У статті досліджується задача про сейсмостійкість та власні коливання тришарових неоднорідних ортотропних прямокутних пластинок, шари яких виготовлені з різних неперервно неоднорідних матеріалів. Використовуючи гіпотези Кірхгофа - Лява для всієї товщини елемента, отримані системи рівнянь руху пластинки. У разі шарнірного закріплення країв пластинки побудовано рішення задачі і знайдена формула для визначення частоти власних коливань пластинки

Ключові слова: тришаровий, ортотропні пластинки, неоднорідний, пружні характеристики, коливання, амплітудно-частотні характеристики

В статье исследуется задача о сейсмостойкости и собственных колебаниях трехслойных неоднородных ортотропных прямоугольных пластинок, слои которых изготовлены из различных непрерывно неоднородных материалов Используя гипотезы Кирхгофа-Лява для всей толщины элемента, получены системы уравнений движения пластинки. В случае шарнирного закрепления краев пластинки построено решение задачи и найдена формула для определения частоты собственных колебаний пластинки

Ключевые слова: трехслойный, ортотропные пластинки, неоднородный, упругие характеристики, колебание, амплитудно-частотные характеристики

УДК 539.3

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ И СЕЙСМОСТОЙКОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

С. Н. Гараисаев
Аспирант
Кафедра «Теоретическая и строительная механика»
Азербайджанский архитектурно-строительный университет
ул. А. Султанова, 5, г. Баку, Азербайджан, Аз1073
E-mail: fisayev@qu.edu.az

1. Введение

Как известно, в различных отраслях техники – машиностроении, судостроении, строительстве сооружений различного назначения широко используются элементы конструкции типа тонкостенных пластин и оболочек различного очертания.

Последние годы большое применение получили многослойные конструкции. Это, в первую очередь, связано с интенсивным использованием в промышленности новых искуственных материалов. Применение в строительстве и других областях техники подобных конструкций ставит перед инженером-исследователем повышенные требования к оценке прочности, устойчивости и амплитудно-частотных характеристик, так как при различных условиях работы и режимах нагружения возникает ряд вопросов, которые требуют решения новых задач напряженно-деформированного состояния и определения критических параметров [1].

Поэтому возникает необходимость учета влияния реальных физико-механических свойств материала слоев конструкции, режима и условия их работы и построения новых эффективных методик расчета, в которых учитываются вышеуказанные специфические особенности [2].

Многие вопросы прочности, устойчивости и колебаний многослойных элементов конструкций, работающих в пределах упругости, в литературе исследованы достаточно, однако в этих работах в основном рассмотрены элементы конструкции с изотропными однородными слоями [3].

Во многих случаях слоистые конструкции изготавливаются из анизотропных неоднородно-упругих и неупругих материалов. Причиной проявления неоднородности являются технология изготовления конструкций, влияние нейтронного облучения и элементарных частиц, термическая обработка, неоднородность составов и т. д.

В зависимости от процесса изготовления и геометрии конструкции, упругие характеристики могуть зависеть от одной или нескольких координат точек тела.

Вопросы устойчивости и колебаний слоистых конструкций с учетом неоднородности в литературе изучены недостаточно. Поэтому в данной статье приводится постановка и решение задачи о колебании и сейсмостойкости трехслойных неоднородных ортотропных прямоугольных пластинок.

2. Анализ литературных данных

В статье [4] исследуется задача устойчивости и колебаний непризматических слоистых призматических элементов мембран. В [5] дана постановка и исследована задача о колебании двухслойных чилиндрических оболочек из функционально неоднородного материала. В [6] изучается собственные колебания симметрично слоистых цилиндрических оболочек из материала с переменными характеристиками. В статье [7] дана постановка и исследована собственные колебания нано-пластинок на основе трехмерной теории упругости. В [8] проанализированы аэроупругая устойчивость и бифуркация слоистых панелей из нелинейного материала. В [9] задача о собственных колебаниях слоистых композитных пластинок исследована на основе метода конечных элементов. В статье [10] исследуется сейсмический контроль высоконапряженных элементов на основе трехмерной теории.

