

УДК 539.3

МЕТОД НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. И. Александров

Кандидат технических наук, доцент*

E-mail: heepper@gmail.com

Ю. М. Стреляев

Старший преподаватель*

E-mail: strelkiny@gmail.com

*Кафедра математического анализа

Запорожский национальный университет

ул. Жуковского, 66,

г. Запорожье, Украина, 69600

Запропоновано метод наближеного розв'язування просторової задачі про контакт лінійно-пружних тіл з урахуванням тертя Кулона та історії прикладання зовнішнього навантаження. Відмітна особливість методу полягає в тому, що розглядувану контактну задачу зведено до послідовного розв'язання низки систем межових нелінійних інтегральних рівнянь, які відповідають різним крокам навантаження. Отримано чисельний розв'язок задачі про контактну взаємодію пружної кулі з пружним тілпростором

Ключові слова: пружне тіло, контактна задача, тертя Кулона, інтегральне рівняння, ітераційний метод

Предложен метод приближенного решения пространственной задачи о контакте линейно-упругих тел с учетом кулонова трения и истории приложения внешней нагрузки. Отличительная особенность метода состоит в том, что рассматриваемая контактная задача сводится к последовательному решению нескольких систем граничных нелинейных интегральных уравнений, которые соответствуют различным шагам нагружения. Получено численное решение задачи о контактном взаимодействии упругого шара с упругим полупространством

Ключевые слова: упругое тело, контактная задача, трение Кулона, интегральное уравнение, итерационный метод

1. Введение

При исследовании на прочность сложных механических систем часто возникает необходимость определять нормальные и касательные напряжения, возникающие во взаимодействующих элементах этих систем. Использование геометрических и физических нелинейностей при моделировании поведения взаимодействующих тел, как правило, существенно усложняет поиск решений соответствующих контактных задач и затрудняет анализ напряженно-деформированного состояния тел. В таких случаях для определения контактных напряжений чаще всего приходится использовать численные методы, поскольку аналитические решения контактных задач известны лишь для отдельных исключительных случаев. Таким образом, особо актуальным направлением в теории контактных задач является разработка эффективных, универсальных и простых в реализации приближенных методов решения таких задач.

2. Анализ исследований и публикаций

В настоящее время для приближенного решения задач о контакте упругих тел с учётом трения используются различные численные методы, основанные на вариационной постановке задачи [1, 2] и на её сведении к различным операторным уравнениям [3–10].

Использование таких уравнений для моделирования контактного взаимодействия упругих тел, во-первых, позволяет избавиться от основной трудности реализации вариационных методов, заключающейся в необходимости рассматривать очень сложные задачи нелинейного программирования [1]. Во-вторых, оно открывает возможность применять современные достижения нелинейного анализа и теории операторов как для доказательства теорем существования решений контактных задач, так и для разработки эффективных итерационных процедур [4, 9] приближённого отыскания этих решений.

Большинство известных попыток использования нелинейных граничных интегральных уравнений в контактной механике [3–8] ограничивается рассмотрением контактных задач без учёта трения [3–5], либо задач, в которых учёт трения осуществляется при упрощённых граничных условиях, соответствующих полному проскальзыванию тел [6, 7]. Нелинейные интегральные уравнения, использованные в работах [9, 10], позволяют (в отличие от других аналогичных уравнений) учитывать вызванное трением частичное сцепление и проскальзывание на поверхности контакта. Кроме того, они позволяют учитывать и историю приложения внешней нагрузки в процессе взаимодействия тел. Поэтому такие уравнения могут стать основой для создания численного метода решения контактных задач, в постановке которых отсутствуют обычно принимаемые упрощения [3–8].

3. Цель и задачи исследования

Целью исследования является разработка невариационного метода приближенного решения контактных задач, для которых учитывается история приложения внешней нагрузки, и закон трения Кулона принят в неупрощенной классической формулировке.

