такой линейной модели, достаточно громоздки. Поэтому, для проведения оперативных инженерных расчётов возникает необходимость в более простых аналитических решениях.

Целью данной работы является получение более простых и компактных выражений для описания переходных процессов на основе рассмотрения условий равновесия упруго-вязкостной механической модели, которая заменяет дискретный ПА.

Основная часть

Линейная модель 3-го порядка ПА в размерной форме на основе принципов линеаризации, изложенных в работе [2], имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = \frac{kf_1^3 a_m p_m}{F_1(x_{01} + x_c)} (\alpha_1 \sigma_1 + \beta_1) - \frac{kp_{1y}}{(x_{01} + x_c)} \frac{dx}{dt}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \frac{-kf_2^3 a_m p_m}{F_2(x_{02} - x_c + L)} (\alpha_2 \sigma_2 + \beta_2) + \frac{kp_{2y}}{x_{02} + L - x_c} \frac{dx}{dt}; \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} (p_1 F_1 - p_2 F_2 - P), \end{cases} \quad (1)$$

где x , p_1 , p_2 , m , P - параметры пневмоагрегата (рис. 1.а), $\sigma_1 = \frac{p_1}{p_m}$, $\sigma_2 = \frac{p_2}{p_m}$, α_1 , α_2 , β_1 , β_2 - параметры секущих, аппроксимирующих переходную функцию $\varphi(\sigma)$ [2].

Основными силами формирующими процесс свободного движения (в т. ч. свободных колебаний) рабочего органа ПА, являются силы инерции, а также силы вязкого трения и упругости, что связано со свойствами рабочего тела ПА – сжатого воздуха. Поэтому механическим эквивалентом двустороннего ПА может быть одномассовая упруго-вязкостная модель Максвелла [1, 3]. Изучение закономерностей движения такого механического аналога позволяет получить решения, которые имеют интерес для практики.

Введем понятие присоединенных жесткостей пружин C_1 и C_2 , обусловленных сжатием воздуха в левой и правой полостях, а также присоединенных звеньев вязкого трения, обусловленного демпфированием сжатого воздуха на впускном и выпускном пневмотрактах. Коэффициенты вязкого трения звеньев демпфирования обозначим через h_1 и h_2

$$C_1 = \frac{kp_{1y} F_1}{x_{01} + x_c}; \quad C_2 = \frac{kp_{2y} F_2}{L + x_{02} - x_c}. \quad (2)$$

Связь между коэффициентом вязкого трения h и жесткостью пневмопружины C для системы «дрессель-емкость» выразится зависимостью [1]:

$$h = tC = \frac{W}{kRT_m \alpha_1} C, \quad (3)$$

τ - постоянная времени звена «дрессель-емкость»; $\alpha_1 = \frac{\partial G}{\partial \Delta p}$ - проводимость дресселя.

Проводимость впускного и выпускного тракта ПА находится из выражений

$$\begin{aligned} \alpha_1^1 &= \frac{\partial G_1}{\partial \Delta p} = \frac{\partial G_1}{\partial (p_m - p_1)} = \frac{\partial G_1}{\partial p_1} = -f_1^3 p_m \sqrt{\frac{k}{RT_m}} \alpha_1, \\ \alpha_2^1 &= \frac{\partial G_2}{\partial \Delta p} = \frac{\partial G_2}{\partial (p_2 - p_0)} = \frac{\partial G_2}{\partial p_2} = f_2^3 p_m \sqrt{\frac{k}{RT_m}} \alpha_2 \end{aligned}, \quad (4)$$

где α_1 и α_2 - коэффициенты линеаризации [2].

Постоянная времени для рабочей и выхлопной полостей τ_1 и τ_2 :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= - \frac{(x_{01} + x_c) F_1}{kf_1^3 \sqrt{kRT_m} \alpha_1} \\ \tau_2 &= \frac{(L + x_{02} - x_c) F_2}{kf_2^3 \sqrt{kRT_m} \alpha_2} \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты вязкого трения h_1 и h_2 обусловлены дресселированием сжатого воздуха в питающем и выхлопном трактах

$$h_1 = - \frac{p_{2y} F_1^2}{f_1^3 a_m \alpha_1}; \quad h_2 = \frac{p_{2y} F_2^2}{f_2^3 a_m \alpha_2}. \quad (6)$$

На рис. 2.б представлено механический аналог двустороннего ПА, основой которого является упруго-вязкая модель Максвелла. Причем x_1 и x_2 - скрытые (фиктивные) координаты, N_{01} и N_{02} - усилия предварительного поджатия левой и правой пружины.

