

*Пропонується підхід до вирішення три-вимірної нестационарної задачі теплопровідності в варіаційній постановці, заснований на методі розподілу змінних і подання координатних функцій у вигляді відрізків рядів по ultrasferичним многочленам*

*Ключові слова: базисні функції, ultrasferичні многочлени, задача теплопровідності, граничні умови, система лінійних алгебраїчних рівнянь*

---

*Предлагается подход к решению трехмерной нестационарной задачи теплопроводности в вариационной постановке, основанный на методе разделения переменных и представлении координатных функций в виде отрезков рядов по ultrasferическим многочленам*

*Ключевые слова: базисные функции, ultrasferические многочлены, задача теплопроводности, граничные условия, система линейных алгебраических уравнений*

---

*An approach to solving three-dimensional unsteady heat conduction problem in the variational formulation, based on the method of separation of variables and the representation of the coordinate functions in the form of segments of the series in ultraspherical polynomials*

*Key words: basis functions, ultraspherical polynomials, the problem of heat conduction, boundary conditions, the system of linear algebraic equations*

# РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ

**В. И. Заяц**  
Кандидат технических наук, доцент  
Контактный тел: (06 12) 223-83-13

**О. С. Новикова**  
Ассистент\*  
\*Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем  
Запорожская государственная инженерная академия  
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина, 69006  
Контактный тел.: (06 12) 223-83-13, (06 12) 213-22-68  
E-mail: NovikovaOISer@yandex.ru

## 1. Введение

В настоящее время существует большое количество методов решения задачи теплопроводности, как специально разработанных для этого класса задач [1] так и универсальных (метод конечных элементов).

Однако в приложениях возникают ситуации, когда форма решения должна удовлетворять некоторым специальным условиям. При решении задач термупругости основных на применении термупругого потенциала перемещений  $\Phi$ , требуется, чтобы потенциал и функция температуры  $\Theta$  были связаны соотношением [2]:

$$\nabla^2 \Phi = \text{Const} \cdot \Theta. \tag{1}$$

Тогда представление соответствующих решений в виде:

$$\Phi = \sum_{n=0}^N b_n \varphi_n, \quad \Theta = \sum_{n=0}^N a_n \Theta_n \tag{2}$$

позволяет определить потенциал  $\Phi$  непосредственно путем сравнения коэффициентов в (2).

## 2. Решение задачи теплопроводности

Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности, которая состоит в определении температуры  $\Theta(x, y, z, \tau)$  в некоторой области  $\Omega$  для произвольного момента времени  $\tau > \tau_0$ . В вариационной постановке задача сводится к поиску функции, которая доставляет минимум функционалу [1]

$$J = \int_{\Omega} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \Theta)^2 d\Omega - \int_{\Gamma_2} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial n} d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_3} \Theta^2 d\Gamma \tag{3}$$

при этом предполагается, что граничные условия для температуры выполнены.

Функция  $\Theta$  удовлетворяет краевым условиям:

на части границы тела  $\Gamma_1 \quad \Theta|_{\Gamma} = F, \tag{4}$

на части границы тела  $\Gamma_2 \quad -\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial n}|_{\Gamma} = q \tag{5}$

на части границы тела  $\Gamma_3 \quad -\frac{\partial \Theta}{\partial n}|_{\Gamma} = \alpha \Theta \tag{6}$

и начальному условию  $\Theta(x, y, z, \tau_0) = \Theta_0 \tag{7}$

Функционал (3), граничные условия (4)-(6) и начальное условие (7) записаны в безразмерной форме [1]

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{z} = \frac{z}{L}, \bar{\Theta} = (\Theta - \Theta_*) / \Theta_*, \bar{q} = \frac{qL}{\lambda \Theta_*},$$

$$\tau = t \frac{1}{L^2} \frac{\lambda}{c\rho} = Fo \text{ - число Фурье,}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha L}{\lambda} = Bi \text{ - число Био.}$$

Здесь  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность вещества тела,  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи,  $L$  – характерный размер тела,  $\bar{n}$  – направление внутренней нормали к границе,  $\Theta_*$  – температура окружающей среды,  $F, q, \Theta_0$  – заданные функции.

