УДК 519.217.2:629.46

ОЧІКУВАННЯ ОБСЛУГОВУВАННЯ ТА КОЕФІЦІЄНТ ВИКОРИСТАННЯ В СИСТЕМІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ МАРКІВСЬКОГО ТИПУ

С. Д. Бронза
андидат фізико-математичних наук, доцент*
E-mail: bronza_semen@mail.ru
О. О. Гончарова
Кандидат фізико-математичних наук, старший викладач*
E-mail: oagonch@mail.ru
Н. С. Юрчак
Кандидат технічних наук, доцент*
*Кафедра вищої математики**
E-mail: 1natalis1@rambler.ru
М. Ж. Овчієв
Аспірант
E-mail: murikuz@mail.ru
Кафедра управління вантажною і комерційною роботою**
**Українська державна академія залізничного транспорту
майд. Феєрбаха, 7, м. Харків, Україна, 61050

Запропоновано формули обчислення часу очікування обслуговування в системі масового обслуговування марковського типу з неперервним часом. Розглянуто один із основних показників функціонування системи масового обслуговування та його елементів – коефіцієнт використання. Запропонований підхід дозволяє отримати додаткову інформацію про функціонування системи масового обслуговування, обчислити моменти часу появи черги, часу очікування обслуговування в будь якому стані системи

Ключові слова: система масового обслуговування, марківський ланцюг, час очікування обслуговування, простій, коефіцієнт використання

Предложены формулы вычисления времени ожидания обслуживания в системе массового обслуживания марковского типа с непрерывным временем. Рассмотрен один из основных показателей функционирования системы массового обслуживания и его элементов – коэффициент использования. Предложенный подход позволяет получить дополнительную информацию о функционировании системы массового обслуживания, вычислить моменты времени возникновения очередей, времени ожидания обслуживания в любом из состояний системы

Ключевые слова: система массового обслуживания, марковская цепь, время ожидания обслуживания, простой, коэффициент использования

1. Вступ

У багатьох областях економіки, фінансів, виробництва та побуту важливу роль відіграють системи спеціального виду, що реалізують багаторазове виконання однотипних завдань.

Подібні системи називають системами масового обслуговування (СМО) [1–3]. Як приклади СМО можна навести системи, що представляють собою страхові організації (державні, акціонерні товариства, компанії, фірми, асоціації, кооперативи), різні системи зв’язку (у тому числі телефонні станції), вантажно-розвантажувальні комплекси (порти, товарні станції), автозаправні станції, різні підприємства. Робота, що виконується в транспортних системах, в тому числі на залізничному транспорті, також можна віднести до СМО.

Кожна СМО призначена для обслуговування (виконання) деякого потоку заявок (вимог), що надходять на вхід системи здебільшого не регулярно, а у випадкові моменти часу. Випадковий характер потоку заявок і часу їх обслуговування призводить до нерівномірного завантаженості СМО, що є приводом для появ черг. Час знаходження заяви в черзі в більшості випадків розглядається як неефективне використання СМО. Для будь-якої СМО одним з важливіших показників є коефіцієнт використання, який визначається як середня доля часу протягом якого СМО завантажена обслуговуванням заявок. При цьому коефіцієнт використання обчислюється як стала. Але він залежить від часу знаходження заяви в системі, тобто протягом часу змінюється. Виникає питання, в які моменти часу він досягне бажаного значення, та протягом якого часу заява повинна знаходитись в СМО, щоб коефіцієнт використання досягнув бажаної величини, наприклад, максимальної?

Розглядання коефіцієнта використання, як функції часу, дозволяє застосувати до нього аналітичні методи дослідження. За допомогою аналітичних методів можна обчислити, наприклад екстремуми, інтервали зростання і спадання. Це дозволить для ефективного використання СМО застосувати додаткову інформацію.

