Робота присвячена розробці математичної моделі кровоносної судини з появою негерметичності у її стінці з використанням матричного методу розрахунку чотириполюсників і базується на електричній аналогії руху крові по судинах і руху струму на ділянці електричного кола. Розроблена математична модель дозволяє визначити місце розташування негерметичності по довжині кровоносної судини та її умовний діаметр

Ключові слова: кровоносна судина, негерметичність, пульсова хвиля, кров'яний тиск, довга лінія, чотириполюсник

Работа посвящена разработке математической модели кровеносного сосуда при появлении негерметичности в его стенке с использованием матричного метода расчета четырехполюсников и базируется на электрической аналогии движения крови по сосудам и движения тока на участке цепи. Разработанная математическая модель позволяет определить место расположения негерметичности по длине кровеносного сосуда и ее условный диаметр

Ключевые слова: кровеносный сосуд, негерметичность, пульсовая волна, кровяное давление, длинная линия, четырехполюсник

УДК 532.616.1:002.5

МАТЕМАТИЧЕКАЯ МОДЕЛЬ КРОВЕНОСНОГО СОСУДА ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ НЕГЕРМЕТИЧНОСТИ В ЕГО СТЕНКЕ

С. И. Владов
Аспирант*
E-mail: ser26101968@gmail.com
О. Г. Аврунин
Доктор технических наук, доцент
Кафедра биомедицинской инженерии
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61166
E-mail: gavrun@list.ru
В. А. Мосьпан
Кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой*
E-mail: kafea@kdu.edu.ua
А. А. Юрко
Кандидат технических наук, доцент*
E-mail: kafea@kdu.edu.ua
*Кафедра электронных аппаратов
Кременчугский национальный университет
им. Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, Украина, 39614

1. Введение

Как известно, наряду с клиническими методами диагностики движения крови по сосудам, важную роль играет математическое моделирование гемодинамических процессов, выявлять закономерности функционирования системы кровообращения человека, прогнозировать последствия хирургических вмешательств и различных заболеваний и патологий, связанных с движением крови по сосудам.

Одной из распространённых патологий кровеносных сосудов является наличие негерметичности их стенок, что приводит к возникновению кровотечения. Поэтому актуальной, с клинической точки зрения, задачей является построение математической модели движения крови по сосудам с учетом возникновения негерметичности в их стенке, что позволит определить место расположения негерметичности стенок сосудов и провести как клиническое, так и оперативное вмешательство по устранению данной патологии у конкретного человека.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Поставленная в работе проблема является актуальной, о чем свидетельствует постоянный рост публикаций по этой тематике [1, 2]. В результате исследований [3] было установлено, что появление негерметичности в стенке сосуда («свища») приводит к изменению как частотного состава спектра сигнала пульсовой волны, так и непосредственно ее формы. Моделируя его волноводной системой, учитывая эластичные свойства стенки сосуда [4], поставим задачу определения линейной координаты «свища» на стенке сосуда и его условного диаметра.

Решение данной задачи ведется с использованием метода электродинамических аналогий, а, именно, с применением модели системы кровообращения в виде согласованной длинной линии [5], что позволяет смоделировать кровеносный сосуд эквивалентной электрической цепью с применением теории линий с распределенными параметрами и теории четырехполюсников. При этом считается, что эквивалентная линия питается от источника ЭДС, сигнал которого формируется по закону квадрата синуса $\sin^2(\omega_1 \cdot t)$ с заданной частотой первой гармоники $\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_{ЧСС}$ – частотой сердечных сокращений, что является аналогом модели сигнала пульсовой волны во время выброса крови из левого желудочка сердца в период систолы [6].

Данное условие представляется вполне обоснованным, поскольку в установившемся режиме движения крови в системе кровеносных сосудов соответствующий ему спектр акустических шумов будет иметь некоторую преобладающую частоту. Это, в свою очередь, позволяет использовать в расчетах метод комплексных амплитуд [7].

3. Цель и задачи исследования

Целью работы является разработка математической модели кровеносного сосуда, позволяющей определить как место и условный диаметр отверстия, вызванное негерметичностью, так и влияние негерметичности на форму пульсовой волны и на значение кровяного давления.

Для достижения поставленной цели ставим задачи:

– разработать математическую модель, которая позволит определить вид сигнала пульсовой волны в кровеносных сосудах при нормальном кровотоке и с наличием патологий, связанных с негерметичностью в их стенках, что позволит провести сравнение полученных результатов и определить влияние негерметичности в стенке сосуда на форму и амплитуду пульсовой волны;

– подтвердить адекватность разработанной модели по критерию Стьюдента, что даст возможность определить различия между средними значениями экспериментальной группы 1 (сигнала пульсовой волны при нормальном кровотоке) и экспериментальной группы 2 (сигнала пульсовой волны с наличием патологии);

– подтвердить существенность на данном уровне значимости, что будет означать существенные изменения движения крови в сосуде с отверстием в стенки сосуда, что приводит к кровотечению.

4. Материал и результаты исследований процесса прохождения пульсовой волны через участок кровеносного сосуда при возникновении негерметичности в его стенке

Основываясь на положениях теории четырехполюсников, модель кровеносного сосуда представляется эквивалентной электрической П-образной схемой замещения (рис. 1).