Задачами, подлежащими решению для достижения данной цели, являются:

- получение граничных нелинейных интегральных уравнений, описывающих контактное взаимодействие тел;
- дискретизация этих уравнений;
- разработка итерационного процесса для получения решений дискретных аналогов таких уравнений.

4. Постановка контактной задачи

Предположим, что каждое из двух линейно-упругих тел на некоторой части своей поверхности сцеплено с абсолютно твёрдым телом, которое будем называть жесткой опорой. Первоначально касаясь в точке, тела входят в контакт за счет того, что опора верхнего тела совершает во внешней системе координат h_{ij} перемещение $\bar{\gamma}(t)$, зависящее от времени t , в то время как опора нижнего тела остается неподвижной (рис. 1). Будем считать, что вектор-функция $\bar{\gamma}(t)$ медленно изменяется с возрастом t от 0 до фиксированного значения $T > 0$ и пренебрегать инерционными и волновыми эффектами. Предположим, что процесс сжатия тел сопровождается поверхностным трением, подчиняющимся закону Кулона. Будем ещё полагать, что в момент времени T после установившегося равновесия поверхность соприкосновения тел оказывается плоской и содержится в ограниченной области Ω , принадлежащей общей для тел касательной плоскости Π , проходящей через точку их начального касания.

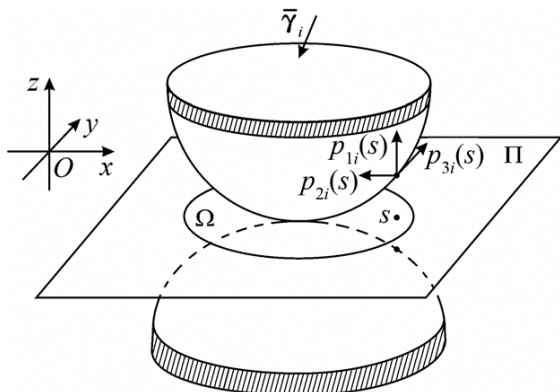


Рис. 1. Схема взаимодействия упругих тел

Разобьём отрезок $[0, T]$ системой точек $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Процесс нагружения будем считать дискретным, рассматривая его лишь в фиксированные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$. Для того чтобы сформулировать условия контактного взаимодействия тел, введем определённую на Ω вектор-функцию $p_i(s) = (p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s))$, задающую распределение удельной контактной нагрузки, пере-

даваемой от нижнего тела к верхнему через область Ω на i -ом шаге нагружения, а также определённую на Ω вектор-функцию $v_i(s) = (v_{1i}(s), v_{2i}(s), v_{3i}(s))$, задающую перемещения поверхностных точек верхнего тела относительно противоположащих поверхностных точек нижнего тела на i -ом шаге нагружения (здесь и ниже номера 1–3 соответствуют направлениям осей z, x и y , а индекс i принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$). При помощи этих вектор-функций можно выразить условия контактирования тел соотношениями [11]:

$$\begin{cases} p_{1i}(s) \geq 0; v_{1i}(s) \geq 0; p_{1i}(s) \cdot v_{1i}(s) = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i}(s); \\ \sqrt{[\dot{v}_{2i}(s)]^2 + [\dot{v}_{3i}(s)]^2} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot \dot{v}_{2i}(s) = 0; \\ \sqrt{[\dot{v}_{2i}(s)]^2 + [\dot{v}_{3i}(s)]^2} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot \dot{v}_{3i}(s) = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1)$$

где положительная константа μ есть коэффициент трения и $\dot{v}_{Ti}(s) = (\dot{v}_{2i}(s), \dot{v}_{3i}(s))$ есть скорость относительного проскальзывания тел в точке $s \in \Omega$ на i -ом шаге нагружения. Первое из соотношений (1) выражает знакопостоянство контактного давления, второе означает отсутствие взаимного проникания тел и третье означает отсутствие контактного давления за пределами площади контакта. Последние три соотношения системы (1) выражают закон трения Кулона.