2. Аналіз даних та постановка проблеми

Для визначення якості функціонування системи масового обслуговування і її елементів використовують показники якості обслуговування заяв у СМО, які дозволяють судити про можливість системи виконувати покладені на неї функції [3]. Для опису якості функціонування СМО та її елементів використовують також числові характеристики іншої групи – коефіцієнти завантаження СМО та її елементів. Описати всі можливі показники якості і функціонування СМО, взагалі задача, власно кажучи, важко здійснювана. У зв'язку з цим виділяють, як правило, декілька важливих, з точки зору дослідника, показників, а тоді роблять висновки про якість обслуговування СМО. У [4] обчислюють, наприклад, середня довжина черги, час проведення заяв в системі, коефіцієнт незручності (відношення часу проведеного в системі к часу середнього обслуговування), середня кількість обслугованих заяв за період зайнятості. Більшість формул в [4] отримана с застосуванням формули Полячика-Хінчина, відкритою в 1932 році. В [5, 6] обчислюють середню кількість заяв у системі, середнє число заявок в системі, яка проходить за час обслуговування, середній час перебування заявки в системі, середній час очікування заяви в черзі. В [7] наведені формули для обчислення характеристик ефективності СМО, а саме абсолютна пропускна спроможність, відносна пропускна спроможність, середнє число заяв в СМО та черзі, середній час перебування заяв в СМО та черзі, середня кількість занятих каналів. Більшість формул отримані на основі формули Літтла. В [8] наведені ряд формул для оцінки ефективності багатоканальних систем. При цьому для вищезгаданих показників використовують точкові, рідше інтервальні, тобто числові оцінки. Дуже рідко використовуються функціональні оцінки функціонування СМО [9, 10]. В [10] в процесі дослідження вантажного залізничного вузла, як СМО отримані функціональні залежності ймовірностей як функції часу.

3. Мета і завдання дослідження

Метою даної роботи є розгляд та дослідження двох важливих показників ефективності функціонування СМО: часу очікування обслуговування та коефіцієнта використання, як функцій часу.

Завдання дослідження є побудова формул для обчислення: часу очікування обслуговування заяв (простію) в будь-якому стані СМО в будь-який момент часу та коефіцієнта використання будь якого стана СМО в будь-який момент часу.

За допомогою вказаних вище функцій не важко отримати оцінки ефективності функціонування СМО, які зазвичай отримують методом динаміки середніх [7, 8].

4. Час очікування обслуговування та коефіцієнти експлуатації як функції часу

Побудуємо спочатку формули для обчислення часу очікування обслуговування Для цього час очікування пов'яжемо з ймовірності знаходження системи у заданому стані.

Далі будемо використовувати наступні загальноприйняті позначення. S – система масового обслуговування, яка утворює марковський ланцюг з неперервним часом, п – число станів системи, стани системи E_i, $i = 1, 2, ... n$, Λ – генератор марковського ланцюга

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ . & . & . & . \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} = 1, \qquad (2)$$

де λ_{ij} – інтенсивності переходу зі стану E_i у стан E_j, $i, j = 1, 2, ..., n$, $i \neq j$. граф станів – G.

Ймовірність $q_i(t)$ знаходження системи S у будь-якому зі станів E_i може бути знайдена як розв'язок задачі Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь, отриманої з прямої системи рівнянь Колмогорова

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} Q_n(t) = Q_n(t)\Lambda, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1, \end{cases} \qquad (3)$$

де $q_i(t)$ – ймовірність знаходження системи у стані E_i, $Q_n(t) = (q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t))$ – вектор станів E_i у момент часу t, а $\dfrac{d}{dt} Q_n(t) = \left(\dfrac{d}{dt} q_1(t), \dfrac{d}{dt} q_2(t), ..., \dfrac{d}{dt} q_n(t) \right)$ – вектор похідних за часом від ймовірностей $q_i(t)$ знаходження системи у стані E_i у момент часу t.

З іншого боку, із визначення ймовірностей випливає, що ймовірність $\hat{q}_i(t)$ знаходження системи S у момент часу t у стані E_i може бути обчислена як

$$\hat{q}_i(t) = \frac{n_i(t)}{N}, \qquad (4)$$

де $n_i(t)$ – число заявок, що знаходяться у момент часу t у стані E_i; N – загальне число заявок.

