

УДК 62-755

О ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕСИММЕТРИЧНО УСТАНОВЛЕННОГО РОТОРА С ИНЕРЦИОННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

А. Н. Горбенко

Кандидат технических наук, доцент
Кафедра судовых энергетических установок
Керченский государственный морской
технологический университет
ул. Орджоникидзе, 82, г. Керчь, Украина, 98309
E-mail: gan0941@yandex.ru

У роботі розглядаються особливості динаміки ротора, який має різні моменти інерції щодо його поперечних осей, при довільному розташуванні ротора відносно опор. Отримано вирази для критичних швидкостей і меж стійкості. Показано, що інерційно анізотропний ротор має від однієї до чотирьох критичних швидкостей прямої прецесії і від однієї до трьох областей нестійкості

Ключові слова: гіроскопічний ротор, інерційна анізотропія, стійкість, коливання, моменти інерції, критичні швидкості

В работе рассматриваются особенности динамики ротора, который имеет различные моменты инерции относительно его поперечных осей, при произвольном расположении ротора относительно опор. Получены выражения для критических скоростей и границ устойчивости. Показано, что инерционно анизотропный ротор имеет от одной до четырех критических скоростей прямой прецессии и от одной до трех областей неустойчивости

Ключевые слова: гироскопический ротор, инерционная анизотропия, устойчивость, колебания, моменты инерции, критические скорости

1. Введение

В технологических процессах широко применяются различные машины роторного типа, основной частью которых служит быстровращающийся гироскопический ротор. Неточности изготовления и действие эксплуатационных факторов вызывают возбуждение как поперечных, так и угловых колебаний ротора. При высоких частотах вращения в существенной степени проявляются свойства, обусловленные инерцией поворота вращающегося тела, в частности гироскопический эффект.

Реальный ротор всегда имеет отклонения от осесимметричного распределения массы из-за конструктивных особенностей и неточностей изготовления. Вследствие этого его два момента инерции относительно поперечных главных осей инерции в общем случае не равны друг другу. Это свойство реального ротора называется подвижной инерционной анизотропией.

Важно отметить, что инерционная анизотропия неуравновешенного ротора не только приводит к повышению уровня вибрации, но и может служить причиной потери устойчивости движения механической системы в целом. Даже идеально уравновешенный, но анизотропный ротор имеет области неустойчивости. В связи с этим изучение влияния данного фактора на динамику гироскопического ротора является актуальной задачей.

2. Анализ литературных данных, постановка проблемы, цель работы

Влияние анизотропии на колебания и устойчивость вращающегося ротора изучалось в ряде работ.

В работах [1–3] показано, что инерционная анизотропия ротора может приводить к появлению диапазона частот вращения, внутри которого теряется устойчивость движения механической системы (МС), что является одной из проблем в обеспечении надежной и длительной работы роторных машин. Причем при отсутствии демпфирования в МС неустойчивость появляется даже при бесконечно малой анизотропии.

В работе [4] изучен инерционно анизотропный ротор с неподвижной точкой, имеющий лишь две степени свободы. В [5] исследован случай ротора с одновременной анизотропией жесткости вала и подшипников. Работа [6] посвящена анализу динамики ротора, анизотропия которого вызвана подвижными элементами на нём. Однако в указанных работах не учитывается влияние инерции угловых колебаний ротора. В работах [7–9] для исследования использовались численные методы расчета колебаний и устойчивости. В работе [10] получены выражения для допустимого уровня инерционной анизотропии гироскопического ротора для случая его симметричного расположения относительно опор.

Изучение литературных источников показывает, что наиболее изученным является случай симметричного расположения ротора относительно его опор. При этом уравнения движения МС распадаются на две независимые системы, что значительно облегчает анализ динамики. Существенно более сложным для анализа является общий случай несимметричного расположения ротора. В этом случае поперечные и угловые колебания ротора взаимосвязаны друг с другом и необходимо исследовать полную систему уравнений движения. В известных работах общий случай изучен недостаточно полно. В частности, отсутствуют выра-

жения для критических скоростей вращения в явном виде, нет анализа их количества в зависимости от типа ротора, нет анализа количества и расположения областей неустойчивости.

Ротор является инерционно анизотропным чаще всего по причине его конструктивных особенностей, либо из-за наличия большого дисбаланса. Кроме того, в работе [11] показано, что ротор становится инерционно анизотропным вследствие установки на него пассивного автобалансирующего устройства.

Целью работы является анализ динамических свойств инерционно анизотропного ротора, который несимметрично установлен относительно его опор, т. е. в общем случае схемы установки ротора. При этом будут получены выражения для критических скоростей вращения и границ устойчивости.

3. Анализ динамических свойств ротора с инерционной анизотропией

3.1. Уравнения движения анизотропного ротора

Рассмотрим роторную систему, состоящую из абсолютно жесткого ротора, который вращается на двух одинаковых упруго-демпферных изотропных опорах (рис. 1). Ротор полагаем осесимметричным с центром масс в точке С на оси его вращения. Ротор может совершать малые пространственные колебания.

Физическая модель и уравнения движения инерционно анизотропного ротора известны. Здесь мы будем исходить из материалов работы [10], в которой исследовался случай симметрично установленного ротора.

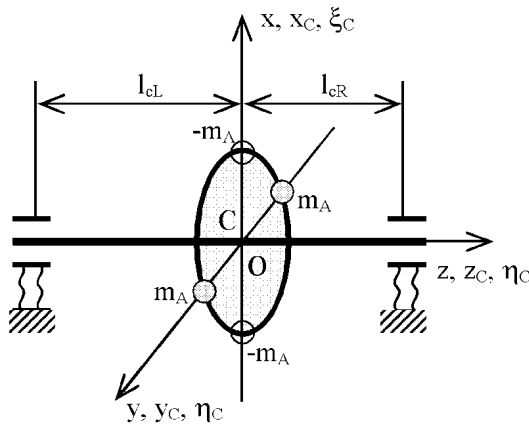


Рис. 1. Схема механической системы инерционно анизотропного ротора

Физические и геометрические параметры МС: ω – угловая скорость вращения ротора, рад/с; M_r – масса ротора, кг; C_r – полярный массовый момент инерции ротора относительно оси вращения, кг·м²; $A_{r\xi}$, $A_{r\eta}$ – диаметральные массовые моменты инерции ротора относительно поперечных главных осей инерции ξ_c и η_c , кг·м²; $A_r = 0,5(A_{r\xi} + A_{r\eta})$ – средний диаметральный момент инерции ротора относительно поперечных главных осей инерции ξ_c и η_c , кг·м²; $\Delta A_r = 0,5(A_{r\xi} - A_{r\eta})$ – инерционная анизотропия ротора, кг·м²; c – коэффициент жесткости опоры, Н/м; h – коэффициент вязкого демпфирования опоры, кг·с⁻¹; l_{cL} , l_{cR} –

расстояния от центра масс ротора до левой и правой опор, м.