Предположим, что $p_i(s)$ и $v_i(s)$ являются элементами гильбертова пространства $L_2^3(\Omega)$ [9] вектор-функций, компоненты которых принадлежат пространству $L_2(\Omega)$ [9]. Тогда, если известны линейные ограниченные операторы $A_{kj}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, являющиеся операторами влияния поверхностных нагрузок на поверхностные перемещения для системы взаимодействующих тел в статической задаче $(k, j = \overline{1, 3})$, то связь между $p_i(s)$ и $v_i(s)$ можно выразить равенствами

$$v_{ki}(s) = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(p_{ji})_s - f_{ki}(s) = F_k(p_i, \Delta_{ki})_s \quad \forall k = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

где вектор-функция $f_i(s) = (f_{1i}(s), f_{2i}(s), f_{3i}(s))$ есть элемент пространства $L_2^3(\Omega)$, для которого $f_{1i}(s) = -\delta_0(s) - \Delta_{1i}$, $f_{2i}(s) = -\Delta_{2i}$, $f_{3i}(s) = -\Delta_{3i}$. Здесь $(\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i}) = \bar{\gamma}(t_i) = \bar{\gamma}_i$ и $\delta_0(s)$ есть зазор между телами в момент их начального касания $(\delta_0(s) \in L_2(\Omega))$.

Для определения входящих в систему (1) скоростей $\dot{v}_{2i}(s), \dot{v}_{3i}(s)$ воспользуемся конечно-разностными соотношениями:

$$\dot{v}_{ki}(s) = \frac{v_{ki}(s) - v_{k, i-1}(s)}{h_i}; \quad i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{2, 3};$$

в которых $h_i = t_i - t_{i-1}$. Эти соотношения можно записать в виде

$$\dot{v}_{ki}(s) = \frac{1}{h_i} \cdot F_k(p_i, \tilde{\Delta}_{ki})_s, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{2, 3}; \quad (3)$$

где $\tilde{\Delta}_{ki}(s) = \Delta_{ki} - F_k(p_{i-1}, \Delta_{k i-1})_s$ и выражение $F_k(p_i, \Delta_{ki})_s$ определяется последним из равенств (2). Использование равенств (3) при $i=1$ возможно, если известны числа $\Delta_{10}, \Delta_{20}, \Delta_{30}$ и функции $p_{10}(s), p_{20}(s), p_{30}(s)$. Эти числа и эти функции будем задавать в соответствии с начальными условиями контактной задачи, исходя из того, что в момент времени $t=0$ все три компоненты вектора $\bar{\gamma}(t)$ равны нулю. Это означает, что $\Delta_{10} = \Delta_{20} = \Delta_{30} = 0$ и функции $p_{10}(s), p_{20}(s), p_{30}(s)$ тождественно равны нулю на Ω .

Используя равенства (3), запишем систему соотношений (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} p_{1i}(s) \geq 0; F_1(p_i, \Delta_{1i})_s \geq 0; p_{1i}(s) \cdot F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0; \\ \sqrt{p_{2i}^2(s) + p_{3i}^2(s)} \leq \mu \cdot p_{1i}(s); \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{2i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s = 0; \\ \sqrt{F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s} \cdot p_{3i}(s) + \mu \cdot p_{1i}(s) \cdot F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0; \\ s \in \Omega; i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, рассматриваемая контактная задача на i -ом шаге нагружения заключается в нахождении неизвестных функций $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ пространства $L_2(\Omega)$, которые почти всюду на Ω удовлетворяют системе соотношений (4) при соответствующем значении i . Как следует из формул (3), функции $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ можно определять из системы (4) лишь при условии, что эта система была решена ранее на первом, втором, ..., $(i-1)$ -ом шагах нагружения относительно вектор-функций $p_1(s), p_2(s), \dots, p_{i-1}(s)$ соответственно. Окончательным решением рассматриваемой квазистатической контактной задачи естественно считать функции $p_{1n}(s), p_{2n}(s), p_{3n}(s)$, которые удовлетворяют соотношениям (4) для $i=n$.