Зауважимо, що якщо S – марковський ланцюг, тоді із властивості ординарності, а саме: кожна заявка у будь-який момент часу t може знаходитись тільки в одному зі станів, випливає, що $N = \sum\limits_{i=1}^{n} n_i$.

Зважаючи на граничні теореми теорії ймовірностей будемо мати, що статистична ймовірність $\hat{q}_i$ прямує до ймовірності q_i за ймовірністю (тобто $P\left(\left(\hat{q}_i - q_i\right) < \varepsilon\right) \approx 1$), тобто $n_i = N\hat{q}_i(t)$, і використовуючи граничний перехід, отримаємо

$$n_i = Nq_i(t). \qquad (5)$$

Позначимо З – множину заявок. Без обмеження спільності можна вважати, що З – скінченна множина. Введемо функціонал $\mu(З): З \to R$ як додатну, скінченну, скінчено адитивну функцію множини, тобто

1) $\mu(З)\geq 0$ при $\forall z\in Z$, а $\mu(\varnothing)=0$;

2) $\mu(З)<\infty$ при $\forall z\in Z$;

3) $\mu(З_1\cup З_2)\leq\mu(З_1)+\mu(З_2)$, а якщо $З_1\cap З_2=\varnothing$, тоді $\mu(З_1\cup З_2)=\mu(З_1)+\mu(З_2)$.

Таким чином, визначена вище функція $\mu=\mu(З)$, що задана на множині З, за визначенням є мірою. Використовуючи визначену вище множину З і функцію $\mu(З)$ визначену на ній, для опису часу обслуговування введемо функцію, яку будемо називати функцією часу заявки $\Pi(m,E_i,\tau_1,\tau_2)$.

Зміст цієї функції – сумарний час, який заяви знаходяться в заданому стані E_i за заданий проміжок часу $(\tau_1,\ \tau_2)$.

Нехай у проміжок часу з моменту τ_1 до моменту τ_2 в системі знаходилось m заяв. Для спрощення розпізнавання заявки пронумеровані $1,2,...,m$. Нехай, також j-а заявка знаходилася у стані E_i протягом часу t_j. Покладемо

$$\Pi(m,E_i,\tau_1,\tau_2)=\sum_{j=1}^{m}t_j\mu(E_i)\,. \tag{6}$$

Розглянемо малий проміжок часу Δt, в якому число заяв n_i, що знаходяться у стані E_i, залишається незмінним. Функція $\Pi(m,E,\tau_1,\tau_2)$ за час Δt дорівнює $n_i\Delta t$. Але, власне кажучи, n_i зміниться за часом. За проміжок часу (τ_1,τ_2), функція $\Pi(n_i,E_i,\tau_1,\tau_2)=\sum_{j=1}^{m}t_j\mu(E_i)$ очевидно

$$\Pi(n_i,E_i,\tau_1,\tau_2)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}n_i dt\,. \tag{7}$$

Інтегруючи за часом праву частину рівняння (6) від τ_1 до τ_2, маємо

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}n_i dt=\int_{\tau_1}^{\tau_2}Nq_i(t)dt=N\int_{\tau_1}^{\tau_2}q_i(t)dt\,. \tag{8}$$

З (9) і (6) випливає, що сумарний час T_i, який заява знаходиться в стані E_i за час від τ_1 до τ_2 дорівнює

$$T_i(\tau_1,\tau_2)=\Pi(n_i,E,\tau_1,\tau_2) \tag{9}$$

або

$$T_i(\tau_1,\tau_2)=N\int_{\tau_1}^{\tau_2}q_i(t)dt\,. \tag{10}$$

Зауважимо, якщо $\tau_1=0$, а $\tau_2=t$, ми отримаємо функцію часу $T_i(t)$ знаходження заяв у стані E_i, тобто

$$T_i(t)=N\int_{0}^{t}q_i(t)dt\,. \tag{11}$$

Кожна заявка, що знаходиться у стані E_i може бути в стані очікування обслуговування (пасивне обслуговування) або в стані обслуговування (активне обслуговування).