Для моделирования инерционной анизотропии, к осесимметричному ротору жестко прикреплены четыре точечные массы – две пары материальных точек, расположенные на радиусе R_A в сечении центра масс ротора С (рис. 1). При этом первые две точки имеют массу m_A каждая, а вторые две точки имеют «отрицательную» массу $-m_A$ (путем удаления материала ротора). Каждая пара этих точек расположена на концах диаметра $2R_A$, а эти два диаметра перпендикулярны друг другу (т. е. точки расположены «крестом»). Добавленные точечные массы не изменяют массу ротора и среднее значение диаметрального момента инерции.

Механическая система имеет четыре степени свободы. Обобщенные координаты (ОК) движения МС в неподвижной системе координат:

x_c, y_c – координаты центра масс ротора;

α, β – текущие углы поворота поперечного сечения, проходящего через центр масс ротора.

Отметим, что согласно общепринятой классификации различают следующие типы роторов:

- длинный ротор, если $C_r < A_r$ ($\bar{C}_r < 1$);
- сферический ротор, если $C_r = A_r$ ($\bar{C}_r = 1$);
- короткий ротор, если $C_r > A_r$ ($\bar{C}_r > 1$).

Уравнения движения несимметрично установленного инерционно анизотропного ротора в неподвижных координатах (вывод уравнений [10, 11]):

$$\begin{aligned} & M_r \{ \ddot{z}_c \} + h_x \{ \dot{z}_c \} + c_x \{ z_c \} + \\ & + h_{y\alpha} [E_c] \{ \dot{\gamma} \} + c_{y\alpha} [E_c] \{ \gamma \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \\ & (A_r [E] + [J_A(t)]) \{ \ddot{\gamma} \} + [K_\gamma(t)] \{ \dot{\gamma} \} + c_\alpha \{ \gamma \} - \\ & - h_{y\alpha} [E_c] \{ \dot{z}_c \} - c_{y\alpha} [E_c] \{ z_c \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\{z_c\} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix}$; $\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$ – векторы ОК МС;

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; [E_c] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[K_\gamma(t)] = h_\alpha [E] - \omega C_r [E_c] - 2\omega [J_A(t)] [E_c];$$

$$(A_r [E] + [J_A(t)]) \text{ – тензор инерции ротора;}$$

$$[J_A(t)] = [T] [I_A] [T]^{-1}; [I_A] = \Delta A_r \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\Delta A_r = 2m_A R_A^2 \cos 2\alpha_A;$$

$$[T(t)] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \text{ – матрица поворота;}$$

$c_x, c_\alpha, c_{y\alpha}, h_x, h_\alpha, h_{y\alpha}$ – коэффициенты жесткости и демпфирования опор, приведенные к центру масс ротора.

Коэффициенты жесткости и демпфирования, входящие в уравнения движения (1), зависят от распо-

ложения ротора относительно опор и определяются выражениями:

$$c_x = 2c; c_\alpha = c(l_{cl}^2 + l_{cr}^2); c_{y\alpha} = c(l_{cl} - l_{cr}); \quad (2)$$

$$h_x = 2h; h_\alpha = h(l_{cl}^2 + l_{cr}^2); h_{y\alpha} = h(l_{cl} - l_{cr}).$$

Система (1) уравнений движения МС учитывает инерционную анизотропию ротора ΔA_r . Величина ΔA_r зависит от массы m_A , радиуса R_A и начального угла α_A расположения главной поперечной оси инерции ротора в начальный момент времени $t=0$. Отметим, что постоянный угол α_A может быть выбран произвольно, и далее будем полагать его равным нулю.

Непосредственное решение дифференциальных уравнений (1) затруднительно, поскольку они содержат периодические коэффициенты, которые входят в уравнения угловых колебаний в виде переменной матрицы $[T(t)]$. Уравнения движения следует привести к виду уравнений с постоянными коэффициентами. Для этого введем вращающуюся систему координат $Ouvz$, которая вращается вокруг неподвижной оси z с постоянной скоростью ω . Тогда обобщенные координаты МС во вращающихся осях будут иметь вид:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} u_c \\ v_c \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \{z_c\}; \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \{\gamma\}. \quad (3)$$

Выполнив подстановку (3) в (1), после преобразований получаем систему уравнений движения МС во вращающихся координатах в виде:

$$M_r \{\ddot{w}\} + [H_w] \{\dot{w}\} + [K_w] \{w\} + h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{\chi}\} + [K_{w\chi}] \{\chi\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$(A_r [E] + [I_A]) \{\ddot{\chi}\} + [H_\chi] \{\dot{\chi}\} + [K_\chi] \{\chi\} - h_{y\alpha} [E_c] \{\dot{w}\} - [K_{w\chi}] \{w\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $[H_w] = h_x [E] + 2\omega M_r [E_c]$;

$$[H_\chi] = h_\alpha [E] + \omega(2A_r - C_r) [E_c];$$

$$[K_w] = (c_x - M_r \omega^2) [E] + \omega h_x [E_c];$$

$$[K_\chi] = (c_\alpha + \omega^2 (C_r - A_r)) [E] + \omega^2 [I_A] + \omega h_\alpha [E_c];$$

$$[K_{w\chi}] = -\omega h_{y\alpha} [E] + c_{y\alpha} [E_c].$$

Для удобства последующего анализа перейдем к безразмерным уравнениям движения с минимально возможным числом параметров. Для этого введем следующие безразмерные ОК МС и безразмерные параметры:

$$\{\bar{z}_c\} = \frac{1}{l_w} \{z_c\}; \quad \{\bar{\gamma}\} = \frac{1}{l_\chi} \{\gamma\};$$

$$\{\bar{w}\} = \frac{1}{l_w} \{w\}; \quad \{\bar{\chi}\} = \frac{1}{l_\chi} \{\chi\}; \quad \tau = \omega_0 t;$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \bar{p}_x = \frac{c_x}{M_r \omega_0^2} = 1; \quad \bar{p}_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{\omega_0^2} = \frac{c_\alpha}{A_r \omega_0^2}; \quad (5)$$

$$\bar{h}_x = \frac{h_x}{M_r \omega_0}; \quad \bar{h}_\alpha = \frac{h_\alpha}{A_r \omega_0};$$

$$\bar{c}_{y\alpha} = \frac{c_{y\alpha}}{\omega_0^2 \sqrt{M_r A_r}}; \quad \bar{h}_{y\alpha} = \frac{h_{y\alpha}}{\omega_0 \sqrt{M_r A_r}};$$

$$\bar{C}_r = \frac{C_r}{A_r}; \quad \Delta \bar{A}_r = \frac{\Delta A_r}{A_r},$$