В работе [3] предложен метод решения нестационарных задач математической физики в вариационной постановке, основанный на разделении переменных. Искомое решение представляется отрезками рядов по известным базисным функциям, коэффициенты при которых являются неизвестными функциями времени. В каждый момент времени эти коэффициенты считаются варьируемыми параметрами. Из необходимого условия экстремума получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени. В [4] этот метод применен для решения задач, обладающих осевой симметрией, при этом базисные функции непосредственно подбирались из условия удовлетворения граничным условиям. В данной работе, исходя из общих свойств ультрасферических многочленов, строятся последовательности базисных функций, связанных соотношением (1), которые позволяют удовлетворить граничным условиям задачи теплопроводности в общем случае.

Решение ищется в виде

$$\Theta = \sum_{k=0}^K a_k(\tau) \Theta_k, \tag{8}$$

где  $\Theta_k$  – выбранные определенным образом базисные функции. После приближенной замены производной по времени при помощи правой разности

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\Delta \tau} \left[ \sum_{n=0}^K a_k(\tau_i) \Theta_k - \sum_{n=0}^K a_k(\tau_{i-1}) \Theta_k \right] \tag{9}$$

задача сводится к определению функций  $a_k(\tau_i)$  для фиксированного значения времени  $\tau_i$ . Здесь  $\Delta \tau$  – шаг по времени,  $\tau_i = \tau_{i-1} + \Delta \tau$ ,  $i$  – номер временного слоя.

Значение коэффициентов  $a_k(\tau_i)$ , предполагаются известными из решения задачи для момента времени  $\tau_{i-1}$ .

### 3. Представление базисных функций

Функция  $F_n = \rho^\gamma f_n(t_q)$   $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$   $t_q = \frac{q}{r}$ ,  $q = x, y, z$ , будет решением уравнения Лапласа

$$\nabla^2 F_n = \rho^{\gamma-2} \left[ (1-t^2) f_n'' - 2t f_n' + \gamma(\gamma+1) f_n \right] = 0$$

если выражение в квадратных скобках обращается в ноль

$$(1-t^2) f_n'' - 2t f_n' + \gamma(\gamma+1) f_n = 0 \tag{10}$$

При  $\gamma = n$  последнее соотношение представляет собой дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра  $P_n(t)$ . Эти полиномы являются частным случаем для ультрасферических многочленов  $P_n^{(\lambda)}$  при  $\lambda = \frac{1}{2}$  [5]

Ультрасферические многочлены  $P_n^{(\lambda)}(t)$  [5] удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-t^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\lambda)}(t) - (2\lambda+1) t \frac{d}{dx} P_n^{(\lambda)}(t) + n(n+2\lambda) P_n^{(\lambda)}(t) = 0 \tag{11}$$

и для них имеет место рекуррентная формула

$$nP_n^{(\lambda)}(t) = 2(n+\lambda-1) t P_{n-1}^{(\lambda)}(t) + n(n+2\lambda) P_{n-1}^{(\lambda)}(t) \tag{12}$$

$$P_0^{(\lambda)}(t) = 1, P_1^{(\lambda)}(t) = 2\lambda t,$$

Справедливы следующие соотношения между смежными полиномами и их производными

$$(1-t^2) \frac{d}{dt} P_n^{(\lambda)}(t) = -n t P_n^{(\lambda)}(t) + (n+2\lambda-1) P_{n-1}^{(\lambda)}(t) = \tag{13}$$

$$= (n+2\lambda) t P_n^{(\lambda)}(t) - (n+1) P_{n+1}^{(\lambda)}(t) = \tag{14}$$

$$= 2\lambda(1-t^2) P_{n-1}^{(\lambda+1)}(t) \tag{15}$$

$$(n+\lambda) P_n^{(\lambda)}(t) = \lambda \left[ P_{n+1}^{(\lambda+1)}(t) - P_{n-1}^{(\lambda+1)}(t) \right] \tag{16}$$

Введем функцию

$$\Phi_{n\lambda} = \rho^n (1-t^2)^\alpha P_{n-2\alpha}^{(\lambda)}, n = 0, 1, \dots \tag{17}$$

где  $2\alpha = 2\lambda - 1$ ,  $m = n - 2\alpha$  и применим к ней оператор Лапласа. После цепочки преобразований с учетом последовательного применения соотношений (10), (11), (13), (12), (16) получаем

$$\nabla^2 \Phi_n = n(n-1) \frac{2\lambda-1}{2(\lambda-1)} \rho^{n-2} (1-t^2)^{\alpha-1} P_m^{(\lambda-1)} \tag{18}$$