Если удовлетворяющая соотношениям (4) при фиксированном i вектор-функция $p_i(s) \in L_2^3(\Omega)$ найдена, то с её помощью можно вычислить значения сил и моментов, приложенных к жесткой опоре верхнего тела на i -ом шаге нагружения (после установившегося равновесия на этом шаге), а также найти размеры и формы площадки контакта $\Omega_0^{(i)}$, зоны сцепления $\Omega_C^{(i)}$ и зоны проскальзывания $\Omega_{\Pi}^{(i)}$ на этом же шаге нагружения из следующих очевидных соотношений:

$$\begin{aligned} \Omega_0^{(i)} &= \{s \in \Omega \mid F_1(p_i, \Delta_{1i})_s = 0\}, \\ \Omega_C^{(i)} &= \{s \in \Omega_0^{(i)} \mid F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s = 0\}, \\ \Omega_{\Pi}^{(i)} &= \{s \in \Omega_0^{(i)} \mid F_2^2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s + F_3^2(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s > 0\}, \end{aligned}$$

где выражения $F_1(p_i, \Delta_{1i})_s, F_2(p_i, \tilde{\Delta}_{2i})_s, F_3(p_i, \tilde{\Delta}_{3i})_s$ определяются в соответствии с равенствами (2).

5. Метод решения контактной задачи

Для неизвестной вектор-функции $p_i(s) \in L_2^3(\Omega)$ система соотношений (4) эквивалентна нелинейному операторному уравнению [9]

$$p_i = G_{\mu} \left(p_i - E \cdot (A(p_i) - \tilde{f}_i) \right), \quad (5)$$

в котором E есть произвольная положительная константа,

$$\tilde{f}_i(s) = (\tilde{f}_{1i}(s), \tilde{f}_{2i}(s), \tilde{f}_{3i}(s)) = (-\delta_0(s) - \Delta_{1i}, -\tilde{\Delta}_{2i}(s), -\tilde{\Delta}_{3i}(s))$$

и линейный ограниченный оператор влияния $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ определён соотношениями

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = A(x), y_k = \sum_{j=1}^3 A_{kj}(x_j) \quad \forall k = \overline{1, 3}. \end{cases} \quad (6)$$

Непрерывный нелинейный оператор $G_{\mu}: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ задан равенствами

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); y = G_{\mu}(x), \\ y_1(s) = h(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu \cdot h(x_1(s))), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu \cdot h(x_1(s))), \quad s \in \Omega; \end{cases}$$

в которых функции h и q имеют вид

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \\ q(x, y, z) &= \begin{cases} x, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases} \end{aligned}$$

В большинстве важных для практики случаев входящие в соотношения (6) линейные ограниченные операторы $A_{kj}: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ допускают интегральное представление

$$A_{kj}(x)_s = \int_{\Omega} K_{kj}(s, s') \cdot x(s') ds', \quad (k, j = \overline{1, 3}), \quad (7)$$

а операторное уравнение (5) представляет собой систему трёх нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s) \in L_2(\Omega)$.

Метод численного решения операторного уравнения (5), детально изложенный в работах [9, 10], состоит в регуляризации этого уравнения, дискретизации регуляризованного уравнения и использовании итерационных процессов для получения решения дискретного аналога регуляризованного уравнения. Такой дискретный аналог можно получить путем задания области Ω в виде открытого квадрата, ограниченного отрезками прямых, параллельных координатным осям некоторой декартовой системы координат $x'Oy'$ введенной на общей для взаимодействующих тел касательной плоскости так, что оси x', y' сонаправлены с осями x, y . Для натурального числа l разобьём эту область Ω на l^2 непересекающихся квадратных