Обчислимо час активного обслуговування. Нехай c_i – час обслуговування заяви у стані E_i. Для спрощення припустимо, що усі заяви мають однаковий час обслуговування.

Нехай, окрім цього, за проміжок часу (τ_1,τ_2) в стані E_i знаходилися $N_i=N_i(\tau_1,\tau_2)$ заявок. Тоді їх сумарний час обслуговування $Q_i(\tau_1,\tau_2)$ дорівнює $c_iN_i(\tau_1,\tau_2)$, тобто

$$Q_i(\tau_1,\tau_2)=c_iN_i(\tau_1,\tau_2)\,. \tag{12}$$

Більш складно виглядає функція $Q_i(\tau_1,\tau_2)$, якщо заявки з множини $N_i(\tau_1,\tau_2)$ мають різний час обслуговування c_{ij}, $i=1,...,n$, $j=1,...N_i$, а саме

$$Q_i(\tau_1,\tau_2)=\sum_{j=1}^{N_i}c_{ij}\,. \tag{13}$$

Для величини $N_i=N_i(\tau_1,\tau_2)$, якщо інтенсивності переходу λ_{ij} із стану E_i у стан E_j сталі, виконується, очевидно, співвідношення

$$N_i=(\tau_2-\tau_1)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\,. \tag{14}$$

Якщо заявки мають однаковий час обслуговування, то сумарний час активного обслуговування задовольняє співвідношенню

$$Q_i(\tau_1,\tau_2)=c_i(\tau_2-\tau_1)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\,, \tag{15}$$

але оскільки для генератора марківського ланцюга з неперервним часом вірно співвідношення

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}=-\lambda_{ii}\,,$$

маємо

$$Q_i(\tau_1,\tau_2)=-c_i(\tau_2-\tau_1)\lambda_{ii}\,. \tag{16}$$

Таким чином, час очікування обслуговування $P_i(\tau_1,\tau_2)$ за проміжок часу (τ_1,τ_2) є $T_i(T_1,T)-Q_i(T_1,T_2)$, тобто

$$P_i(\tau_1,\tau_2)=T_i(\tau_1,\tau_2)-Q_i(\tau_1,\tau_2) \tag{17}$$

або враховуючи (11) і (16), маємо

$$P_i(\tau_1,\tau_2)=N\int_{\tau_1}^{\tau_2}q_i(t)dt+c_i(\tau_2-\tau_1)\lambda_{ii}\,. \tag{18}$$

Перетворивши, отримаємо

$$P_i(\tau_1,\tau_2)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(Nq_i(t)+c_i\lambda_{ii}\right)dt\,. \tag{19}$$

Якщо покласти $\tau_1=0$, $\tau_2=t$, то час очікування обслуговування заявки у стані E_i від початку обслуговування до моменту t може бути описаний співвідношенням

$$P_i(t)=\int_{0}^{t}\left(Nq_i(t)+c_i\lambda_{ii}\right)dt\,. \tag{20}$$

Перейдемо до коефіцієнтів використання.

Розгляд коефіцієнтів використання, як функція часу, дозволяють отримати додаткову інформацію про функціонування СМО. При такому підході можливо обчислити, наприклад, у які моменти часу, в котрому зі станів виникає, або зникає черга. Надається можливість дослідити коефіцієнти використання $K_i = K(E_i)$ системи S у стані E_i, $i = 1,2,\ldots n$, який визначають наступним чином

$$K_i = \frac{T_A(E_i)}{T(E_i)}, \tag{21}$$

де $T_A(E_i)$ – час активного обслуговування заявки у стані E_i (тобто час знаходження у стані E_i без урахування часу очікування обслуговування);

$T(E_i)$ – час знаходження заявки в стані E_i.

Маємо $T\ (E_i) = T(E_i) - T_A(E_i)$.