Представленный четырехполюсник является обратимым и симметричным.

Известно, что в режиме четырехполюсника матрица передачи отрезка линии имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}\underline{A}_{11} & \underline{A}_{12}\\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}(\underline{\gamma}\cdot l) & \underline{Z}_C\cdot \mathrm{sh}(\underline{\gamma}\cdot l)\\ \dfrac{\mathrm{sh}(\underline{\gamma}\cdot l)}{\underline{Z}_C} & \mathrm{ch}(\underline{\gamma}\cdot l)\end{pmatrix}. \quad (1)$$

Перейдем к анализу параметров матрицы (1) с учетом возникшей негерметичности стенки кровеносного сосуда.

На рис. 1 обозначено: $Z_П$, $Y_П$ – эквивалентные упругоинерционно-диссипативные параметры среды, заполняющей сосуд; U_1, U_2, I_1, I_2 – комплексные входные и выходные напряжения и токи как аналоги давлений крови и скоростей кровотока в сосуде

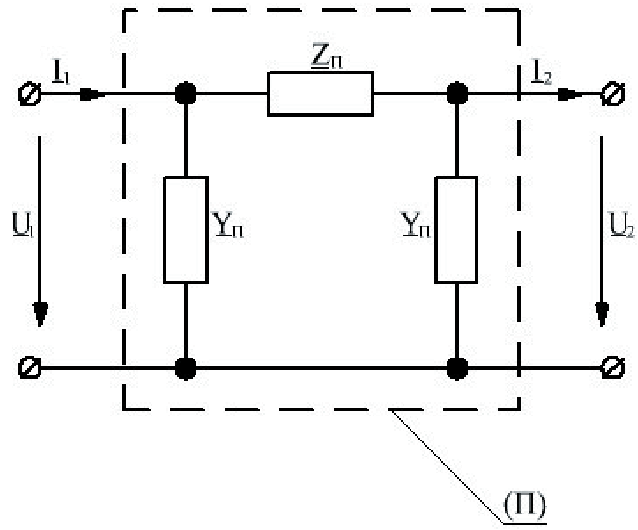

Рис. 1. Схема пассивного (П) П-образного четырехполюсника как электрического аналога модели кровеносного сосуда

Эквивалентные параметры $Z_П$, $Y_П$ для П-образной схемы замещения четырехполюсника определяются по формулам:

$$\underline{Z}_П(j\omega)=\underline{Z}_C(j\omega)\cdot \mathrm{sh}\left(\underline{\gamma}\cdot l\right)= =\sqrt{\frac{R_0+j\omega L_0}{j\omega C_0}}\cdot \mathrm{sh}\left(\sqrt{(R_0+j\omega L_0)\cdot j\omega C_0}\cdot l\right); \quad (2)$$

$$\underline{Y}_П(j\omega)=\frac{\mathrm{ch}\left(\underline{\gamma}\cdot l\right)-1}{\underline{Z}_C(j\omega)\cdot \mathrm{sh}\left(\underline{\gamma}\cdot l\right)}= =\frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{(R_0+j\omega L_0)\cdot j\omega C_0}\cdot l\right)-1}{\sqrt{\dfrac{R_0+j\omega L_0}{j\omega C_0}}\cdot \mathrm{sh}\left(\sqrt{(R_0+j\omega L_0)\cdot j\omega C_0}\cdot l\right)}; \quad (3)$$

где l – длина сосуда; R_0, L_0, C_0 – эквивалентные параметры модели кровеносного сосуда в виде длинной линии, которые вычисляются по формулам [5]:

$$R_0=\frac{8\cdot\pi\cdot\eta}{S^2},\quad L_0=\frac{\rho}{S},\quad C_0=\frac{2\cdot r\cdot S}{E\cdot h}, \quad (4)$$

где η – вязкость крови, ρ – плотность крови; r – радиус поперечного сечения сосуда; $S = \pi\cdot r^2$ – площадь поперечного сечения сосуда; h – толщина стенки сосуда; E – модуль упругости стенки сосуда [8].

Матрица (1) для П-образной схемы замещения представляется в виде:

$$\left[A_П\right]=\begin{pmatrix}\underline{A}_{11}^П & \underline{A}_{12}^П\\ \underline{A}_{21}^П & \underline{A}_{22}^П\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\dfrac{\underline{Z}_П}{\underline{Y}_П} & \underline{Z}_П\\ \dfrac{1}{\underline{Y}_П}\cdot\left(2+\dfrac{\underline{Z}_П}{\underline{Y}_П}\right) & 1+\dfrac{\underline{Z}_П}{\underline{Y}_П}\end{pmatrix}; \quad (5)$$

где

$$\frac{\underline{Z}_{П}}{\underline{Y}_{П}}=\frac{\underline{Z}_{C}^{2}(j\omega)\cdot \mathrm{sh}^{2}\left(\underline{\gamma}\cdot l\right)}{\mathrm{ch}\left(\underline{\gamma}\cdot l\right)-1}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{R_0+j\omega L_0}{j\omega C_0}\right)\cdot \mathrm{sh}^{2}\left(\sqrt{(R_0+j\omega L_0)\cdot j\omega C_0}\cdot l\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{(R_0+j\omega L_0)\cdot j\omega C_0}\cdot l\right)-1}.$$

Моделируя локальную негерметичность стенки кровеносного сосуда сосредоточенной индуктивностью [9], представим ее самостоятельным пассивным четырехполюсником.