областей $\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_{3^2}^1$ равной площади, ориентированных подобно Ω . Полагая, что неизвестные функции $p_{1i}(s), p_{2i}(s), p_{3i}(s)$ принимают на каждом граничном элементе ω_k^1 постоянные значения $x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k}$, можно отыскание приближенного решения уравнения (5) свести к нахождению неизвестных числовых параметров x_1, x_2, \dots, x_{3^2} , удовлетворяющих следующей системе 3^2 скалярных уравнений:

$$\begin{cases} x_{3k-2} = h(x_{3k-2} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3^2} a_{3k-2j} \cdot x_j - b_{3k-2}^{(i)})); \\ x_{3k-1} = q(x_{3k-1} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3^2} a_{3k-1j} \cdot x_j - b_{3k-1}^{(i)}), \\ \quad x_{3k} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3^2} a_{3kj} \cdot x_j - b_{3k}^{(i)}, \mu \cdot h(x_{3k-2})); \\ x_{3k} = q(x_{3k} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3^2} a_{3kj} \cdot x_j - b_{3k}^{(i)}), \\ \quad x_{3k-1} - E \cdot (\sum_{j=1}^{3^2} a_{3k-1j} \cdot x_j - b_{3k-1}^{(i)}, \mu \cdot h(x_{3k-2})); \quad k = \overline{1, 1^2}. \end{cases} \quad (8)$$

При определённых допущениях [9] входящие в систему (8) числовые параметры $a_{kj}, b_k^{(i)}$ можно задавать равенствами

$$\begin{cases} b_{3k-2}^{(i)} = -\delta_0(s_k^1) - \Delta_{1i}, \quad b_{3k-1}^{(i)} = -\tilde{\Delta}_{2i}(s_k^1), \quad b_{3k}^{(i)} = -\tilde{\Delta}_{3i}(s_k^1) \quad \forall k = \overline{1, 1^2}; \\ a_{3k-j \ 3k-j} = \varepsilon + \int_{\omega_k^1} K_{3-j \ 3-j}(s_k^1, s) ds \quad \forall j = \overline{0, 2}; \quad \forall k = \overline{1, 1^2}; \\ a_{3k-2 \ 3k-1} = a_{3k-2 \ 3k} = a_{3k-1 \ 3k-2} = a_{3k-1 \ 3k} = a_{3k \ 3k-2} = a_{3k \ 3k-1} = 0 \quad \forall k = \overline{1, 1^2}; \\ a_{3k-m \ 3j-g} = \text{mes}(\omega_j^1) \cdot K_{3-m \ 3-g}(s_k^1, s_j^1) \quad \forall k = \overline{1, 1^2}; \quad m, g = \overline{0, 2}; \end{cases} \quad (9)$$

где $\varepsilon > 0$ есть параметр регуляризации, s_j^1 есть центр квадрата ω_j^1 и $\text{mes}(\omega_j^1)$ есть площадь ω_j^1 .

Полагая в каждом j -ом уравнении системы (8) значение входящей в него положительной константы E равным E_j , зададим все значения E_j следующим образом:

$$E_{3j-2} = \frac{1}{a_{3j-2 \ 3j-2}}, \quad E_{3j-1} = \frac{1}{a_{3j-1 \ 3j-1}}, \quad E_{3j} = \frac{1}{a_{3j \ 3j}} \quad \forall j = \overline{1, 1^2}.$$

Тогда в правой части каждого j -ого уравнения системы (8) будет отсутствовать неизвестное x_j и для решения этой системы можно предложить итерационный процесс

$$\begin{cases} (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{3^2}^{(0)}) \in R^{3^2}; \\ x_{3j-2}^{(m+1)} = h(\gamma_j^{(m)}), \\ x_{3j-1}^{(m+1)} = q(\alpha_j^{(m)}, \beta_j^{(m)}, \mu \cdot h(x_{3j-2}^{(m)})), \\ x_{3j-1}^{(m+1)} = q(\beta_j^{(m)}, \alpha_j^{(m)}, \mu \cdot h(x_{3j-2}^{(m)})), \quad j = \overline{1, 1^2}; \quad m = \overline{0, 1, 2, \dots}, \end{cases} \quad (10)$$