где масштабные коэффициенты l_w, l_χ выбраны следующим образом:

$$\frac{l_\chi}{l_w} = \sqrt{\frac{M_r}{A_r}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_x}{M_r}}.$$

Безразмерные уравнения движения рассматриваемой МС в неподвижных координатах получаем из (4), (5) в виде:

$$\{\bar{z}_c\}'' + \bar{h}_x \{\bar{z}_c\}' + \{\bar{z}_c\} + \bar{h}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{\gamma}\}' + \bar{c}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$([E] + [\bar{J}_A(\tau)]) \{\bar{\gamma}\}'' + [\bar{K}_\gamma(\tau)] \{\bar{\gamma}\}' + \bar{p}_\alpha^2 \{\bar{\gamma}\} - \bar{h}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{z}_c\}' - \bar{c}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{z}_c\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

$$\text{где } [\bar{J}_A(\tau)] = \frac{1}{A_r} [J_A(t)] = [T] [\bar{I}_A] [T]^{-1};$$

$$[\bar{I}_A] = \frac{1}{A_r} [I_A] = \Delta \bar{A}_r \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[\bar{K}_\gamma(\tau)] = \bar{h}_\alpha [E] - \Omega \bar{C}_r [E_c] - 2\Omega [J_A(\tau)] [E_c].$$

Здесь штрих означает операцию дифференцирования по безразмерному времени τ .

Безразмерные уравнения движения несимметрично установленного инерционно анизотропного ротора во вращающихся координатах:

$$\{\bar{w}\}'' + [\bar{H}_w] \{\bar{w}\}' + [\bar{K}_w] \{\bar{w}\} + \bar{h}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{\chi}\}' + [\bar{K}_{w\chi}] \{\bar{\chi}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (7)$$

$$([E] + [\bar{I}_A]) \{\bar{\chi}\}'' + [\bar{H}_\chi] \{\bar{\chi}\}' + [\bar{K}_\chi] \{\bar{\chi}\} - \bar{h}_{y\alpha} [E_c] \{\bar{w}\}' - [\bar{K}_{w\chi}] \{\bar{w}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

$$\text{где } [\bar{H}_w] = \bar{h}_x [E] + 2\Omega [E_c];$$

$$\begin{aligned} [\bar{H}_x] &= \bar{h}_\alpha [E] + \Omega(2 - \bar{C}_r)[E_c]; \\ [\bar{K}_w] &= (1 - \Omega^2)[E] + \Omega \bar{h}_x [E_c]; \\ [\bar{K}_\chi] &= (\bar{p}_\alpha^2 - \Omega^2(1 - \bar{C}_r))[E] + \Omega^2 [\bar{I}_\lambda] + \Omega \bar{h}_\alpha [E_c]; \\ [\bar{K}_{w\chi}] &= -\Omega \bar{h}_{y\alpha} [E] + \bar{c}_{y\alpha} [E_c]. \end{aligned}$$

Приведенные безразмерные уравнения движения (7), (8) учитывают инерционную анизотропию ротора в виде параметра $\Delta \bar{A}_r$, входящего в матрицы $[\bar{I}_\lambda]$, $[\bar{K}_\chi]$.

Приведем также расчетные формулы для безразмерных коэффициентов жесткости и демпфирования в зависимости от расположения ротора относительно опор. Используя (2) и (5), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{p}_x^2 = \bar{c}_x &= \frac{p_x^2}{\omega_0^2} = 1; \quad \omega_0^2 = \frac{c_x}{M_r}; \\ \bar{p}_\alpha^2 = \bar{c}_\alpha &= \frac{p_\alpha^2}{\omega_0^2} = \frac{c_\alpha}{A_r \omega_0^2} = \frac{c_\alpha M_r}{c_x A_r} = \frac{\bar{l}_L^2 + (1 - \bar{l}_L)^2}{2\bar{p}_r^2}; \\ \bar{c}_{y\alpha} &= \frac{c_{y\alpha}}{\omega_0^2 \sqrt{M_r A_r}} = \frac{c_{y\alpha}}{c_x} \sqrt{\frac{M_r}{A_r}} = \frac{2\bar{l}_L - 1}{2\bar{p}_r}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\bar{h}_x = \frac{h_x}{M_r \omega_0} = \frac{2h}{M_r p_x}; \quad \bar{h}_\alpha = \frac{h_\alpha}{A_r \omega_0} = \bar{h}_x \frac{\bar{l}_L^2 + (1 - \bar{l}_L)^2}{2\bar{p}_r^2};$$

$$\bar{h}_{y\alpha} = \frac{h_{y\alpha}}{\omega_0 \sqrt{M_r A_r}} = \bar{h}_x \frac{2\bar{l}_L - 1}{2\bar{p}_r},$$

где $\bar{l}_L = \frac{l_{cl}}{l}$; $\bar{p}_r = \frac{p_r}{l}$; $p_r = \sqrt{\frac{A_r}{M_r}}$.

Здесь введены безразмерные (относительные) параметры: p_r – радиус инерции ротора; \bar{p}_r – относительный радиус инерции ротора; например, в случае тонкого диска радиуса R_r и при межопорном расстоянии равно $l=0,5R_r$ параметр равен $\bar{p}_r=1$; \bar{l}_L – относительное расстояние от центра масс ротора до левой опоры; при $0 < \bar{l}_L < 1$ – межопорный ротор, при $\bar{l}_L=0,5$ – симметрично расположенный ротор, а при $\bar{l}_L > 1$ – консольный ротор.

3. 2. Критические скорости вращения анизотропного ротора и их анализ

Характеристическое уравнение (ХУ), соответствующее безразмерным уравнениям движения (7), (8) имеет вид:

$$|[\bar{M}] \lambda_r^2 + [\bar{H}] \lambda_r + [\bar{K}]| = 0, \quad (10)$$

где $[\bar{M}] = \begin{bmatrix} [E] & [0] \\ [0] & ([E] + [\bar{I}_\lambda]) \end{bmatrix}$; $[\bar{H}] = \begin{bmatrix} [\bar{H}_w] & \bar{h}_{y\alpha} [E_c] \\ -\bar{h}_{y\alpha} [E_c] & [\bar{H}_\chi] \end{bmatrix}$;

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_w] & [\bar{K}_{w\chi}] \\ -[\bar{K}_{w\chi}] & [\bar{K}_\chi] \end{bmatrix};$$

λ_r – собственное число МС во вращающихся координатах.