Моменти часу появи та зникнення черги очікування обслуговування в стані E_i є вочевидь коренями рівняння:

$$Nq_i(t) = 1. \tag{22}$$

Якщо корені рівняння (21) є t_1, t_2, t3, … , то інтервали часу $(t_1,\ t_2,)$, (t_3,t_4), …, є проміжками часу існування черги. Кожному з інтервалів існування черги $(t_1,\ t_2,)$, (t_3,t_4) , … , відповідає інтервал часу активного обслуговування заявок. $(t_1–e_i,\ t2+c_i,)$, $(t_3–ei,\ t4+c_i)$, … , де e_i – середній час між заявками в момент появи черги, а c_i – середній час обслуговування заявки в стані E_i.

Об'єднання проміжків активного обслуговування заявок в стані E_i має вигляд

$$\bigcup_{j=1}^{r}\left(t_{2j-1} - e_i, t_{2j} + c_i\right), \tag{23}$$

де r – загальна кількість інтервалів.

Час очікування обслуговування заявки в стані E_i за проміжок часу (τ_1,τ_2) визначається множиною

$$(\tau_1,\tau_2)\ \bigcap\ \bigcup_{j=1}^{r}\left(t_{2j-1} - e_i, t_{2j} + c_i\right), \tag{24}$$

тобто заявка в стані E_i в момент часу $t{=}t_0$ обслуговується тоді, коли t_0 належить множині (23).

Час $T_A(E_i)$ активного обслуговування заявок в стані E_i в проміжку часу (τ_1,τ_2) дорівнює вочевидь сумою довжин інтервалів множини (23), звідки – коефіцієнт використання стану E_i системи

$$K_i = \frac{T_A(E_i)}{\tau_2 - \tau_1}. \tag{25}$$

5. Приклад обчислення часу очікування обслуговування та інтервалів існування черг на терміналі розвантаження в вантажному залізничному вузлі

Необхідно обчислити час очікування розвантаження з моменту часу 0 до моменту часу t_1 в вантажному залізничному вузлі (ВЗВ), інтервали існування черг на терміналі розвантаження та коефіцієнт використання в стану розвантаження.

Технологічний процес обробки описується генератором марківського ланцюга Λ (рис. 1). У заданий вузол в момент часу t, що дорівнює нулю, входить поїзд з 51 вагону, в якому співвідношення завантажених вагонів до порожніх два до одиниці. При цьому ми припускаємо, що у ВЗВ немає інших вагонів, внаслідок чого вони і не оброблюються.

Час розвантаження одного вагону 20 хвилин.

	-30	30	0	0	0	0	0	0	0
	0	-30	20	0	1	9	0	0	0
	0	0	-1,923	1, 923	0	0	0	0	0
	0	0	0	-1,923	1,91	0	0	0,013	0
Λ =	0	0	0	0	-2,923	2,5	0	0	0,423
	0	0	0	0	0	-1,162	1,162	0	0
	0	0	0	0	0	0	-1,162	0	1,162
	0	0	0	0	0,013	0	0	-0,013	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 1. Генератор марківського ланцюга

Загальний вигляд графа обліку вагонів зображений на рис. 2.