Тогда исходная электрическая схема замещения по рис. 1 видоизменится и превратится в каскадное соединение (рис. 2).

Для общего случая, когда $l_1 \neq l2$, $Z_1 \neq Z_2$ и $Y_1 \neq Y_2$. Сопоставляя схемы, представленные на рис. 1 и рис. 2, можно сделать вывод о том, что при неизменности входных параметров (U_1 и I_1) для (П) и (В) выходные напряжения и токи для обеих цепей будут различными.

При этом очевидны следующие неравенства: $\underline{U}_2^{*}<\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2^{*}<\underline{I}_2$.

$$[B_1]=\begin{pmatrix}\underline{A}_{11}^{1} & \underline{A}_{12}^{1}\\ \underline{A}_{21}^{1} & \underline{A}_{22}^{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Y}_1} & \underline{Z}_1\\ \dfrac{1}{\underline{Y}_1}\cdot\left(2+\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Y}_1}\right) & 1+\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Y}_1}\end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$[B_2]=\begin{pmatrix}\underline{A}_{11}^{2} & \underline{A}_{12}^{2}\\ \underline{A}_{21}^{2} & \underline{A}_{22}^{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Y}_2} & \underline{Z}_2\\ \dfrac{1}{\underline{Y}_2}\cdot\left(2+\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Y}_2}\right) & 1+\dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Y}_2}\end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$[B_0]=\begin{pmatrix}\underline{A}_{11}^{0} & \underline{A}_{12}^{0}\\ \underline{A}_{21}^{0} & \underline{A}_{22}^{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{\underline{Z}_0} & 1\end{pmatrix}; \quad (8)$$

где Z_1, Y_1, Z_2, Y_2 определяются по формулам (2) и (3) соответственно для соответствующей длины участка сосуда l_1 и l_2.

Осуществляя поэтапное перемножение матриц коэффициентов цепной схемы, т. е. двигаясь слева направо, будем иметь:

$$[B']=[B_0]\cdot[B_2] \text{ и}$$

$$[B]=[B_1]\cdot[B'], \quad (9)$$

что в итоге даст искомую матрицу коэффициентов [В] эквивалентного пассивного четырехполюсника (В):

$$[B]=\begin{pmatrix}\underline{B}_{11} & \underline{B}_{12}\\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22}\end{pmatrix}, \quad (10)$$

где коэффициенты матрицы [В] имеют вид:

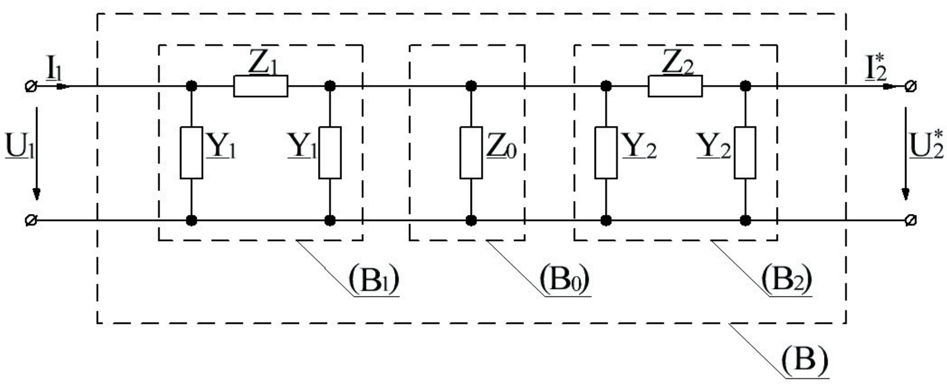

Рис. 2. Электрическая схема-аналог модели кровеносного сосуда с негерметичностью стенки

На рис. 2 обозначено: (B_1) – пассивный четырехполюсник как аналог модели участка кровеносного сосуда длины l1 (от начала сосуда до места негерметичности стенки); (B_0) – пассивный четырехполюсник, замещающий негерметичность стенки сосуда (отверстие); $Z_0 = j\cdot\omega\cdot L$ – индуктивное сопротивление, в котором индуктивность L замещает акустическую массу отверстия [9]; (B_2) – пассивный четырехполюсник как аналог модели участка кровеносного сосуда длины l_2 (от места негерметичности стенки до конца сосуда); (В) – эквивалентный пассивный четырехполюсник, замещающий модель кровеносного сосуда длины $l = l_1 + l_2$ с негерметичностью

Используя матричный метод расчета цепной схемы по рис. 2, можно определить обобщенные параметры (В), учитывающие как место расположения негерметичности по длине сосуда, так и ее условный диаметр.