Найдем выражение для недемпфированных критических скоростей вращения несимметрично установленного анизотропного ротора. Поскольку МС рассматривается во вращающихся координатах, то критическим скоростям прямой прецессии (при отсутствии трения) соответствуют равенства [1]: $\lambda_r = 0$; $\bar{h}_x = 0$; $\bar{h}_\alpha = 0$; $\bar{h}_{y\alpha} = 0$. Выполнив данную подстановку в (10), получаем частотное уравнение в виде:

$$|\bar{K}_1| = \begin{vmatrix} [\bar{K}_{w1}] & [\bar{K}_{w\chi1}] \\ -[\bar{K}_{w\chi1}] & [\bar{K}_{\chi1}] \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

где $[\bar{K}_{w1}] = (1 - \Omega^2)[E] = k_x [E]$;

$$[\bar{K}_{\chi1}] = (\bar{p}_\alpha^2 - \Omega^2(1 - \bar{C}_r))[E] + \Omega^2 [\bar{I}_\lambda] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix};$$

$$[\bar{K}_{w\chi1}] = \bar{c}_{y\alpha} [E_c].$$

Здесь введены обозначения:

$$k_x = 1 - \Omega^2; \quad k_{1,2} = \bar{p}_\alpha^2 - \Delta \bar{I}_{1,2} \Omega^2; \quad \Delta \bar{I}_{1,2} = 1 - \bar{C}_r \pm \Delta \bar{A}_r;$$

$\Delta \bar{I}_{1,2}$ – разности поперечных и полярного моментов инерции составного ротора.

Анализ показывает, что уравнение (11) допускает получение точного выражения для критических скоростей в явном виде. Для этого преобразуем частотное уравнение (11), используя свойства блочных определителей [12]:

$$|\bar{K}_1| = |[\bar{K}_{w1}][\bar{K}_{\chi1}] + [\bar{K}_{w\chi1}]^2| = \left| k_x \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} - \bar{c}_{y\alpha}^2 [E] \right| = 0$$

или в виде произведения

$$|\bar{K}_1| = \Delta_1 \Delta_2 = 0, \quad (12)$$

где $\Delta_{1,2} = \Delta \bar{I}_{1,2} \Omega^4 - (\bar{p}_\alpha^2 + \Delta \bar{I}_{1,2}) \Omega^2 + \bar{p}_\alpha^2 - \bar{c}_{y\alpha}^2$.

Рассматривая далее выражения для $\Delta_{1,2}$ в (12) как биквадратные уравнения относительно Ω , находим корни частотного уравнения.

Таким образом, критические скорости поперечных и угловых колебаний несимметрично установленного анизотропного ротора определяются выражением, полученным из (12):

$$\Omega_{\kappa 1-4}^2 = \Omega_{\kappa x, \alpha}^2 = \frac{1}{2} + \frac{\bar{p}_\alpha^2}{2\Delta \bar{I}_{1,2}} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{\bar{p}_\alpha^2}{\Delta \bar{I}_{1,2}}\right)^2 + 4 \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\Delta \bar{I}_{1,2}}}, \quad (13)$$

где $\Delta \bar{I}_{1,2} = 1 - \bar{C}_r \pm \Delta \bar{A}_r$; параметры \bar{p}_α , $\bar{c}_{y\alpha}$ (9).

Для обозначения критических скоростей далее будет использоваться как обозначение $\Omega_{\kappa 1-4}$, так и обозначения $\Omega_{\kappa x 1,2}$ и $\Omega_{\kappa \alpha 1,2}$ с указанием вида колебаний – поперечные и угловые.

Полученное выражение (13) является точным и справедливым при произвольном (несимметричном) расположении ротора относительно опор.

В частном случае симметричного расположения ротора, когда $\bar{c}_{y\alpha} = 0$, критические скорости вращения определяются выражениями, полученными из (13):

$$\Omega_{K1,2}^2 = \Omega_{KX1,2}^2 = 1;$$

$$\Omega_{K3,4}^2 = \Omega_{Ka1,2}^2 = \frac{\bar{p}_\alpha^2}{\Delta \bar{I}_{1,2}} = \frac{\bar{p}_\alpha^2}{1 - \bar{C}_r \pm \Delta \bar{A}_r}. \quad (14)$$

Последние выражения совпадают с полученными ранее в работах [1, 2, 10].

Приближенные выражения для критических скоростей при расположении ротора, близком к симметричному (при малой величине $\bar{c}_{y\alpha}$), полученные из (13):

$$\Omega_{K1,2}^2 \approx 1 - \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\bar{p}_\alpha^2 - \Delta \bar{I}_{1,2}} = 1 - \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\bar{p}_\alpha^2 - 1 + \bar{C}_r \mp \Delta \bar{A}_r}; \quad (15)$$

$$\Omega_{K3,4}^2 \approx \frac{\bar{p}_\alpha^2}{\Delta \bar{I}_{1,2}} + \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\bar{p}_\alpha^2 - \Delta \bar{I}_{1,2}} = \frac{\bar{p}_\alpha^2}{1 - \bar{C}_r \pm \Delta \bar{A}_r} + \frac{\bar{c}_{y\alpha}^2}{\bar{p}_\alpha^2 - 1 + \bar{C}_r \mp \Delta \bar{A}_r}.$$

Последние выражения имеют хорошую точность за исключением области, где $\bar{p}_\alpha^2 \approx \Delta \bar{I}_{1,2}$. Однако такое сочетание параметров не характерно для реальных роторных машин.

Из анализа выражений (12)–(15) вытекает, что в общем случае анизотропный ротор, совершающий пространственное движение, может иметь от одной до четырех критических скоростей вращения прямой прецессии. Анизотропия ротора приводит к удваиванию количества критических скоростей по сравнению с изотропным ротором. Результаты анализа условий существования различного числа критических скоростей для удобства сведены в табл. 1.

Информация, приведенная в табл. 1, получена путем анализа коэффициентов биквадратных уравнений в (12) и формул (13)–(15) с учетом следующего:

- условием вещественности корней Ω_{Ki}^2 биквадратного уравнения в (12) является положительность его дискриминанта; анализ показал, что корни всегда вещественны;
- можно показать, что при одинаковых опорах ротора всегда выполняются соотношения: $\bar{p}_\alpha^2 \geq \bar{c}_{y\alpha}^2$, $a_2 \geq 0$;
- условием существования критической скорости Ω_{Ki} является положительность корня $\Omega_{Ki}^2 > 0$; для анализа этого условия применялось известное правило Декарта для знаков коэффициентов уравнения (12) [12].

На рис. 2, а, б проиллюстрировано качественное изменение спектра критических скоростей вращения длинного ротора вследствие инерционной анизотропии.