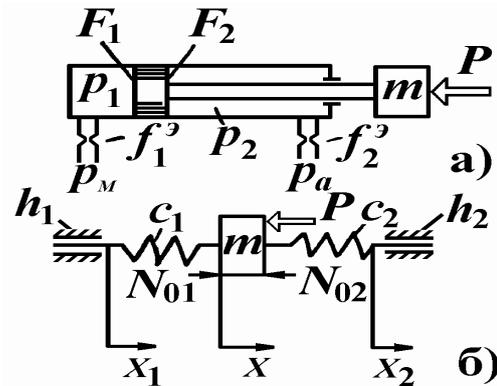


Рис. 1. Физическая модель дискретного ПА (а) и ее механический аналог (б)

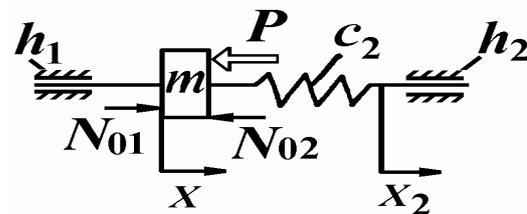


Рис. 2. Упрощенная упруго-вязкая модель ПА

В соответствии с принятыми обозначениями линейная модель ПА может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = \frac{C_1}{h_1} p_1 + \frac{C_1}{F_1} \dot{x} - \frac{C_1 \beta_1}{h_1 \alpha_1} p_m; \\ \frac{dp_2}{dt} = \frac{C_2}{h_2} p_2 + \frac{C_2}{F_2} \dot{x} - \frac{C_2 \beta_2}{h_2 \alpha_2} p_m; \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{F_1}{m} p_1 - \frac{F_2}{m} p_2 - \frac{P}{m}. \end{cases} \quad (7)$$

При решении системы неоднородных линейных уравнений третьего порядка (7) возникают трудности из-за нахождения корней характеристического уравнения. Поэтому упростим ее, сведя к системе второго порядка.

Как показали пробные расчеты, наиболее удачным упрощением является предположение, что $C_1 = \infty$, то есть пружина, соответствующая левой полости, заменяется на стержень (рис. 2), а сжатый воздух в полости, как бы заменяется несжимаемой средой. Такое предположение основано на том, что, как показывает анализ осциллограмм ПА давление в рабочей полости устанавливается достаточно быстро (значительно быстрее, чем изменяется скорость).

$$\lim_{C_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{C_1} \frac{dp_1}{dt} = \frac{p_1}{h_1} - \frac{\dot{x}}{F_1} - \frac{\beta_1}{h_1 \alpha_1} p_m \rightarrow 0, \quad (8)$$

откуда

$$p_1 = -\frac{h_1}{F_1} \dot{x} - \frac{\beta_1}{\alpha_1} p_m. \quad (9)$$

В соответствии с этим предположением система уравнений (7) упрощается:

$$\begin{cases} \frac{dp_2}{dt} = -\frac{C_2}{h_2} p_2 + \frac{C_2}{F_2} \dot{x} - \frac{C_2 \beta_2}{h_2 \alpha_2} p_m; \\ \frac{dV}{dt} = \frac{F_1}{m} \left(-\frac{n_1}{F_1} V - \frac{\beta_1}{\alpha_1} p_m \right) - \frac{F_2}{m} p_2 - \frac{P}{m}. \end{cases} \quad (10)$$

Сведем систему (10) к одному уравнению, положив $\frac{dx}{dt} = V$

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{C_2}{h_2} + \frac{h_1}{m} \right) \frac{dV}{dt} + \left(\frac{C_2 h_1}{h_2 m} + \frac{C_2}{m} \right) V = \\ = \frac{C_2 \beta_2 p_m F_2}{h_2 \alpha_2 m} - \left(\frac{P}{m} + \frac{\beta_1 p_m F_1}{\alpha_1 m} \right) \frac{C_2}{h_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим условие статического равновесия упруго-вязкой модели, изображенной на рис. 2.

$$h_2 x_2 + (x_2 - x) C_2 = 0. \quad (12)$$

Освободившись от скрытой координаты, получим

$$\ddot{V} + \left(\frac{h_1}{m} + \frac{C_2}{h_2} \right) \dot{V} + \frac{C_2}{m} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) V = \frac{C_2}{mh_2} (N_{01} - N_{02} - P). \quad (13)$$

Сравнивая выражения (11) и (13) убедимся в их полной идентичности. Кроме того, устанавливается механическая аналогия для свободных членов в уравнении (11):

$-\frac{\beta_1}{\alpha_1} p_m F_1 = N_{01}$ – предварительное сжатие левой пневмопружины;

$-\frac{\beta_2}{\alpha_2} p_m F_2 = N_{02}$ – предварительное сжатие правой пневмопружины.