Для четырехполюсников (B_1), (B_2) и (B_0) составим матрицы коэффициентов А-формы [B_1], [B_2] и [B_0] соответственно:

$$\underline{B}_{11}=\underline{A}_{11}^{1}\cdot\underline{A}_{11}^{2}+\frac{\underline{A}_{12}^{1}\cdot\underline{A}_{11}^{2}}{\underline{Z}_0}+\underline{A}_{12}^{1}\cdot\underline{A}_{21}^{2}, \quad (11)$$

$$\underline{B}_{12}=\underline{A}_{11}^{1}\cdot\underline{A}_{12}^{2}+\frac{\underline{A}_{12}^{1}\cdot\underline{A}_{12}^{2}}{\underline{Z}_0}+\underline{A}_{12}^{1}\cdot\underline{A}_{22}^{2}, \quad (12)$$

$$\underline{B}_{21}=\underline{A}_{21}^{1}\cdot\underline{A}_{11}^{2}+\frac{\underline{A}_{22}^{1}\cdot\underline{A}_{11}^{2}}{\underline{Z}_0}+\underline{A}_{22}^{1}\cdot\underline{A}_{21}^{2}, \quad (13)$$

$$\underline{B}_{22}=\underline{A}_{21}^{1}\cdot\underline{A}_{12}^{2}+\frac{\underline{A}_{22}^{1}\cdot\underline{A}_{12}^{2}}{\underline{Z}_0}+\underline{A}_{22}^{1}\cdot\underline{A}_{22}^{2}. \quad (14)$$

Для определения новых выходных параметров ($\underline{U}_2^{*}$ и $\underline{I}_2^{*}$) эквивалентного четырехполюсника (В), которые характеризуют появление негерметичности стенки сосуда, базовую систему уравнений для этих новых условий рационально записать, используя А-форму, т. е.:

$$\begin{cases}\underline{U}_1=\underline{B}_{11}\cdot\underline{U}_2^{*}+\underline{B}_{12}\cdot\underline{I}_2^{*},\\ \underline{I}_1=\underline{B}_{21}\cdot\underline{U}_2^{*}+\underline{B}_{22}\cdot\underline{I}_2^{*}.\end{cases} \quad (15)$$

По существу, система уравнений (15) является обобщенным алгоритмом расчета параметров модели кровеносного сосуда с негерметичностью. С его помощью можно определить сам факт возникновения негерметичности (Z_0), ее условный диаметр (вариации Z_0) и ее координату на участке кровеносного сосуда.

Вычислим напряжение на выходе эквивалентного четырехполюсника, пользуясь матричной формой записи системы уравнений (15):

$$\begin{pmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{U}_2^* \\ \underline{I}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Из (16) вычисляем $\underline{U}_2^*$:

$$\underline{U}_2^* = \frac{\underline{\Delta}_1}{\underline{\Delta}} = \underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{11} \cdot \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \cdot \underline{B}_{21}} - \underline{I}_1 \cdot \frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{11} \cdot \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \cdot \underline{B}_{21}}, \qquad (17)$$

где

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{vmatrix} = \underline{B}_{11} \cdot \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \cdot \underline{B}_{21},$$

$$\underline{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} \underline{U}_1 & \underline{B}_{12} \\ \underline{I}_1 & \underline{B}_{22} \end{vmatrix} = \underline{U}_1 \cdot \underline{B}_{22} - \underline{I}_1 \cdot \underline{B}_{21}.$$

Вычисление тока I_1 идет методом замены источника входного ЭДС (рис. 3, *а*) на источник тока и представления эквивалентного четырехполюсника (Т) Т-образной схемой замещения с параметрами Z_T, Y_T (рис. 3, *б*).

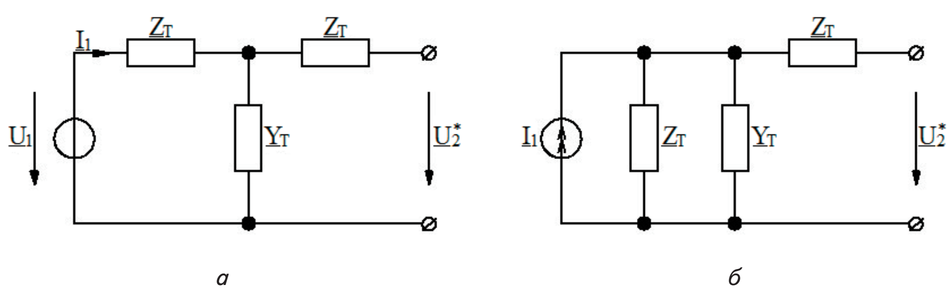

Рис. 3. Схема пассивного (Т) Т-образного четырехполюсника как электрического аналога модели кровеносного сосуда с учетом негерметичности его стенки: *а* — в исходном состоянии; *б* — с учетом замены источника входного ЭДС на источник тока

Входной ток I_1 определяется по формуле:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_T} = \underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{B}_{21}}{2 \cdot (\underline{B}_{11} - 1)}, \qquad (18)$$

$$\underline{Z}_T = 2 \cdot \frac{\underline{B}_{11} - 1}{\underline{B}_{21}}. \qquad (19)$$

С учетом (18) выражение (17) принимает вид:

$$\underline{U}_2^* = \frac{\underline{\Delta}_1}{\underline{\Delta}} = \underline{U}_1 \cdot \left(\frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{11} \cdot \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \cdot \underline{B}_{21}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\underline{B}_{21}}{2 \cdot (\underline{B}_{11} - 1)} \cdot \frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{11} \cdot \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \cdot \underline{B}_{21}} \right). \qquad (20)$$