На рис. 3–5 приведены примеры зависимостей критических частот вращения от параметров ротора. Графики построены по формулам (13), (9) при следующих базовых исходных данных: $\bar{C}_r = 0,75$; $\bar{p}_r = 0,4$; $\Delta \bar{A}_r = 0,1$. При этом для симметрично установленного ротора ($\bar{I}_1 = 0,5$) имеем $\bar{c}_{y\alpha} = 0$, $\Omega_{K1-4} = (1; 1; 2,11; 3,23)$, а для консольного ротора ($\bar{I}_1 = 1,2$) имеем $\bar{p}_\alpha = 2,15$, $\bar{c}_{y\alpha} = 1,75$, $\Omega_{K1-4} = (0,567; 0,575; 3,73; 5,61)$.

Таблица 1

Количество критических скоростей вращения изотропного и анизотропного ротора

Параметр и диапазон его значений		Количество критических скоростей вращения МС Ω_K	
\bar{C}_r (тип ротора)	$\Delta \bar{I}_{1,2} = 1 - \bar{C}_r \pm \Delta \bar{A}_r$	изотропный ротор ($\Delta \bar{A}_r = 0$)	анизотропный ротор ($\Delta \bar{A}_r \neq 0$)
Несимметрично установленный ротор ($\bar{c}_{y\alpha} \neq 0$), ф.(13)			
$\bar{C}_r < (1 - \Delta \bar{A}_r)$, $\bar{c}_{y\alpha} \neq 0$ длинный ротор	$\Delta \bar{I}_{1,2} > 0$	две Ω_K	четыре Ω_K
$(1 - \Delta \bar{A}_r) < \bar{C}_r$, $\bar{C}_r < (1 + \Delta \bar{A}_r)$ ротор, близкий к сферическому	$\Delta \bar{I}_1 > 0$, $\Delta \bar{I}_2 < 0$	одна Ω_K	три Ω_K
$\bar{C}_r > (1 - \Delta \bar{A}_r)$, короткий ротор	$\Delta \bar{I}_{1,2} < 0$	одна Ω_K (по поперечным колебаниям)	две Ω_K (по поперечным колебаниям)
Симметрично установленный ротор ($\bar{c}_{y\alpha} = 0$), (14)			
$\bar{C}_r < (1 - \Delta \bar{A}_r)$, $\bar{c}_{y\alpha} \neq 0$ длинный ротор	$\Delta \bar{I}_{1,2} > 0$	две Ω_K	три Ω_K
$(1 - \Delta \bar{A}_r) < \bar{C}_r$, $\bar{C}_r < (1 + \Delta \bar{A}_r)$ ротор, близкий к сферическому	$\Delta \bar{I}_1 > 0$, $\Delta \bar{I}_2 < 0$	одна Ω_K	две Ω_K
$\bar{C}_r > (1 - \Delta \bar{A}_r)$, короткий ротор	$\Delta \bar{I}_{1,2} < 0$	одна Ω_K (по поперечным колебаниям)	одна Ω_K (по поперечным колебаниям)

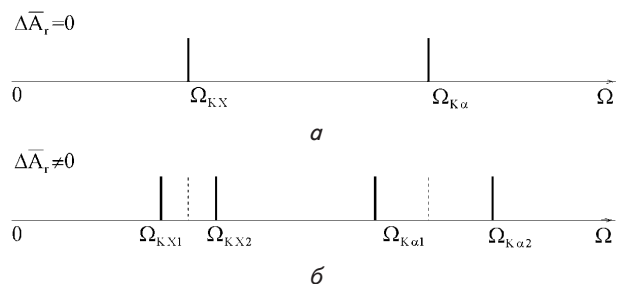


Рис. 2. Изменение спектра критических скоростей Ω_K вращения длинного ротора вследствие инерционной анизотропии $\Delta \bar{A}_r$: а – изотропный ротор; б – анизотропный ротор

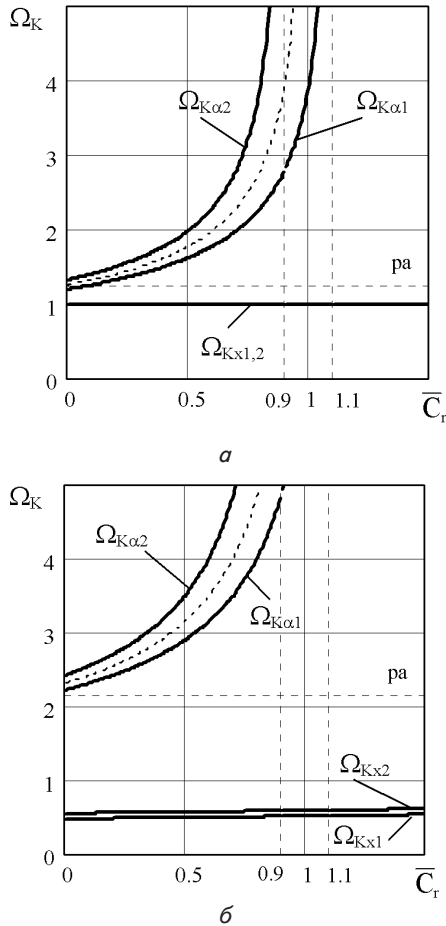


Рис. 3. Критические скорости Ω_K вращения ротора с учетом инерционной анизотропии в зависимости от типа ротора \bar{C}_r : а – симметрично установленный ротор, $\bar{l}_L=0,5, \Delta\bar{A}_r=0,1$; б – несимметрично установленный ротор, $\bar{l}_L=1,2, \Delta\bar{A}_r=0,1$; ----- – $\Omega_{K\alpha}$ для изотропного ротора, $\Delta\bar{A}_r=0$

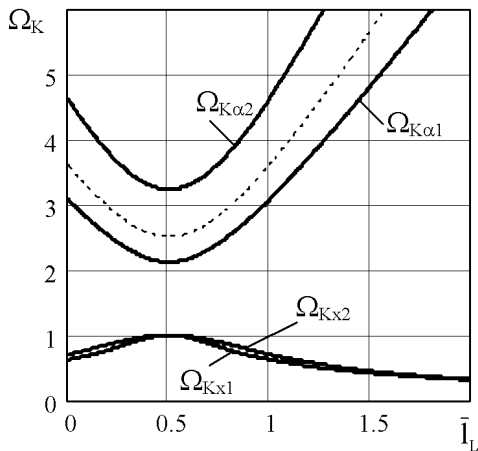


Рис. 4. Критические скорости Ω_K вращения анизотропного длинного ротора в зависимости от места его установки относительно опор \bar{l}_L ($\bar{l}_L=0,5$ – симметрично установленный ротор)