3. Постановка задачи

При моделировании задачи считается, что после удаления основных сейсмических воздействий на конструкцию в трехслойной пластинке происходят вибрации типа собственных колебаний и исследуются характеристики этих колебаний.

Рассмотрим трехслойную прямоугольную пластинку, изготовленную из неоднородного ортотропного материала. Координатная система выбрана следующим образом: оси OX и OY расположены в срединной плоскости среднего слоя пластинки, ось OZ – направлена перпендикулярно им.

Связь между компонентами напряжений и деформаций на основе обобщенного закона Гука имеет вид

$$\sigma^i_{11} = \lambda^i_{11}\varepsilon_{11} + \lambda^i_{12}\varepsilon_{22},$$
$$\sigma^i_{22} = \lambda^i_{21}\varepsilon_{11} + \lambda^i_{22}\varepsilon_{22},\ \sigma^i_{12} = \lambda^i_{33}\varepsilon_{12}\ (i=1,2,3). \tag{1}$$

Здесь предполагается, что упругие характеристики материала слоев являются непрерывными функциями координаты толщины т. е.

$$\lambda_{ij}^k = \lambda_{ij}^{k'} \cdot a_i^k(z).$$

Используем гипотезу Кирхгофа-Лява для всей толщины елемента пластинки

$$\varepsilon_{11} = e_{11} - z x_{11},\ \varepsilon_{22} = e_{22} - z x_{22},\ \varepsilon_{12} = e_{12} - z x_{12}, \tag{2}$$

где e_{11}, e_{22}, e_{12} и x_{11}, x_{22}, x_{12} – бесконечно малые изменения деформации и кривизны срединной плоскости.

Компоненты усилий и моментов вычисляются по формуле:

$$T_{ij} = \int_{-h_1-h/2}^{-h/2} \sigma^1_{ij} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^2_{ij} dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \sigma^3_{ij} dz,$$

$$M_{ij} = \int_{-h_1-h/2}^{-h/2} \sigma^1_{ij} z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^2_{ij} z dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \sigma^3_{ij} z dz, \tag{3}$$

где h_1, h и h_2 – толщины соответствующих слоев. С учетом (1), (2) из (3) получим:

$$T_{11} = \bar{\lambda}^2{}_{11} A^0{}_{11} e_{11} + \bar{\lambda}^2{}_{12} A^0{}_{12} e_{22} - \bar{\lambda}^2{}_{11} A^1{}_{11} x_{11} - \bar{\lambda}^2{}_{12} A^1{}_{11} x_{22}, \ldots, \tag{4}$$

$$M_{11} = \bar{\lambda}^2{}_{11} A^1{}_{11} e_{11} + \bar{\lambda}^2{}_{12} A^1{}_{11} e_{22} - \bar{\lambda}^2{}_{11} A^2{}_{11} x_{11} - \bar{\lambda}^2{}_{12} A^2{}_{12} x_{22}, \ldots . \tag{5}$$

В этих формулах $A_{ij}{}^k$ – обобщенные жесткостные характеристики.

4. Получение уравнений движения пластинки

Как известно [1], уравнения движения прямоугольных пластинок состоит из следующих уравнений:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + T_{11} x_{11} + 2T_{12} x_{12} + T_{22} x_{22} = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Здесь γ_1, у, γ_2 – удельные весы материала слоев, g – ускорение силы тяжести, u, v, w – перемещения точек срединной плоскости по направлениям x, y, z –соответственно.

Используем связь между деформациями и кривизнами с компонентами перемещений:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x},\ e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y},\ e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{8}$$

$$x_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ x_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ x_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

С учетом (4), (5), (8) из (6), (7) получается система уравнений движения относительно перемещений рассматриваемой пластинки в общем виде:

$$L_i(U_i) = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2},$$
$$(i, j = 1,2,3),\ (u_j = u, v, w). \tag{9}$$

Здесь L_i – полученные дифференциальные операторы.