Таким образом, передаточная функция модели участка кровеносного сосуда с негерметичностью его стенки имеет вид:

$$\underline{H}^* = \frac{\underline{U}_2^*}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{B}_{22}}{\underline{B}_{11} \cdot \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \cdot \underline{B}_{21}} - \frac{\underline{B}_{21}}{2 \cdot (\underline{B}_{11} - 1)} \times$$
$$\times \frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{11} \cdot \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \cdot \underline{B}_{21}} = \frac{1}{\underline{B}_{11} \cdot \underline{B}_{22} - \underline{B}_{12} \cdot \underline{B}_{21}} \times$$
$$\times \left(\underline{B}_{22} - \frac{\underline{B}_{21} \cdot \underline{B}_{12}}{2 \cdot (\underline{B}_{11} - 1)} \right). \qquad (21)$$

Рассмотрим процесс кровообращения в бедренной артерии при нормальном кровотоке и при кровотечении, вызванным отверстием в сосуде диаметром 1,5 мм на расстоянии 230 мм от начала сосуда, т. е. l_1 = 230 мм; l_0 = 1,5 мм; l_2 = 218,5 мм.

Как было приведено в [5], модель участки системы кровообращения человека в виде согласованной длинной линии с потерями характеризуется передаточной функцией, которая для бедренной артерии при нормальном кровообращении имеет вид:

$$\underline{H}_2\ (j\omega) = H_{2A} \cdot e^{-l_2 \cdot \sqrt{(R_{02} + j\omega L_{02}) \cdot j\omega C_{02}}}, \qquad (22)$$

где H_{2A} – модуль коэффициента передачи.

В табл. 1 приведены результаты расчетов основных параметров моделей аорты (второй столбец табл. 1) и бедренной артерии (третий столбец табл. 1), представленных в виде длинной линии. Следует учесть, что как для модели аорты, так и для модели бедренной артерии вязкость крови, плотность крови, частота сердечных сокращений и давление в левом желудочке сердца являются неизменными (1-я – 4-я строки табл. 1).

Таблица 1

Входные параметры для расчетов эквивалентных R_0, L_0, C_0 — параметров для моделей аорты и бедренной артерии в виде длинной линии

№ строки	Параметр	Аорта	Бедренная артерия
1	2	3	4
1	Вязкость крови, η, кг / м·с	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	
2	Плотность крови, ρ, кг / м^3	$1{,}062 \cdot 10^3$	

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
3	Частота сердечных сокращений, $f_{ЧСС}$, Гц	1	
4	Давление в левом желудочке сердца, A_C, Па	17342	
5	Внешний диаметр сосуда, d_H, м	$15{,}3\cdot10^{-3}$	$2{,}5\cdot10^{-3}$
6	Внутренний диаметр сосуда, d_B, м	$11{,}3\cdot10^{-3}$	$1{,}5\cdot10^{-3}$
7	Толщина стенки сосуда, h, м	$2\cdot10^{-3}$	$0{,}5\cdot10^{-3}$
8	Внутренний радиус сосуда, d_B, м	$5{,}65\cdot10^{-3}$	$0{,}75\cdot10^{-3}$
9	Площадь поперечного сечения сосуда, S, м^2	$1{,}003\cdot10^{-4}$	$1{,}767\cdot10^{-6}$
10	Длина сосуда, l, м	0,6	0,45

Рассчитываем эквивалентные R_{02}, L_{02}, C_{02} – параметры для модели бедренной артерии согласно (4):

$$R_{02}=\frac{8\cdot\pi\cdot\eta}{S_2^2}=\frac{8\cdot\pi\cdot4{,}5\cdot10^{-3}}{\left(1{,}767\cdot10^{-6}\right)^2}=3{,}622\cdot10^{10}\left(\frac{кг}{м^5\cdot с}\right),$$

$$L_{02}=\frac{\rho}{S_2}=\frac{1{,}062\cdot10^{3}}{1{,}767\cdot10^{-6}}=5{,}998\cdot10^{8}\left(\frac{кг}{м^5}\right),$$

$$C_{02}=\frac{2\cdot r_2\cdot S_2}{E_2\cdot h_2}=\frac{2\cdot0{,}75\cdot10^{-3}\cdot1{,}767\cdot10^{-6}}{1{,}407\cdot10^{5}\cdot0{,}5\cdot10^{-3}}=3{,}768\cdot10^{-11}\left(\frac{с^2}{кг\cdot м}\right),$$

где модуль Юнга стенки сосуда $E_2 = 1{,}407\cdot10^5$ Па согласно [8].