где R^{3^2} есть 3^2 -мерное евклидово пространство, начальный вектор $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{3^2}^{(0)})$ есть приближённое решение системы типа (8), соответствующей $(i-1)$ -му

шагу нагружения, и величины $\gamma_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)}, \beta_i^{(m)}$ определяются равенствами:

$$\begin{cases} \gamma_j^{(m)} = \frac{1}{a_{3j-2 \ 3j-2}} \left(-\sum_{k=1}^{3j-3} a_{3j-2 \ k} \cdot x_k^{(m+1)} - \sum_{k=3j-1}^{3^2} a_{3j-2 \ k} \cdot x_k^{(m)} + b_{3k-2}^{(i)} \right), \\ \alpha_j^{(m)} = \frac{1}{a_{3j-1 \ 3j-1}} \left(-\sum_{k=1}^{3j-2} a_{3j-1 \ k} \cdot x_k^{(m+1)} - \sum_{k=3j}^{3^2} a_{3j-1 \ k} \cdot x_k^{(m)} + b_{3k-1}^{(i)} \right), \\ \beta_j^{(m)} = \frac{1}{a_{3j \ 3j}} \left(-\sum_{k=1}^{3j-1} a_{3j \ k} \cdot x_k^{(m+1)} - \sum_{k=3j+1}^{3^2} a_{3j \ k} \cdot x_k^{(m)} + b_{3k}^{(i)} \right). \end{cases} \quad (11)$$

Очевидно, что итерационный процесс (10)–(11), который построен по аналогии с процессом Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений, может сходиться в пространстве R^{3^2} лишь к такому элементу, который является решением системы уравнений (8). Хотя обосновать сходимость этого процесса весьма сложно, но при многократном его использовании для решения различных контактных задач [10] не выявлено случаев, в которых бы не удалось получить приближённое решение с достаточной степенью точности.

6. Численное решение задачи о вдавливании упругого шара в упругое полупространство

Предложенным методом было получено численное решение пространственной квазистатической контактной задачи о взаимодействии упругого шара радиуса 0,3 м с упругим полупространством. Процесс нагружения тел был осуществлён за $n=20$ шагов в соответствии со следующим характером изменения относительных жёстких смещений $\Delta_{1i}, \Delta_{2i}, \Delta_{3i}$ этих тел, выраженных в метрах:

$$\Delta_{1i} = -0,0000035 \cdot i, \quad \Delta_{2i} = \Delta_{3i} = 0, \quad i = \overline{1, 20}.$$

Такая история нагружения соответствует действию на шар возрастающей сжимающей силы при отсутствии сдвигающих сил.

Модули Юнга E_1, E_2 и коэффициенты Пуассона ν_1, ν_2 шара и полупространства таковы: $E_1 = 3 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 10^5$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$. Коэффициент трения $\mu = 0,12375$. Значение безразмерного параметра β , определяемого согласно [12] формулой

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_1 \cdot (1 - 2\nu_2)(1 + \nu_2) - E_2 \cdot (1 - 2\nu_1)(1 + \nu_1)}{E_1 \cdot (1 - \nu_2^2) + E_2 \cdot (1 - \nu_1^2)},$$

составляет для рассматриваемой контактной задачи 0,1875. Отношение $\frac{\mu}{\beta} = 0,66$.

Численные результаты получены с использованием поверхностной сетки, содержащей в себе $41 \times 41 = 1681$ квадратных граничных элементов одинаковой пло-

щадки ($l=41$, $\text{mes}(\omega_j^l)=6,25 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2$). Для вычисления элементов a_{kj} матрицы податливости использовались соотношения (9), в которых функции $K_{jm}(s,s')$, входящие также в равенства (7), задавались при помощи формул Буссинеска-Черутти, а значение ϵ определялось соотношением:

$$\epsilon = 10^{-1} \cdot \int_{\omega_k^l} K_{11}(s_j^l, s) ds.$$

Распределение удельной контактной нагрузки по граничным элементам сетки найдено при помощи итерационного процесса (10)–(11).