Следует отметить, что деформации срединной плоскости пластинки должны удовлетворять уравнению совместности деформации:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} = 0. \tag{10}$$

Как видно, полная система уравнений движения рассматриваемой трехслойной пластинки в точной постановке состоит из (9) и (10).

5. Приближенная постановка задачи

В общем виде решение системы уравнений (9) связано с большими математическими трудностями. Поэтому в практике часто используется приближенная постановка задачи. В этом случае предполагается, что в системе (6) можно отбросить инерционные силы. Тогда эти уравнения будут удовлетворены тождественно, если ввести функцию напряжений F следующими соотношениями:

$$T_{11}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad T_{22}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad T_{12}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}. \qquad (11)$$

Для преобразования уравнений (7), (10) к необходимому виду, необходимо выразить e_{ij} через T_{ij} и x_{ij} из соотношений (4). Тогда после некоторых преобразований из (4) находим:

$$\begin{aligned} &e_{11}=\alpha_{11}T_{11}+\alpha_{12}T_{22}+b_{11}x_{11}+b_{12}x_{22},\\ &e_{22}=\alpha_{21}T_{11}+\alpha_{22}T_{22}+b_{21}x_{11}+b_{22}x_{22}, \qquad (12)\\ &e_{12}=\alpha_{33}T_{12}+b_{33}x_{12}. \end{aligned}$$

Подставляя (12) в выражения (5) для моментов, получим:

$$\begin{aligned} &M_{11}=r_{11}T_{11}+r_{12}T_{22}+R_{11}x_{11}+R_{12}x_{22},\\ &M_{22}=r_{21}T_{11}+r_{22}T_{22}+R_{21}x_{11}+R_{22}x_{22}, \qquad (13)\\ &M_{12}=r_{33}T_{12}+R_{33}x_{12}. \end{aligned}$$

В этих формулах коэффициенты α_{ij}, b_{ij}, r_{ij}, R_{ij} выражаются через обобщенные жесткостные характеристики.

Подставляя выражения (12), (13) в уравнения (7) и (10), после некоторых преобразований получим следующую систему уравнений собственных колебаний рассматриваемой пластинки:

$$\begin{aligned} &D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+D_{13}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\\ &+D_{21}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+D_{23}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+\\ &+\frac{1}{g}\left(\gamma_1 h_1+\gamma h+\gamma_2 h_2\right)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \qquad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &d_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+d_{13}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+d_{12}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+\\ &+d_{21}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+d_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+d_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0. \qquad (15) \end{aligned}$$

Здесь d_i и D_i выражаются через обобщенные жесткостные характеристики пластинки.

6. Решение задачи

Таким образом, в приближенной постановке задачи уравнение собственных колебаний трехслойной неоднородной ортотропной пластинки получены в виде (14) и (15).

При шарнирном закреплении краев квадратной пластинки для прогиба и функции напряжения можно принять следующие выражение:

$$\begin{aligned} &w=w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\cos\omega_{mn}t,\\ &\varphi=\varphi_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\cos\omega_{mn}t. \end{aligned} \qquad (17)$$

Здесь m, n – число полуволн по сторонам, ω_{mn} – частота собственных колебаний пластинки.

Подставляя (17) в уравнение (15), получим:

$$W_{mn}=-D_0\varphi_{mn},$$
$$D_0=\frac{d_{21}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+d_{23}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+d_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}{d_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+d_{13}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+d_{12}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}. \qquad (18)$$

Подставляя (17) и (18) в (14) после некоторых преобразований для определения частоты собственных колебаний пластинки получим формулу

$$\begin{aligned} \omega_{mn}=&\sqrt{\frac{g}{\gamma_1 h_1+\gamma h+\gamma_2 h_2}}\times\\ &\times\left\{D_0\left[D_{21}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+D_{23}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+D_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]+\right.\\ &\left.+d_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+d_{13}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+d_{12}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right\}^{1/2}. \qquad (19) \end{aligned}$$

При конкретных видах функций неоднородности материала слоев, частота собственных колебаний рассматриваемой пластинки определяется на основе (19).