Входным сигналом является сигнал пульсовой волны после прохождения аорты [5], т. е.:

$$\underline{U}_{BX}(\omega)=\underline{U}_1(\omega)\cdot\underline{H}_{1A}(\omega)=$$
$$=\frac{3}{4}\cdot e^{-l_1\cdot\sqrt{(R_{01}+j\omega L_{01})\cdot j\omega C_{01}}}\cdot\int_0^T A_C\cdot\sin^2(\omega_1\cdot t)\cdot e^{-j\omega t}dt. \quad (23)$$

Рассчитываем эквивалентные R01, L_{01}, C_{01} – параметры для модели аорты согласно (4):

$$R_{01}=\frac{8\cdot\pi\cdot\eta}{S_1^2}=\frac{8\cdot\pi\cdot4{,}5\cdot10^{-3}}{\left(1{,}003\cdot10^{-4}\right)^2}=1{,}127\cdot10^{7}\left(\frac{кг}{м^5\cdot с}\right),$$

$$L_{01}=\frac{\rho}{S_1}=\frac{1{,}062\cdot10^{3}}{1{,}003\cdot10^{-4}}=1{,}057\cdot10^{7}\left(\frac{кг}{м^5}\right),$$

$$C_{01}=\frac{2\cdot r_1\cdot S_1}{E_1\cdot h_1}=\frac{2\cdot5{,}65\cdot10^{-3}\cdot1{,}003\cdot10^{-4}}{7{,}348\cdot10^{4}\cdot2\cdot10^{-3}}=7{,}711\cdot10^{-9}\left(\frac{с^2}{кг\cdot м}\right),$$

где модуль Юнга стенки сосуда $E_1 = 7{,}348\cdot10^4$ Па согласно [8].

Рассчитываем параметр L, исходя из того, что по условию диаметр отверстия в стенки сосуда составляет 1,5 мм (d = 1,5 мм), по формуле:

$$L=\frac{\rho}{S}=\frac{4\cdot\rho}{\pi\cdot d^2}=\frac{4\cdot1{,}062\cdot10^{3}}{\pi\cdot(1{,}5\cdot10^{-2})^2}=6{,}013\cdot10^{6}\left(\frac{кг}{м^5}\right).$$

Для исследования процесса прохождения пульсовой волны через бедренную артерию в частотной области воспользуемся следующими соотношениями:

– при нормальном кровотоке:

$$\underline{U}_2(\omega)=\underline{U}_1(\omega)\cdot\underline{H}_{1A}(\omega)\cdot\underline{H}_{2A}(\omega)=$$
$$=\underline{H}_{1A}(\omega)\cdot\underline{H}_{2A}(\omega)\cdot\int_0^T A_C\cdot\sin^2(\omega_1\cdot t)\cdot e^{-j\omega t}dt. \quad (24)$$

– при наличии негерметичности стенки сосуда диаметром 1,5 мм:

$$\underline{U}_2^*(\omega)=\underline{U}_1(\omega)\cdot\underline{H}_{1A}(\omega)\cdot\underline{H}^*(\omega)=$$
$$=\underline{H}_{1A}(\omega)\cdot\underline{H}^*(\omega)\cdot\int_0^T A_C\cdot\sin^2(\omega_1\cdot t)\cdot e^{-j\omega t}dt. \quad (25)$$

Для воспроизведения исходного сигнала в виде функции времени применяем обратное преобразование Фурье:

$$U_2(t)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\underline{H}_{1A}(\omega)\cdot\underline{H}_{2A}(\omega)\cdot\int_0^T A_C\cdot\sin^2(\omega_1\cdot t)\cdot e^{-j\omega t}dt\right)\cdot e^{j\omega t}d\omega, \quad (26)$$

$$U_2^*(t)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\underline{H}_{1A}(\omega)\cdot\underline{H}^*(\omega)\cdot\int_0^T A_C\cdot\sin^2(\omega_1\cdot t)\cdot e^{-j\omega t}dt\right)\cdot e^{j\omega t}d\omega. \quad (27)$$

В (23)–(27) $U_1(t) = A_C\cdot\sin^2(\omega_1 t)$ – модель сигнала пульсовой волны во время выброса крови из левого желудочка сердца в период систолы [5], где A_C – значение систолического давления в левом желудочке сердца, $\omega_1=\frac{1}{f_{ЧСС}}$.

На рис. 4 приведены графики пульсовой волны после прохождения бедренной артерии при нормальном кровотоке $U_2(t)$, построенному согласно выражению (26), и при кровотечении, вызванным отверстием в сосуде диаметром 1,5 мм $U_2^*(t)$, построенному согласно выражению (27).

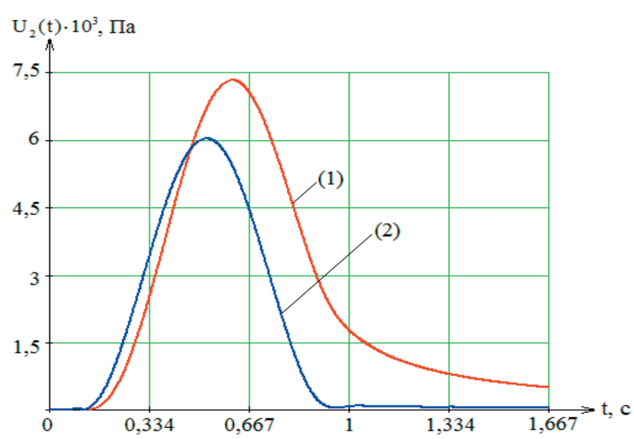

Рис. 4. Вид сигнала пульсовой волны после прохождения бедренной артерии при нормальном кровотоке (1) и при кровотечении, вызванным отверстием в сосуде диаметром 1,5 мм (2)

Как видно из рис. 4, при нормальном кровотоке значение кровяного давления в бедренной артерии составляет ≈ 7500 Па (56 мм рт. ст.), а при наличии отверстия даже незначительного размера, в данном случае – диаметром 1,5 мм, происходит сильное изменение формы пульсовой волны и значительное понижение значения кровяного давления.