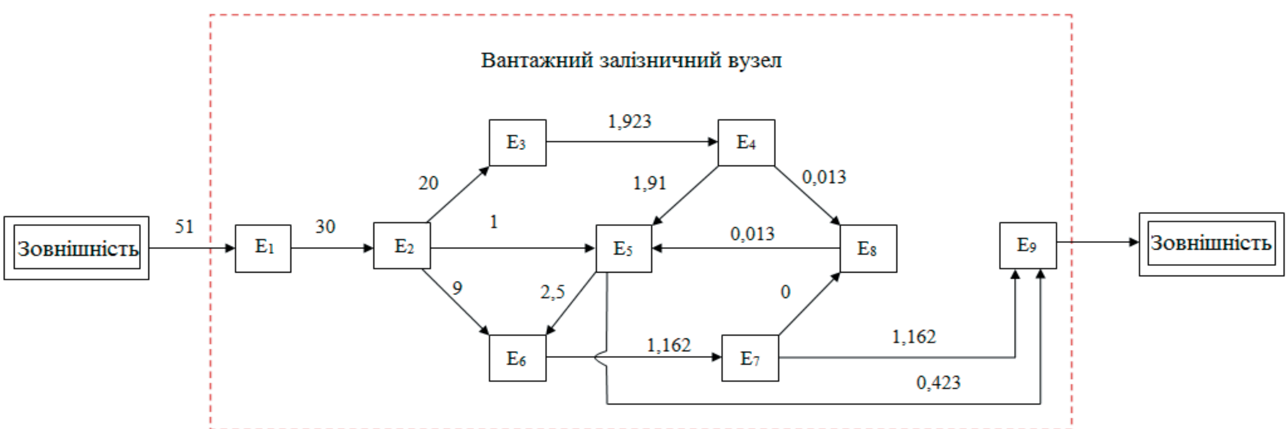

Рис. 2. Технологічний процес обробки вагона на залізничній станції: E_1 — вагон у стані технічного та комерційного догляду; E_2 — вагон у стані сортування; E_3 — вагон у парку накопичення вагонів для розвантаження; E_4 — вагон у стані розвантаження; E_5 — вагон у стані резерву; E_6 — вагон у парку накопичення вагонів для завантаження; E_7 — вагон у стані завантаження; E_8 — вагон у парку непрацюючих вагонів; E_9 — вагон у парку формування потягів

Розв'язання

Розв'язання виконано з застосуванням пакета програми Maple 13.

Маємо систему диференційних рівнянь Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = -30q_1, \\ \frac{dq_2}{dt} = 30q_1 - 30q_2, \\ \frac{dq_3}{dt} = 20q_2 - 1{,}923q_3, \\ \frac{dq_4}{dt} = 1{,}923q_3 - 1{,}923q_4, \\ \frac{dq_5}{dt} = q_2 + 1{,}91q_4 - 2{,}923q_5 + 0{,}013q_8, \\ \frac{dq_6}{dt} = 9q_2 + 2{,}5q_5 - 1{,}162q_6, \\ \frac{dq_7}{dt} = 1{,}162q_6 - 1{,}162q_7, \\ \frac{dq_8}{dt} = 0{,}013q_4 - 0{,}013q_8, \\ \frac{dq_9}{dt} = 0{,}423q_5 + 1{,}162q_7, \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8 + q_9 = 1. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння системи має вигляд

$$\det(\Lambda - \lambda E) = (-30-\lambda)^2(-1{,}923-\lambda)^2 \times$$

$$\times(-0{,}013-\lambda)(-2{,}923-\lambda)(-1{,}162-\lambda)^2\lambda = 0$$

Корені характеристичного рівняння

$$\lambda_1 = -30;\ \ \lambda_2 = -30;\ \ \lambda_3 = -1{,}923;$$

$$\lambda_4 = -1{,}923;\ \ \lambda_5 = -0{,}013;\ \ \lambda_6 = -2{,}923;$$

$$\lambda_7 = -1{,}162;\ \ \lambda_8 = -1{,}162;\ \ \lambda_9 = 0.$$

Частинний розв'язок будемо шукати за початкових умов

$q_1(0)=1$; $q_2(0)=0$; $q_3(0)=0$; $q_4(0)=0$;

$q_5(0)=0$; $q_6(0)=0$; $q_7(0)=0$; $q_8(0)=0$; $q_9(0)=0$.

Частинний розв'язок має вигляд

$$q_1 = e^{-30t},$$

$$q_2 = 30te^{-30t},$$

$$q_3 = -0{,}762e^{-30t} - 21{,}37te^{-30t} + 0{,}762e^{-1{,}923t},$$

$$q_4 = -0{,}104e^{-1{,}923t} + 0{,}104te^{-30t} + 1{,}464te^{-30t} + 1{,}464te^{-1{,}923t},$$