Следует отметить, что если функцию (17) представить в виде

$$\Phi_{n\lambda} = \frac{1}{n!} \rho^n (1-t^2)^{2\alpha} P_{n-2\alpha}^{(\lambda)} \tag{19}$$

то согласно (13), будут выполняться рекуррентные соотношения для производной

$$\frac{\partial \Phi_{n\lambda}}{\partial q} = \Phi_{n-1\lambda}, q = x, y, z \quad t = \frac{q}{r} \tag{20}$$

а формула (18) примет вид

$$\nabla^2 \Phi_{n\lambda} = \frac{2\lambda-1}{2(\lambda-1)} \Phi_{n-2\lambda-1} \tag{21}$$

Таким образом получено, что функции, определенные соотношением (19), удовлетворяют уравнению (1).

Как отмечено выше, для значения  $\lambda = \frac{1}{2}$  ( $\alpha = 0$ ) ультрасферические полиномы являются полиномами Лежандра  $P_n(t)$ , и гармоническая функция (19) будет иметь вид

$$\eta_n = \frac{1}{n!} \rho^n P_n(t) \quad (22)$$

Примем обозначения  $V_n(t) = P_n^{(3)}(t)$ ,  $G_n(t) = P_n^{(5)}(t)$  и определим для этих полиномов согласно (19) функции

$$\Psi_n = \frac{1}{n!} \rho^n (1-t^2) V_{n-2}(t) \quad (23)$$

$$\Phi_n = \frac{1}{n!} \rho^n (1-t^2)^2 G_{n-4}(t), \quad (24)$$

Как следует из соотношения (21), эти функции удовлетворяют условиям

$$\nabla^2 \Psi_n = 2\eta_{n-2} \quad \nabla^2 \Phi_n = \frac{4}{3} \Psi_{n-2} \quad (25)$$

Найдем выражения для производных для случая  $t = t_z = \frac{z}{r}$ . Из соотношения непосредственно получаем

$$\frac{\partial \eta_n(t_z)}{\partial z} = \eta_{n-1}(t_z) \quad \frac{\partial \Psi_n(t_z)}{\partial z} = \Psi_{n-1}(t_z) \quad \frac{\partial \Phi_n(t_z)}{\partial z} = \Phi_{n-1}(t_z)$$

Используя для вычисления производных по координате  $x$  свойства (13), (16) а также рекуррентные формулы (12), находим

$$\frac{\partial \eta_n(t_z)}{\partial x} = -x\omega_n(t_z), \quad \frac{\partial \Psi_n(t_z)}{\partial x} = x\eta_{n-2}(t_z), \quad \frac{\partial \Phi_n(t_z)}{\partial x} = y\Psi_{n-2}(t_z)$$

где  $\omega_n(t_z) = \frac{1}{(n+2)!} \rho^n V_n(t_z)$  – вспомогательная функция.

Соответствующие формулы для случаев  $t_x = \frac{x}{\rho}$  и  $t_y = \frac{y}{\rho}$  получаются путем циклической перестановки индексов.

Решение задачи теплопроводности ищется в виде (8). При этом базис состоит из функций  $\Psi_n(t)$   $n=2,3,\dots,N$  для всех аргументов  $t=t_x, t_y, t_z$ , а также функций  $\eta_n(t)$   $n=1,3,5,6,\dots,N$  и  $\Theta_0 = 1 = \eta_0$ . При  $n=2$  и  $n=4$  функции  $\eta_n(t)$  являются линейной комбинацией  $\Psi_n(t)$ . Общее число слагаемых в (8) составляет  $K = 6(N-1) - 2$ .

Условие минимума функционала (3)  $\frac{\partial J}{\partial a_m} = 0$  позволяет составить систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_m(\tau)$ .