Найдем сигнал пульсовой волны после прохождения бедренной артерии при отсутствии негерметичности стенки сосуда, то есть при $\frac{1}{\underline{Z}_0}=0$, по формуле (27) и сравним полученный сигнал с сигналом пульсовой волны, полученный по формуле (26).

Как видно из рис. 5, при нормальном кровотоке, то есть при отсутствии негерметичности стенки, графики сигналов пульсовой волны, построенные по (26) и (27), совпадают, что свидетельствует о тождественности выражений (26) и (27) при $\frac{1}{\underline{Z}_0}=0$. Таким образом, наличие негерметичности в стенке сосуда определяется ненулевыми значениями коэффициентов в формуле (27) $\frac{\underline{A}^1_{12}\cdot\underline{A}^2_{11}}{\underline{Z}_0}$, $\frac{\underline{A}^1_{12}\cdot\underline{A}^2_{12}}{\underline{Z}_0}$, $\frac{\underline{A}^1_{22}\cdot\underline{A}^2_{11}}{\underline{Z}_0}$, $\frac{\underline{A}^1_{22}\cdot\underline{A}^2_{12}}{\underline{Z}_0}$.

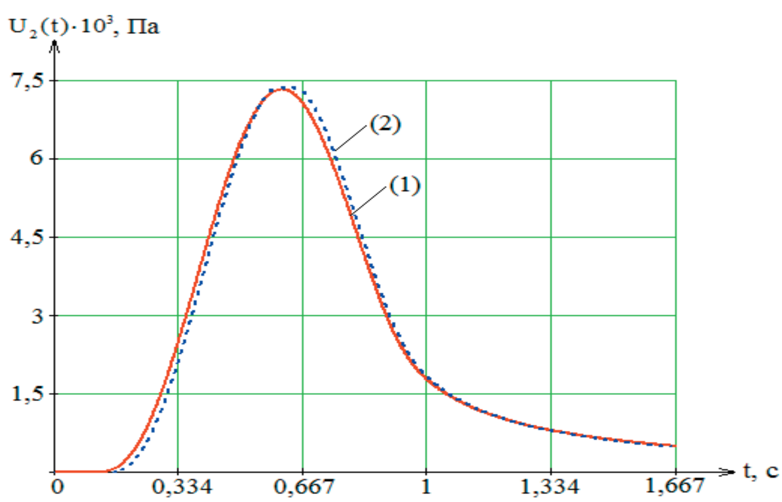

Рис. 5. Вид сигнала пульсовой волны после прохождения бедренной артерии при нормальном кровотоке:
1 — построенный по (26), 2 — построенный по (27) при $\frac{1}{\underline{Z}_0}=0$

Таким образом, аналитическое выражение (27) позволяет определить вид сигнала пульсовой волны в кровеносных сосудах с наличием патологий, связанных с негерметичностью в их стенках, что позволяет выявить влияние данной патологии на форму и амплитуду пульсовой волны.

5. Апробация результатов исследований

Для подтверждения адекватности проведенного исследования вычислим двухсторонний критерий Стьюдента, рассчитанное значение $t_{эмп}$ которого должно быть большим критического значения $t_{кр}(\alpha;\, r)$ на выбранном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и при количестве степеней свободы $r = n_1 + n_2 - 2$, где $n_1 = 9$ – количество экспериментальных точек на кривой 1 (рис. 4), $n_2 = 7$ – количество экспериментальных точек на кривой 2 (рис. 4).

Если $t_{эмп} > t_{кр}(\alpha;\, r)$, то различия между средними значениями экспериментальной группы 1 и экспериментальной группы 2 существенны на данном уровне значимости, что означает существенные изменения движения крови в сосуде с отверстием в его стенки, что приводит к кровотечению.

Эмпирическое (расчетное) значение двустороннего критерия Стьюдента $t_{эмп}$ определяется по формуле [10]:

$$t_{эмп}=\frac{|M_1-M_2|}{S_d}, \qquad (28)$$

где M_1, M_2 – математическое ожидание первой и второй выборок соответственно (то есть экспериментальных значений с кривых 1 и 2 (рис. 4)) и вычисляются по формулам [10]:

$$M_1=\frac{1}{n_1}\cdot\sum_{i=1}^{n_1}P_{1i},\quad M_2=\frac{1}{n_2}\cdot\sum_{i=1}^{n_2}P_{2i}.$$

Стандартная ошибка разности S_d при $n_1 \neq n_2$ определяется по формуле [10]:

$$S_d=\sqrt{\frac{S_1+S_2}{n_1+n_2-2}\cdot\left(\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}\right)}, \qquad (29)$$

где S_1, S_2 – дисперсии первой и второй выборок соответственно, которые вычисляются по формулам [10]:

$$S_1=\frac{1}{n_1-1}\cdot\sum_{i=1}^{n_1}\left(P_{1i}-M_1\right)^2,$$

$$S_2=\frac{1}{n_2-1}\cdot\sum_{i=1}^{n_2}\left(P_{2i}-M_2\right)^2,$$

где P_{1i} и P_{2i} – экспериментальные значения с кривых 1 и 2 (рис. 4).