Решение однородного линейного уравнения второго порядка ищется в форме:

$$\bar{V} = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}. \quad (14)$$

Корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 находят как решения квадратного уравнения. В случае комплексных корней ($D < 0$) общее решение однородного дифференциального уравнения находится в виде:

$$V = e^{-\sigma} (C'_1 \cos \phi t + C'_2 \sin \phi t)$$

Частное решение

$$V^* = R/\omega_0^2,$$

$$\text{где } V^* = V_y; R = \frac{C}{h_2 m} (\beta_2/\alpha_2 p_m F_2 - \beta_1/\alpha_1 p_m F_1 - P);$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_2}{m} \left(\frac{h_1}{h_2} + 1 \right)} - \text{собственная частота колебаний}$$

ПА.

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$V = e^{-\sigma} (C'_1 \cos \phi t + C'_2 \sin \phi t) + \frac{R}{\omega_0^2}. \quad (15)$$

Значения C'_1 и C'_2 определяются из начальных условий

$$C'_1 = V_0 - R/\omega_0^2; C'_2 = W_0 + \sigma V_0 - \sigma R/\omega_0^2,$$

В случае разгона рабочего органа ПА начальные параметры $V_0 = W_0 = 0$. При рассмотрении задачи торможения $V_0 \neq 0$ и $W_0 \neq 0$.

Ограничимся рассмотрением задачи движения рабочего органа без торможения в конце хода ($V_0 = 0, W_0 = 0$). Тогда общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} V = \frac{R}{\omega_0^2} [1 - e^{-\sigma t} (\cos \phi t + \sigma \sin \phi t)] = \\ = \frac{R}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\sigma t} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\phi^2}} \cos \left(\phi t + \arctg \left(-\frac{\sigma}{\phi} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{h_1}{m} + \frac{C_2}{h_2} \right) - \text{показатель затухания процесса;}$$

$$\phi = \sqrt{\frac{C_2}{m} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} \right) - \left(\frac{h_1 h_2 + C_2 m}{2 m h_2} \right)^2} - \text{циклическая частота.}$$

В случае действительных некрратных корней общим решением дифференциального уравнения ПА будет:

$$V = \frac{R}{\omega_0^2} \left[1 - e^{-\sigma t} \left(\text{ch} \phi t + \frac{\sigma}{\phi} \text{sh} \phi t \right) \right]. \tag{17}$$

Выражение для координаты поршня находим в результате интегрирования.

Для случая комплексных корней:

$$x = \int V dt = x_0 + \frac{R}{\omega_0^2} \left\{ \frac{\sigma e^{-\sigma t}}{\sigma^2 - \phi^2} \left[\left(\frac{\sigma}{\phi} + 1 \right) \sin \phi t + \left(1 - \frac{\phi}{\sigma} \right) \cos \phi t \right] + t - \frac{\sigma(1 - \phi/\sigma)}{\sigma^2 + \phi^2} \right\} \tag{18}$$

В случае действительных корней:

$$x = x_0 + \frac{R}{\omega_0^2} \left\{ \frac{\sigma e^{-\sigma t}}{\sigma^2 + \phi^2} \left[\left(\frac{\sigma + \phi^2}{\phi} \right) \text{sh} \phi t + 2\phi \text{ch} t \right] + t - \frac{(\sigma - \phi)}{\sigma^2 + \phi^2} \right\} \tag{19}$$

Полученные на основании рассмотрения упруго-вязкой механической модели решения хорошо сходятся с нелинейными решениями, полученными на основании численного интегрирования выходной системы, и имеют более компактную форму, чем выражения, полученные в работе [2].

Режим торможения описывается той же системой уравнений (10), но при ненулевых начальных условиях: при $t=0$; $V=V_0$; $W=0$.