При дифференцировании первого слагаемого в (3) по  $a_m$ , считается, что производная  $\frac{\partial a_k}{\partial \tau}$  варьированию не подлежит. В результирующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_k A_{mk} a_k = B_m \quad (25)$$

коэффициенты матрицы и вектор правых частей вычисляются соответственно как

$$A_{mk} = \tilde{A}_{mk} + \Delta\tau \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Theta_m}{\partial x} \frac{\partial \Theta_k}{\partial x} + \frac{\partial \Theta_m}{\partial y} \frac{\partial \Theta_k}{\partial y} + \frac{\partial \Theta_m}{\partial z} \frac{\partial \Theta_k}{\partial z} \right) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_3} \Theta_m \Theta_k d\Gamma \right\},$$

$$\tilde{A}_{mk} = \int_{\Omega} \Theta_m \Theta_k d\Omega, \quad B_m = \Delta\tau \int_{\Omega} q \Theta_m d\Omega + \sum_k a_k(\tau) \tilde{A}_{mk}$$

#### 4. Анализ результатов

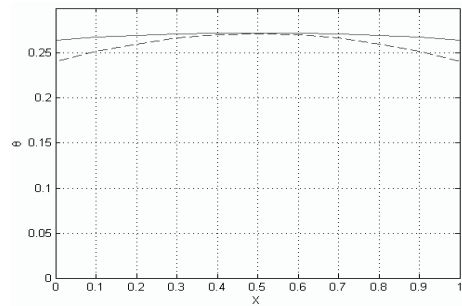
В качестве тестовой задачи рассмотрим охлаждение единичного куба  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ , температура которого в начальный момент времени была постоянной по всему объему ( $\Theta = 1$ ), а в дальнейшем происходит теплоотдача с одинаковым коэффициентом  $\alpha$  по всем граням. Точное решение этой задачи имеет вид [6]

$$\Theta(x, y, z, \tau) = F_x(x, \tau) F_y(y, \tau) F_z(z, \tau) \quad (26)$$

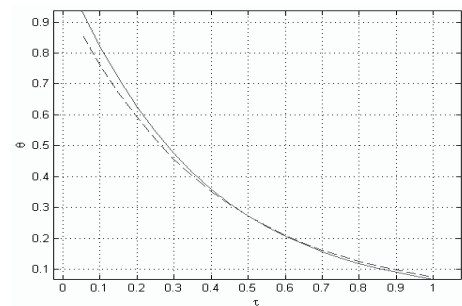
Здесь  $F_x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_m}{\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m} \cos(\mu_m x) \exp(-\mu_m^2 \tau)$ , функции  $F_y, F_z$  – определяются аналогично, а  $\mu_m$  – корни уравнения  $\text{ctgu} = \mu / \text{Bi}$ .

На рис. 1а приведены распределения температуры в сечении  $0 \leq x \leq 1, y = 0,5; z = 1$ , полученные по (26) и предлагаемого решения (8) для момента времени  $\tau = 0.5$  и значении шага  $\Delta\tau = 0,05$ .

Отличие результатов не превосходит 5% и обусловлено применением конечно-разностного приближения при вычислении производных по времени. С течением времени различия между решениями не увеличивается, что видно из рис. 1б, на котором приведено изменение температуры во времени в точке  $x = 1, y = z = 0,5$ .



а)



б)

Рис. 1

Описанный метод был применен для решения нескольких задач. В первой задаче был рассмотрен единичный куб  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ , на гранях  $x=0,1$  которого задан тепловой поток  $q=1$ . На остальных четырех гранях происходит свободная теплоотдача с коэффициентом  $\alpha$ . Начальное условие имеет вид  $\Theta(x,y,z,0)=0$ . На рис. 2а, 2б, 2в приведено распределение температуры на грани  $z=1$  в сечении  $y=\frac{1}{2}$  для различных моментов времени при значениях  $\alpha=0,1;0,5;0,9$ . Как следует из рис. 2б, при  $\alpha=0,5$  в теле достигается состояние теплового равновесия.