В табл. 2 занесены основные экспериментальные значения с кривых 1 и 2 P_{1i} и P_{2i} (рис. 4) (2-я и 3-я строки табл. 2) при одном и том же значении времени t (1-я строка табл. 2), результаты расчетов M_1, M_2, S_1, S_2, S_d, $t_{эмп}$ (4-я – 9-я строки табл. 2), а также значение критического значения критерия Стьюдента $t_{кр}(\alpha;\, r)$ (10-я строка табл. 2) при $n_1 = n_2$, $r = 14$ и $\alpha = 0{,}05$.

Поскольку $t_{емп} > t_{кр}(\alpha;\, r)$, значит различия между средними экспериментальными значениями, взятых с кривых 1 и 2 (рис. 4) существенны на данном уровне значимости, что является подтверждением адекватности проведенного исследования и существенное влияние негерметичности стенки сосуда на характер кровотока.

Таблица 2

Основные результаты статистической обработки эксперимента

№ строки	Значения									
1	t, c	0,334	0,5005	0,667	0,8335	1	1,167	1,334	1,5005	1,667
2	$P_{1i}\cdot 10^3$, Па	2,39	6	7	4,5	1,68	0,86	0,75	0,73	0,6
3	$P_{2i}\cdot 10^3$, Па	3,3	5,9	4,5	0,75	0,1	0,1	0,1	–	–
4	M_1	$2{,}723\cdot 10^3$								
5	M_2	$1{,}964\cdot 10^3$								
6	S_1	$6{,}154\cdot 10^6$								
7	S_2	$5{,}656\cdot 10^6$								
8	S_d	462,85								
9	$t_{эмп}$	1,64								
10	$t_{кр}$ (0,05; 14)	1,53								

6. Выводы

В результате выполненных исследований была решена актуальная задача исследования процесса движения крови по сосудам при возникновении негерметичности в их стенках и были сформулированы следующие обобщающие выводы и практические результаты:

1. Проанализированы существующие методы исследования патологий кровеносных сосудов, связанных с негерметичностью в их стенках, в результате чего было установлено ограниченность методов диагностики выявления места негерметичности стенки сосуда, приводящее к развитию кровотечения.

2. Впервые разработана математическая модель, позволяющая определить вид сигнала пульсовой волны в кровеносных сосудах с наличием патологий, связанных с негерметичностью в их стенках, что позволяет выявить влияние данной патологии на форму и амплитуду пульсовой волны [5, 6].

3. Разработанная математическая модель является адекватной по критерию Стьюдента и подтверждает статистическую значимость влияния негерметичности стенки сосуда на характер кровотока.

4. Получил дальнейшее развитие метод электрической аналогии движения крови по сосудам и движения тока на участке цепи, который позволяет определить место расположения «свища», условный диаметр отверстия в стенке и изменение формы пульсовой волны, что позволяет выявить степень развития кровотечения на ранней стадии [4, 5].

5. После проведения полной клинической апробации возможным будет выявить практическую значимость метода и границы его применимости в практической медицине для прогнозирования развития сосудистых патологий, связанных с негерметичностью в их стенках.

Литература

1. Клиническая оценка тяжести кровопотери [Електронний ресурс] / Режим доступа: http://www.allsurgery.ru/gastroduodenalnye_krovotecheniya/ocenka_krovopoteri.html.
2. Струков, А. И. Патологическая анатомия [Текст] / А. И. Струков, В. В. Серов. – М.: Медицина, 1995. – С. 236–237.
3. Оценка тяжести кровопотери [Електронний ресурс] / Режим доступа: http://webspier.ru/doc/110487.
4. Владимиров, Ю. А. Биофизика [Текст] / Ю. А. Владимиров, Д. И. Рощупкин и др. – М.: Медицина, 1983. – С. 200–205.
5. Владов, С. І. Модель системи кровообігу людини у вигляді неоднорідної узгодженої довгої лінії з розподіленими параметрами [Текст] / С. І. Владов, В. О. Мосьпан // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2012. – Вип. 2/2012 (73). – С. 56–59.
6. Владов, С. І. Побудова моделі сигналу пульсової хвилі як вхідного сигналу моделі системи кровообігу людини у вигляді узгодженої довгої лінії [Текст]: матер.VIII міжн. наук.-прак. конф. / С. І. Владов, В. О. Мосьпан, О. О. Юрко // Ключові аспекти наукової діяльності – 2012, Польща, Пшемисль. – Przemysl: Sp. z o. o. «Nauka i studia». – 2012. – Т. 14. – С. 65–69.
7. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи [Текст]: Учеб. для электротехн., энерг., приборостроит. спецвузов; 8-е изд., перераб. и доп. / Л. А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 1984. – С. 108–128.
8. Vladov, S. Design of the deformed state of blood vessels [Текст] / S. Vladov, V. Mospan, O. Yurko // Nauka i studia. – 2013. – № 7(75). – P. 72–77.
9. Чарный, И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах [Текст] / И. А. Чарный. – М.: Недра, 1975. – С. 27–28.
10. Берестнева, О. Г. Прикладная математическая статистика: учебное пособие [Текст] / О. Г. Берестнева, О. В. Марухина, Г. Е. Шевелёв. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – С. 46–66.