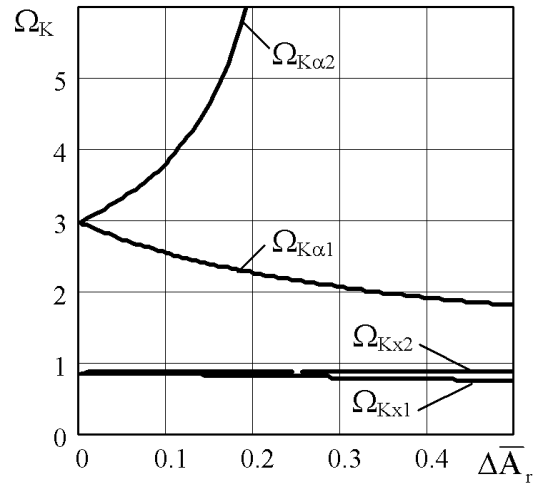


Рис. 5. Критические скорости Ω_K вращения длинного несимметрично расположенного ротора ($\bar{l}_L=0,8$) в зависимости от степени инерционной анизотропии $\Delta\bar{A}_r$

Из полученных формул (12)–(15), табл. 1 и графиков на рис. 2–5 можно заключить следующее:

1. Инерционная анизотропия приводит к удваиванию (расщеплению) количества критических скоростей по сравнению с изотропным ротором. Расщепление критической скорости $\Omega_{K\alpha}$ угловых колебаний существенно больше, чем критической скорости Ω_{Kx} поперечных колебаний при типичных значениях параметров роторной машины (рис. 3, б). При симметричном расположении ротора раздваивается только скорость $\Omega_{K\alpha}$ угловых колебаний (рис. 3, а).

2. В общем случае инерционно анизотропный ротор имеет от одной до четырех критических скоростей вращения в зависимости от типа ротора, схемы его установки на опорах и степени анизотропии. Отметим, что в случае изотропного ротора критические скорости попарно совпадают.

3. Небольшая анизотропия может вызывать существенное изменение критических скоростей $\Omega_{K\alpha}$ угловых колебаний ротора, в особенности для ротора близкого к сферическому типу (рис. 3, 5). Короткие роторы слабо чувствительны к анизотропии (только по поперечным колебаниям) в отличие от роторов длинного типа.

3.3. Устойчивость симметрично установленного анизотропного ротора

В случае симметричного расположения ротора ($\bar{l}_L=0,5$) общая система уравнений движения МС (7), (8) распадается на две независимые системы поперечных и угловых колебаний ротора, поскольку параметры связи подсистем $\bar{c}_{y\alpha}=0, \bar{h}_{y\alpha}=0$ (также (9)). Такое упрощение задачи дает возможность её полного аналитического исследования [1, 10].

Условие устойчивости угловых колебаний симметрично установленного анизотропного ротора сводится к следующему неравенству:

$$\Delta\bar{l}_1\Delta\bar{l}_2(\Omega^2 - \Omega_{y1}^2)(\Omega^2 - \Omega_{y2}^2) > 0. \tag{16}$$

Здесь $\Omega_{y1,2}$ – это границы устойчивости угловых колебаний ротора по частоте вращения, которые определяются выражением

$$\Omega_{y1,2}^2 = \frac{q_1}{2q_0} \mp \frac{1}{2q_0} \sqrt{q_1^2 - 4\bar{p}_\alpha^4 q_0}, \quad (17)$$

где $q_0 = (1 - \bar{C}_r)^2 - \Delta\bar{A}_r^2$; $q_1 = 2\bar{p}_\alpha^2(1 - \bar{C}_r) - \bar{h}_\alpha^2$; $\Omega_{y1} < \Omega_{y2}$.

Из полученного условия (16) следует, что инерционно анизотропный ротор, установленный посередине между опор, имеет следующие области устойчивости и неустойчивости по частоте вращения:

ротор устойчив при $\Omega < \Omega_{y1}$ и $\Omega > \Omega_{y2}$;

ротор неустойчив при $\Omega_{y1} < \Omega < \Omega_{y2}$. (18)

В случае отсутствия демпфирования (при $\bar{h}_\alpha = 0$) значения границ устойчивости $\Omega_{y1,2}$ совпадают с критическими скоростями угловых колебаний $\Omega_{K\alpha 1,2}$ (14) ротора. При наличии демпфирования границы устойчивости приблизительно равны критическим скоростям (при не слишком малой анизотропии ротора):

$$\Omega_{y1,2} \approx \Omega_{K\alpha 1,2}. \quad (19)$$

Таким образом, как видно из приведенных формул, инерционная анизотропия ротора приводит к тому, что возможно существование диапазона частот вращения, внутри которого ротор теряет устойчивость. Симметрично установленный ротор имеет одну область неустойчивости, лежащую внутри «расщепленных» критических скоростей угловых колебаний. Значения границ устойчивости $\Omega_{y1,2}$ и их существование зависят от параметров МС.

3. 4. Устойчивость несимметрично установленного анизотропного ротора.

При несимметричном расположении ротора относительно опор его поперечные и угловые колебания взаимосвязаны друг с другом и уравнения движения МС (1) не распадаются на независимые системы. Общее ХУ (10) после развертывания определителя преобразуется в характеристический полином (ХП) восьмой степени:

$$\sum_{i=0}^8 a_i \lambda_r^{8-i} = 0. \quad (20)$$

Высокая степень полинома (20) не дает возможности его точного аналитического исследования. Однако могут быть получены основные необходимые условия. Для этого рассмотрим условия положительности первого и последнего коэффициентов ХП (20), а именно $a_0 > 0$, $a_8 > 0$. Эти условия входят в условия Рауса-Гурвица. При этом воспользуемся для удобства тем, что «крайние» коэффициенты ХП могут быть выражены непосредственно из общего определителя (10), используя формулы: $a_0 = |\bar{M}|$; $a_8 = |\bar{K}|$.

Условие $a_0 > 0$ приводит к необходимому условию устойчивости простого вида $\Delta\bar{A}_r < 1$. Условие $a_8 = |\bar{K}| > 0$ при отсутствии демпфирования приво-

дит к следующему необходимому условию устойчивости:

$$\Delta\bar{I}_1 \Delta\bar{I}_2 (\Omega^2 - \Omega_{KX1}^2) (\Omega^2 - \Omega_{KX2}^2) \times (\Omega^2 - \Omega_{K\alpha 1}^2) (\Omega^2 - \Omega_{K\alpha 2}^2) > 0. \quad (21)$$

Здесь для получения условия (21) были использованы уже выполненные выше преобразования (11), (12). Полагаем также, что справедливы соотношения $\Omega_{KX1} < \Omega_{KX2} < \Omega_{K\alpha 1} < \Omega_{K\alpha 2}$, что характерно для типичных роторных машин. Кроме того, отметим, что в полученных условиях (21) и (16) множители $\Delta\bar{I}_1 \Delta\bar{I}_2$ могут быть опущены, поскольку изменение знака $\Delta\bar{I}_1$ сопровождается одновременным изменением знака одной из величин Ω_{Kj}^2 (в зависимости от степени анизотропии и типа ротора).