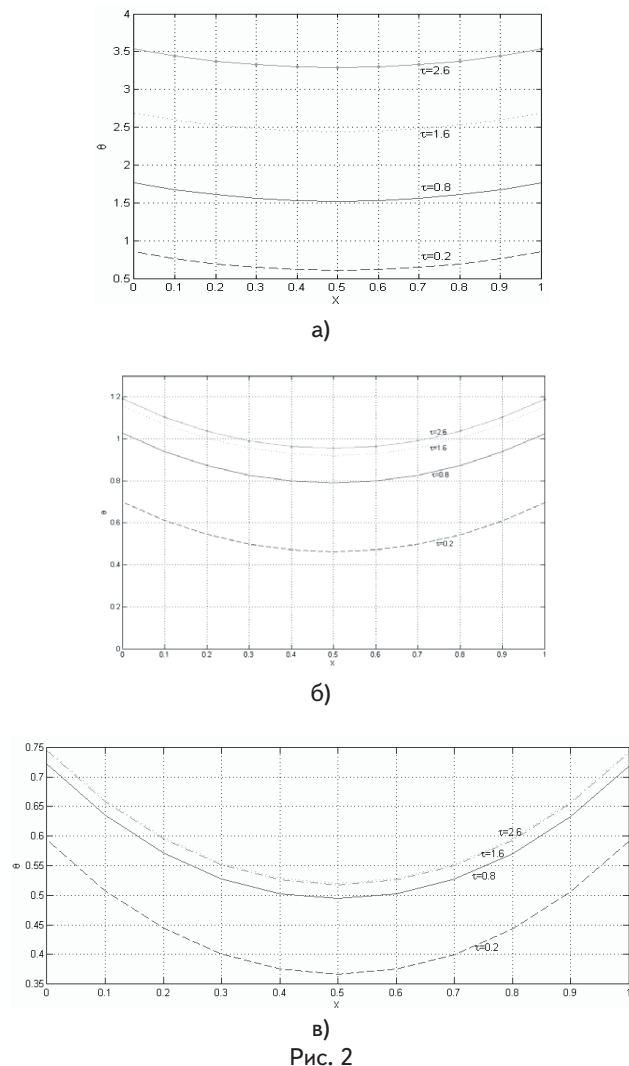


Рис. 2

Если на части поверхности тела  $\Gamma_T$  заданы краевые условия в форме (4), т.е.  $\Theta(\bar{r}, \tau)=F(\bar{r}, \tau)$ , то выполнение этих условий может быть удовлетворено в смысле наименьших квадратов. В этом случае элементы матрицы и вектора правых частей результирующей СЛАУ получаются суммированием взятых с некоторыми весовыми коэффициентами соответствующих величин в (25) и определенных, согласно методу наименьших квадратов элементов матрицы и вектора правых частей

$$A_{mk}^T = \int_S \Theta_m \Theta_k dS, \quad B_m^T = \int_S \Theta_m F dS$$

Определения весовых коэффициентов может быть построено как в виде итерационного процесса, так и выбрано априори. Как правило, принимаются весовые коэффициенты равные единице.

Такой вид граничных условий был рассмотрен во второй задаче, в которой определялось температурное поле единичного куба с начальным условием  $\Theta(0,x,y,z)=1+x^2+y^2+z^2$ . На плоскостях  $x=0, y=0, z=0$  была заданы условия теплоизоляции  $q=0$ , а на плоскостях  $x=1, y=1, z=1$  фиксировалась температура начального условия. Характер изменения температуры для различных моментов времени в том же сечении, что и в первой задаче приведен на рис. 3.

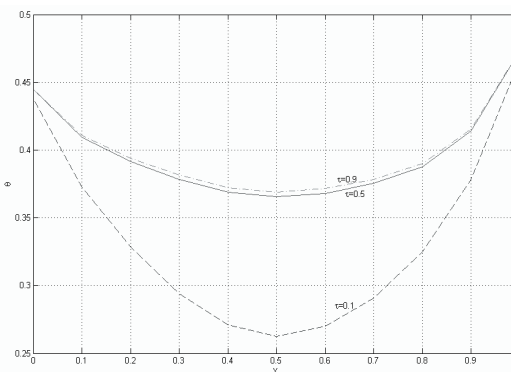


Рис. 3

Если задача обладает осевой симметрией, то выражения для базисных функций получают непосредственно из (22),(23). Для случая когда осью симметрии является ось z необходимо положить  $t=t_z$ , а формулы для производных примут вид:

$$\frac{\partial \eta_n}{\partial r} = -\frac{\psi_n}{r}, \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial r} = r \eta_{n-2}$$

В третьей задаче был рассмотрен круговой цилиндр  $R=1, -1 \leq z \leq 1$  с начальной температурой  $\Theta(r,z,0)=0$ . На верхней грани и боковой поверхности происходит теплообмен с коэффициентами  $\alpha=0$  (теплоизоляция) и  $\alpha=0,5$  соответственно. Температура всех точек плоскости нижней грани одинакова, но изменяется во времени по формуле  $\Theta(r,-1)=\tau$ . Характер изменения температуры боковой поверхности в этой задаче для моментов времени  $\tau=0,5$  и  $\tau=1,5$  приведены на рис. 4