7. Численные расчеты и анализ частоты собственных колебаний

Для проведения численных расчетов, функции неоднородности материала слоев принимались в следующем виде:

$$a_{11}^1(z)=1+\mu_1\frac{z}{h_1},\quad a_{11}(z)=1+\mu\frac{z}{h},\quad a_{11}^2(z)=1+\mu_2\frac{z}{h_2}. \qquad (20)$$

Результаты численных расчетов представлены на рис 1.

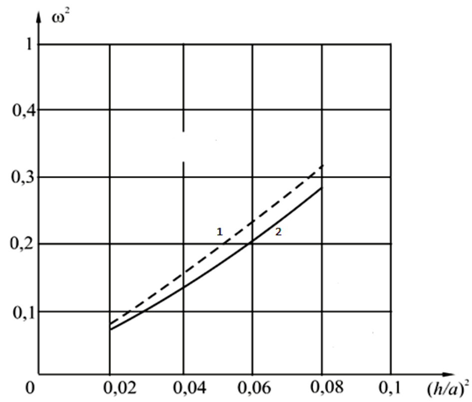

Рис. 1. График зависимости частоты собственных колебаний от гибкости пластинки. Здесь пунктирной линией отмечено решение аналогичной задачи для однородной пластинки. 1: $\mu_1=\mu_2=\mu=0$; 2: $\mu_1=\mu_2=\mu=1$

8. Выводы

В статье дана постановка задачи и получена система уравнений движения трехслойных неоднородных ортотропных прямоугольных пластинок в точном и приближенном вариантах.

Получено решение задачи о собственных колебаниях трехслойных пластинок и найдена формула для определения частоты собственных колебаний.

Анализ проведенных численных расчетов показывает, что неоднородность и ортотропность материала слоев пластинки можеть существенно влиять на критические параметры пластинки.

Литература

1. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем [Текст] / А. С. Вольмир. – М.;Наука, 1967. – 984 с.
2. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел [Текст] / Ломакин, В. А. – М., изд–во МГУ, 1978. – 245 с.
3. Алфутов, Н. А. Расчеты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов [Текст] / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М.;Машиностроение, 1984. – 264 с.
4. Rajasekaran, S. Stability and Vibration analysis of non-prismaticthin-walled composite spatial member sofgeneric section [Text] / S. Rajasekaran, K. Nalinaa // J.Appl.Mechanics. – 2010. – Vol.77, № 3. – P. 310–319.
5. Arshad, S. H. Vibration analysis of bilayered FGM cylindricalshells [Text] / S. H. Arshad, M. N. Naeem, N. Sultana, A. G. Shah, Z. Iqbal // J.Appl.Mechanics. – 2011. – Vol. 81, № 8. – P. 319–343.
6. Viswanathan, K. K. Jang Hyun Lee. Zainal Abdul Aziz. Free vibration of symmetric angle-ply laminated cylindrical shells of variable thickness [Text] / K. K. Viswanathan, Jang Hyun Lee, Zainal Abdul Aziz //J.Acta Mechanica. – 2011. – Vol. 221, № 10. – P. 309–319.
7. Alibeigloo, A. Free vibration analysis of nano-plate using three-dimensional theory of elasticity [Text] / A. Alibeigloo // J. Acta Mechanica. – 2011. – Vol. 222, № 11. – P. 149–159.
8. Li, Peng The aeroelastic stability and bifurcation structure of subsonic nonlinear thin panels subjected to external excitation [Text] / Peng Li, Yiren Yang, Wei Xu, Guo Chen // J.Arch.Appl.Mech. – 2012. – Vol. 82. – P. 1251–1267.
9. Avades, K. Free vibration analysis of laminated composite plates with elastical lyrestained edges using FEM [Text] / K. Avades, N. D. Sharma // CentralEuropeanJournalof Engineering. – 2013. – Vol. 3, № 2. – P. 306–315.
10. Peng, Zhang Seismic Control of Power Transmission Tower Using Pounding TMD [Text] / Zhang Peng, Song Ganding, Li Hong-Nan, Lin You-Xin // J. Eng. Mech. – 2013. – Vol. 139 (10). – P. 1395–1406.