Из полученного условия (21) следует, что инерционно анизотропный ротор, установленный несимметрично, может быть неустойчив в областях, лежащей внутри «расщепленных» критических скоростей, т. е. при

$$\Omega_{K\alpha 1} < \Omega < \Omega_{K\alpha 2}; \Omega_{KX1} < \Omega < \Omega_{KX2}. \quad (22)$$

Условие устойчивости (21) является обобщением условия (16) на случай общего расположения ротора относительно опор. Как будет показано ниже, это условие является основным, хотя и приближенным.

Для уточнения условий устойчивости движения был выполнен численный анализ с помощью общего ХУ (10) при характерных диапазонах значений параметров системы. На рис. 6, а, б показан пример типичных графиков границ устойчивости, рассчитанных с помощью (10) при базовых параметрах: $\bar{C}_r = 0,75$; $\bar{p}_r = 0,4$; $\bar{I}_1 = 0,8$; $\bar{h}_x = 0,1$; $\Delta\bar{A}_r = 0,1$, при которых $\bar{p}_\alpha = 1,46$; $\bar{h}_\alpha = 0,213$; $\bar{c}_{y\alpha} = 0,75$; $\bar{h}_{y\alpha} = 0,075$. Здесь же нанесены графики критических скоростей $\Omega_{K\alpha}$ угловых колебаний по (13).

Из приведенных графиков видно, что при типичных значениях параметров роторной машины существует одна (основная) область неустойчивости, которая располагается внутри диапазона между критическими скоростями $\Omega_{K\alpha 1}$ и $\Omega_{K\alpha 2}$ угловых колебаний. Протяженность этой области определяется анизотропией ротора и другими параметрами МС. Качественно вид графиков границ устойчивости на рис. 6, а, б совпадает с таковыми для случая симметрично установленного ротора [10]. В целом с достаточной для практики точностью можно считать, что границами этой области неустойчивости являются величины $\Omega_{K\alpha 1,2}$, определяемые по формулам (13).

Наряду с этим численные расчеты показывают также, что в общем случае анизотропный несимметрично установленный ротор может иметь до трех областей неустойчивости (в отличие от симметрично установленного ротора). Помимо основной области неустойчивости между $\Omega_{K\alpha 1}$ и $\Omega_{K\alpha 2}$ могут существовать еще две узкие области: 1) между критическими скоростями Ω_{KX1} и Ω_{KX2} поперечных колебаний, что отражается полученным необходимым условием (21); 2) узкая полоса в промежутке между Ω_{KX2} и $\Omega_{K\alpha 1}$.

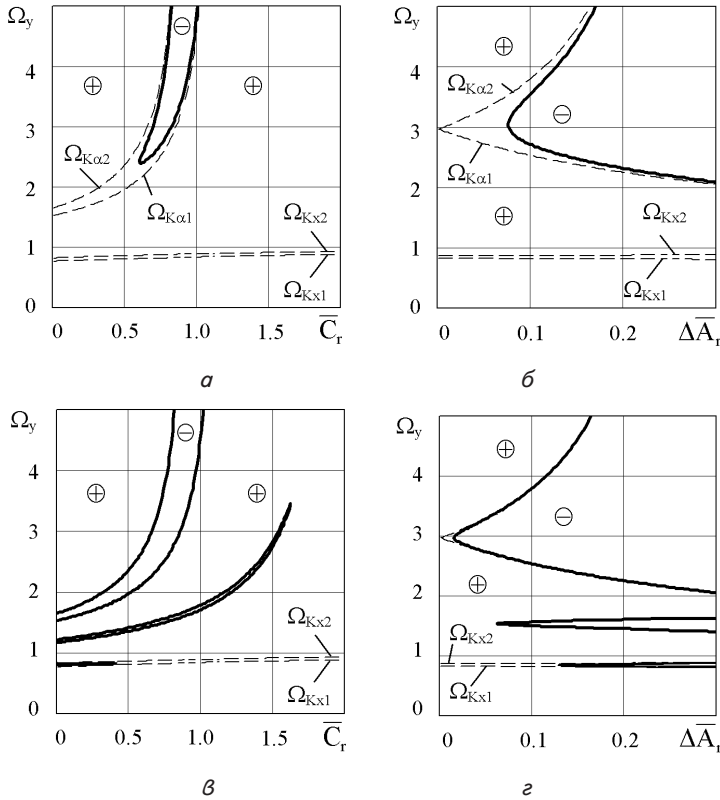


Рис. 6. Границы устойчивости Ω_y несимметрично установленного анизотропного ротора в зависимости от типа ротора \bar{C}_r и от степени инерционной анизотропии $\Delta\bar{A}_r$: а – $\Omega_y=f(\bar{C}_r)$ при $\bar{h}_x=0,1$; б – $\Omega_y=f(\Delta\bar{A}_r)$ при $\bar{h}_x=0,1$; в – $\Omega_y=f(\bar{C}_r)$ при $\bar{h}_x=0,02$; г – $\Omega_y=f(\Delta\bar{A}_r)$ при $\bar{h}_x=0,02$; (+) – устойчивость; (–) – неустойчивость

Следует иметь в виду, однако, что появление двух дополнительных областей неустойчивости возможно лишь при нетипичных значениях параметров, а именно – очень низкое демпфирование и очень большая степень анизотропии. В качестве примера на рис. 6, в, г показаны графики границ устойчивости при тех же параметрах, за исключением параметра $\bar{h}_x=0,02$ (т. е. при почти нулевом трении). Расчеты показывают, что естественного демпфирования в типичной роторной машине достаточно, что ликвидировать указанные дополнительные области неустойчивости.

Графики на рис. 7, а, б показывают особенности потери устойчивости МС (во вращающихся координатах) инерционно анизотропного ротора. Расчет выполнялся на основе характеристического уравнения (10) для симметрично установленного ротора при указанных выше исходных данных.

Из графиков виден весьма своеобразный характер потери устойчивости угловых колебания ротора. Потеря устойчивости происходит неколебательным образом (апериодически). Т. е. МС не раскачивается (как обычно), а перманентно уходит от установившейся траектории движения. На границе устойчивости имеют место нулевые корни ХУ, а внутри области неу-

стойчивости имеются положительные чисто вещественные собственные числа.