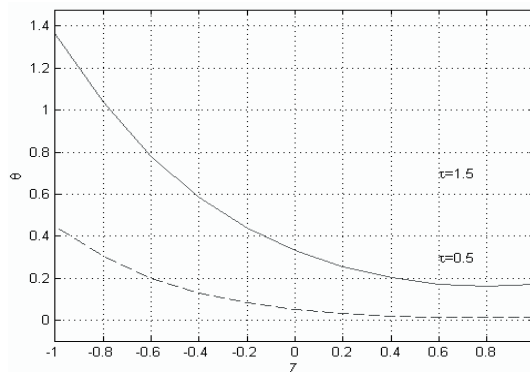


Рис. 4

При розв'язанні всіх задач довжина базису становила  $N=18$ , що відповідає СЛАУ з 40 невідомими в задачах для куба і 16 для циліндра. Значення кроку по часу було прийнято  $\Delta t = 0,05$ .

### 5. Висновки

Таким чином, отримано, що запропонована форма базисних функцій дозволяє з достатньою ступенем точності отримати розв'язок задачі теплопровідності для різних випадків граничних умов.

### Література

1. Беляев, Н.М. Методи теорії теплопровідності. Ч. 1. / Н.М. Беляев, А.А. Рядно — М.: Вища школа, 1982. — 327с.

2. Коваленко, А. Д. Термоупругість / А. Д. Коваленко. — К.: Видавничий об'єднання «Вища школа», 1975. — 216 с.
3. Колмогоров, В.Л. Метод розрахунку напружено-деформованого стану в загальній крайовій задачі розвинутого течія. / В.Л. Колмогоров. — Вестник ПГТУ. Механіка. — 1995. — №2. — С.87-98.
4. Колмогоров, В.Л. Розв'язок нестационарних температурних і термомеханічних задач методом розділення змінних в варіаційній постановці / В.Л. Колмогоров, В.П. Федотов, Л.Ф. Співак [і др.]. — Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Фіз.-мат. Науки — 2006. — №42 — С. 72-75.
5. Сега Г. Ортогональні многочлени. / Г Сега. — Гос. видавництво фіз.-мат. лит., 1962. — 500 с.
6. Исаченко, В.П. Теплопередача. / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, Сукомел А.С. — М.: Энергия, 1975. — 488с.

*У даній статті проаналізовано методи оцінки якісних характеристик бетонних конструкцій і елементів, зокрема визначено ступінь тепловологісного впливу на залізобетонні конструкції при пожежі. Показано, що в процесі нагріву теплопровідність та теплоємність бетону суттєво змінюються*

*Ключові слова: якісні характеристики, залізобетонні конструкції, тепловологісний вплив, бетон*

*В даній статті проаналізовані методи оцінки якісних характеристик бетонних конструкцій і елементів, в частині встановлена ступінь тепловологісного впливу на залізобетонні конструкції при пожежі. Показано, що в процесі нагріву теплопровідність і теплоємність бетону суттєво змінюються*

*Ключевые слова: качественные характеристики, железобетонные конструкции, тепловологісное влияние, бетон*

*In this article the methods of assessing the qualitative characteristics of concrete structures and elements, in particular the degree of thermal effect on reinforced concrete structures in fire. Shown that in the process of heating the thermal conductivity and specific heat of concrete varies significantly*

*Keywords: qualitative characteristics, concrete structures, heat and humidity effect, concrete*

### 1. Вступ

Сьогодні будівельна галузь України постійно стикається з проблемами тріщиностійкості, водонепро-

ності та довговічності бетону та бетонних конструкцій. Ці проблеми виникають як на етапі проектування, коли закладаються норми до будівельних конструкцій і елементів так і на етапі експлуатації будівель-

УДК 536.006

# ОЦІНКА ЯКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК БЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ І ЕЛЕМЕНТІВ

**Г.І. Хімічева**

Доктор технічних наук, професор\*

**О.Р. Новошицька\***

Контактний тел.: 096-767-93-92

E-mail: star\_la@bigmir.net

**Н.В. Колесіна\***

\*Кафедра метрології стандартизації та сертифікації Київський національний університет технологій та дизайну

вул. Немировича-Данченка, 2, м. Київ, Україна, 01011