Полученные на двадцатом шаге нагружения значения напряжений τ_{zx} , действующих в точках поверхности шара, соприкасающихся с полупространством по оси x' , сопоставлялись с результатами решения соответствующей осесимметричной контактной задачи, приведенной в работе [12] для случая $\mu/\beta=0,66$. В табл. 1 показана зависимость величины $\tau_{zx}/(\beta \cdot p_{\text{max}})$ от параметра x'/a (первая строка таблицы соответствует решению [12], вторая – полученному численному решению на двадцатом шаге нагружения). Здесь символ p_{max} обозначает максимальное значение контактного давления, а символ a – радиус площадки контакта.

Таблица 1

Зависимость касательных напряжений от расстояния

x'/a	0,00	0,11	0,22	0,33	0,44	0,55	0,66	0,77	0,88	0,99
1	0,00	0,18	0,29	0,37	0,43	0,47	0,48	0,43	0,33	0,09
2	0,00	0,21	0,30	0,39	0,45	0,49	0,48	0,41	0,31	0,09

Данные, приведенные в таблице, показывают хорошее соответствие сравниваемых величин, что свидетельствует о корректности предложенного метода решения контактной задачи.

7. Выводы

В настоящей статье предложен метод приближенного решения трёхмерной квазистатической контактной задачи о взаимодействии линейно-упругих тел при наличии кулонова трения между ними.

Новизна этого метода состоит в том, что все этапы исследования процесса взаимодействия тел, начиная от постановки контактной задачи и заканчивая получением её решения, выполнены в рамках теории нелинейных граничных интегральных уравнений и имеют строгое математическое обоснование. Выполненная апробация метода свидетельствует о его корректности.

Литература

1. Кравчук, А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития [Текст] / А. С. Кравчук // Прикл. математ. и механика. – 2009. – Вып. 73, № 3. – С. 492–502.
2. Reina, S. A quadratic programming formulation for the solution of layered elastic contact problems: Example applications and experimental validation [Text] / S. Reina, D. Dini, D. A. Hills, Y. Lida // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2011. – Vol. 30, Issue 3. – P. 236–247.
3. Галанов, Б. А. О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел [Текст] / Б. А. Галанов // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1981. – № 5. – С. 61–67.
4. Галанов, Б. А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта [Текст] / Б. А. Галанов // Прикл. математ. и механика. – 1985. – Т. 49, Вып. 5. – С. 827–835.
5. Александров, В. М. Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта [Текст] / В. М. Александров, J. J. Kalker, Д. А. Пожарский // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 1999. – № 4. – С. 51–55.
6. Александров, В. М. Трёхмерные контактные задачи при учёте трения и нелинейной шероховатости [Текст] / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // Прикл. математ. и механика. – 2004. – Т. 68, Вып. 3. – С. 516–527.
7. Чебаков, М. И. Трёхмерная контактная задача для слоя с учётом сил трения в области контакта [Текст] / М. И. Чебаков // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2002. – № 6. – С. 59–68.
8. Sundaram, Naravan Mechanics of advancing pin-loaded contact with friction [Text] / Naravan Sundaram, T. N. Farris // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2010. – Vol. 58, Issue 11. – P. 1819–1833.
9. Александров, А. И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними [Текст] / А. И. Александров // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2013. – Т.56, № 3. – С. 29–42.
10. Александров, А. И. Решение задач о контакте упругих тел с использованием нелинейных интегральных уравнений [Текст] / А. И. Александров // Доп. Національної академії наук України. – 2012. – № 11. – С. 47–52.
11. Kalker, J. J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies [Text] / J. J. Kalker // ZAMM. – 1977. – Т. 57, № 5. – P. T3–T17.
12. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия [Текст] / Пер. с англ. В. Э. Наумова, А. А. Спектора под ред. Р. В. Гольдштейна. – М.: Мир, 1989. – 510 с.