Из проведенного в пунктах 3.3, 3.4 анализа устойчивости инерционно анизотропного ротора можно заключить следующее.

1. Инерционная анизотропия ротора вызывает появление областей неустойчивости движения. Границы областей неустойчивости и их количество зависят от схемы установки ротора, типа ротора и параметров системы.

2. При симметричном расположении ротора между опорами существует одна область неустойчивости, которая располагается между «расщепленными» скоростями вращения угловых колебаний $\Omega_{K\alpha 1,2}$ (16)–(18). Границы устойчивости близки к значениям критических скоростей угловых колебаний, а при отсутствии трения в системе, равны им. Область неустойчивости существует для роторов, близких к сферическому типу, и длинных роторов. Устойчивость роторов короткого типа не чувствительна к инерционной анизотропии.

3. При несимметричном расположении ротора может существовать до трех областей неустойчивости. Основная область неустойчивости качественно распологается так же как в случае симметрично установленного ротора (рис. 7). Однако в случае очень низкого демпфирования и/или очень большой степени анизотропии ротора могут существовать еще две узкие области: 1) между критическими скоростями Ω_{Kx1} и Ω_{Kx2} поперечных колебаний; 2) узкая полоса в промежутке между Ω_{Kx2} и $\Omega_{K\alpha 1}$. При этом появление двух дополнительных областей неустойчивости возможно лишь при нехарактерных значениях параметров МС и естественного демпфирования в типичной роторной машине достаточно, чтобы ликвидировать указанные дополнительные области неустойчивости.

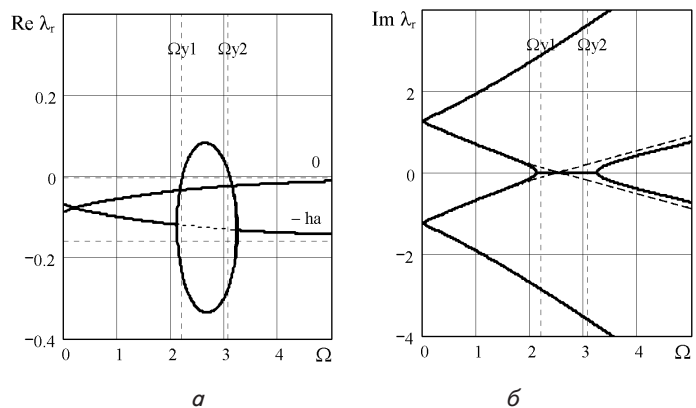


Рис. 7. Изменение вещественных частей $Re \lambda_r$ собственных чисел системы и собственных частот $Im \lambda_r$ угловых колебаний симметрично установленного ротора при потере устойчивости: а – $Re \lambda_r = f(\Omega)$; б – $Im \lambda_r = f(\Omega)$; ----- – ротор с инерционной анизотропией; - - - - - изотропный ротор

4. Демпфирование в МС сужает области неустойчивости вплоть до их исчезновения.

5. Потеря устойчивости происходит неколебательным образом (апериодически). Т. е. МС не раскачивается, а перманентно уходит от установившейся траектории движения.

4. Выводы

1. В работе получено точное аналитическое выражение для критических скоростей анизотропного ротора, совершающего пространственное движение и имеющего четыре степени свободы. Анализ показал, что инерционная анизотропия ротора в общем случае приводит к удвоению количества критических скоростей вращения ротора. Такой ротор имеет от одной до четырех критических скоростей прямой прецессии в зависимости от типа ротора, схемы его установки на опорах и степени анизотропии. Небольшая анизотропия может вызы-

вать существенное изменение критических скоростей угловых колебаний ротора, в особенности для ротора близкого к сферическому типу.

2. Неодинаковость моментов инерции ротора относительно его поперечных осей вызывает появление областей неустойчивости движения. В работе получены основные необходимые условия устойчивости в аналитическом виде. Показано, что при несимметричном расположении ротора может существовать до трех областей неустойчивости. Границы основной области неустойчивости близки к двум «расщепленным» критическим скоростям угловых колебаний.

Таким образом, полученные выражения позволяют количественно оценить значения критических скоростей и границ устойчивости инерционно анизотропного ротора. Это, в свою очередь, дает возможность более обоснованно конструировать и назначать рациональные технологические допуски на изготовление, сборку и монтаж роторов.

Литература

1. Диментберг, Ф. М. Колебания машин [Текст] / Ф. М. Диментберг, К. Т. Шаталов, А. А. Гусаров. – М: Машиностроение, 1964. – 308 с.
2. Вибрации в технике [Текст]: справ. Том 3 / М.: Машиностроение, 1980. – 544 с.
3. Childs, D. Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling and Analysis [Text] / D. Childs. – New York: Wiley, 1993. – 476 p.
4. Кренделл, С. Об устойчивости вращения ротора, обладающего несимметрией инерции и несимметрией жесткости вала [Текст] / С. Кренделл, П. Броузенс // Прикладная механика. – 1961. – № 4. – С. 97–101.
5. Black, H. Vibration of a rotating asymmetric shaft supported in asymmetric bearing [Text] / H. Black, A. Ternan // J. Mech. Eng. Sci. – 1968. – Vol. 10, № 3. – P. 252–261.
6. Sanches, L. Instability zones for isotropic and anisotropic multibladed rotor configurations [Text] / L. Sanches, G. Michon, A. Berlioz, D. Alazard // Mechanism and Machine Theory. – 2011. – Vol. 46, Issue 8. – P. 1054–1065.
7. Genta, G. Whirling of unsymmetrical rotors: a finite element approach based on complex coordinates [Text] / G. Genta // Journal of Sound and Vibration. – 1988. – Vol. 124, Issue 1. – P. 27–53.
8. Genta, G. Dynamics of Rotating Systems [Text] / G. Genta. – New York: Springer, 2005. – 658 p.
9. Lazarus, A. A 3D finite element model for the vibration analysis of asymmetric rotating machines [Text] / A. Lazarus, B. Prabel, D. Combescure // Journal of Sound and Vibration. – 2010. – Vol. 329. – P. 3780–3797.
10. Горбенко, А. Н. О допустимом уровне инерционной анизотропии гироскопического ротора [Текст] / А. Н. Горбенко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 7 (104). – С. 61–66.
11. Филимонихин, Г. Б. Влияние массы шаров автобалансира на структуру уравнений движения двухпорного ротора [Текст] / Г. Б. Филимонихин, А. Н. Горбенко // Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении: Украинский межведом. н.-техн. сб. – 2011. – Вып. 45. – С. 478–488.
12. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.