Движение в момент начала торможения установившееся со скоростью V_0 . При этих условиях:

$$C_1' = V_0 - \frac{R}{\omega_0^2} = V_0; \quad C_2' = \frac{\sigma}{\phi} \left(V_0 - \frac{R}{\omega_0^2} \right). \tag{20}$$

При таких постоянных скорость при торможении РО определяется по выражению:

$$V_T = \frac{R}{\omega_0^2} + \left(V_0 - \frac{R}{\omega_0^2} \right) \cdot e^{-\Gamma} \cdot \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\phi^2}} \cdot \cos \left[\phi t + \arctg \left(-\frac{\sigma}{\phi} \right) \right] \tag{21}$$

Координата поршня в режиме торможения (x_T):

$$x_T = \int V dt = x_0 + \frac{R}{\omega_0^2} \left\{ -\frac{\sigma}{(\sigma^2 + \phi^2)} \left[\left(\frac{\sigma}{\phi} + 1 \right) \sin \phi t + \left(1 - \frac{\phi}{\sigma} \right) \cos \phi t \right] + t - \frac{\sigma(1 - \phi/\sigma)}{\sigma^2 + \phi^2} \right\} \tag{22}$$

На рис. 3 представлены переходные процессы для пневмоагрегата, полученные в результате численного интегрирования системы нелинейных уравнений (сплошная линия) и с использованием линейных решений 17, 18, 21 и 22 при следующих исходных данных: $D_n = 50$ мм, $d_{гв} = 16$ мм, $L = 500$ мм, $f_1^* = 0,5 \cdot 10^{-4}$ м², $P = 100$ Н, $m = 50$ кг, тормозной путь $x_B = 200$ мм.

Для нелинейных решений кроме скорости и перемещения получены также и внутренние переходные процессы $[p_1(t), p_2(t)]$.

Хорошее совпадение таких параметров процесса, как время срабатывания (для линейной модели $t_{cp} = 3,43$ с), декремент затухания, частота и амплитуда колебаний (ω_0 и A) свидетельствуют о достаточно высокой расчётной точности предложенной методики. На практике чаще всего интерес представляет не сама форма переходного процесса, а время срабатывания t_{cp} , декремент затухания σ , собственная и циклическая частота ω_0 и ϕ . Например, при расчёте режима торможения необходим выбор параметров ПА, обеспечивающий максимум декремента затухания процесса.

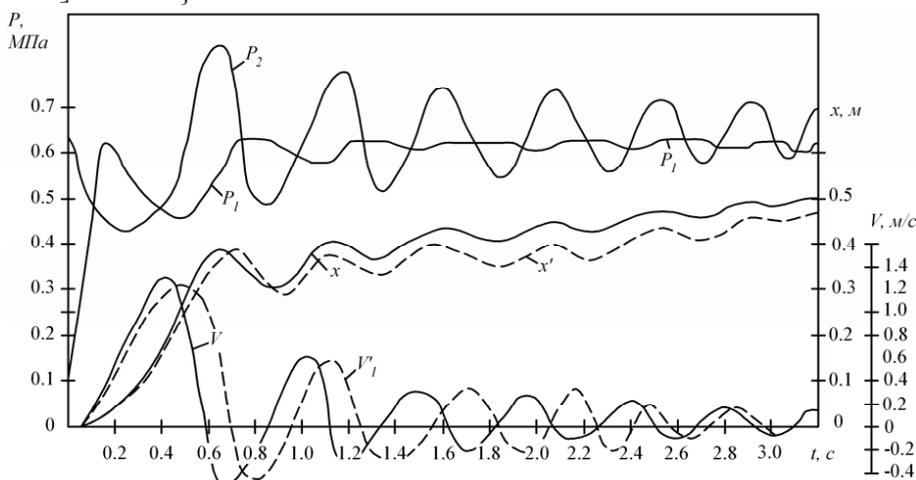


Рис. 3. Переходные процессы при разгоне и торможении рабочего органа пневмоагрегата полученные по нелинейной (сплошная линия) и линейной моделям

Выводы

Представленная упруго-вязкостная модель дискретного пневмоагрегата при условии использования наиболее рациональной формы линеаризации позволяет иметь достаточно точные для инженерной практики аналитические выражения для скорости и перемещения рабочего органа ПА. Это позволяет более оперативно подбирать параметры ПА в целях обеспечения неколебательного характера разгона и торможения рабочего органа.

Литература

1. Крутиков Г.А. О стабилизации давления в быстродействующих пневмоприводах// Гидропривод и гидропневмоавтоматика. – Киев: Техніка, 1981, Вып. 17. – С. 108-113.
2. Крутиков Г.А., Пекарь Л.А. О разработке линейной модели дискретного пневмопривода// В кн. Пневматика и гидравлика. Приводы и системы управления. – М., Машиностроение, 1990. – Вып. 15. – С. 120-128.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний// Учебное пособие для ВТУЗов. – М., Наука, 1986, 270 с.