$$q_5 = 3{,}047e^{-2{,}923t} - 0{,}052te^{-30t} - 1{,}211te^{-30t} -$$

$$-2{,}995e^{-1{,}923t} + 2{,}795e^{-1{,}923t} + 0e^{-0{,}013t},$$

$$q_6 = -4{,}325e^{-2{,}923t} - 0{,}316te^{-30t} - 9{,}258te^{-30t} -$$

$$-2{,}230e^{-1{,}923t} - 9{,}183te^{-1{,}923t} + 6{,}871e^{-1{,}162t} + 0e^{-0{,}013t},$$

$$q_7 = 21{,}83e^{-1{,}923t} + 2{,}854e^{-2{,}923t} + 0{,}025e^{-30t} +$$

$$+0{,}373e^{-30t} + 14{,}02te^{-1{,}923t} - 24{,}71e^{-1{,}162t} +$$

$$+7{,}985te^{-1{,}162t} + 0e^{-0{,}013t},$$

$$q_8 = -0{,}009te^{-1{,}923t} - 0{,}004e^{-1{,}162t} -$$

$$-0e^{-30t} - 0te^{-30t} + 0{,}004e^{-0{,}013t},$$

$$q_9 = -17{,}26e^{-1{,}923t} - 1{,}575e^{2{,}923t} - 0e^{-30t} + 0{,}002te^{-30t} -$$

$$-9{,}088te^{-1{,}923t} + 17{,}84e^{-1{,}162t} - 7{,}985te^{-1{,}162t} - 0e^{-0{,}013t} + 1.$$

Графік частинного розв'язку q_4 зображені на рис. 3.

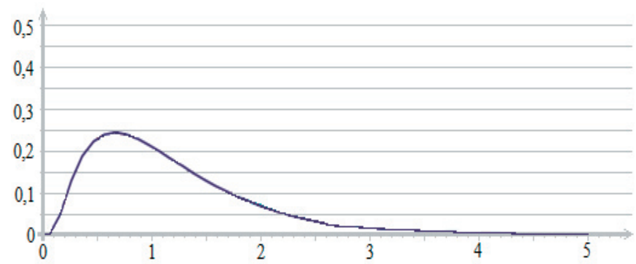

Рис. 3. Графік частинного розв'язку q_4 системи рівнянь Колмогорова

Для того, щоб обчислити час очікування обслуговування з моменту часу 0 до моменту часу t_1 в ВЗВ використаємо формулу (19), де $N = 51$, середній час розвантаження одного вагону $c_i = c_4 = 1/3$ години, $\lambda_{44} = -2{,}923$. Маємо ймовірність знаходження вагонів у стані розвантаження $q_4 = -0{,}104e^{-1{,}923t} + 0{,}104te^{-30t} + 1{,}464te^{-30t} + 1{,}464te^{-1{,}923t}$, ми вважаємо, що друге та третє додатні малі в правій частині рівняння малі. Таким чином, $q_4(t) = -0{,}104e^{-1{,}923t} + 1{,}464te^{-1{,}923t}$.

Отримаємо згідно формули (20) час очікування розвантаження

$$P_4(t) = \int_0^t \left(51(-0{,}104e^{-1{,}923t} + 1{,}464te^{-1{,}923t}) - \frac{2{,}923}{3} \right) dt =$$

$$= 51\left(\frac{0{,}104}{1{,}923} e^{-1{,}923t} \right)\Big|_0^t + 51 \cdot 1{,}464 \times$$

$$\times\left(-\frac{1}{1{,}923} te^{-1{,}923t} - \frac{1}{(1{,}923)^2} e^{-1{,}923t} \right)\Big|_0^t - \left(\frac{2{,}923}{3} t \right)\Big|_0^t =$$

$$= 2{,}758e^{-1{,}923t} - 2{,}758 - 38{,}827te^{-1{,}923t} -$$

$$-20{,}191e^{-1{,}923t} + 20{,}191 - 0{,}974t =$$

$$= -38{,}827te^{-1{,}923t} - 17{,}433e^{-1{,}923t} - 0{,}974t + 17{,}433.$$

Таким чином

$$P_4(t) = -38,827te^{-1,923t} - 17,433e^{-1,923t} - 0,974t + 17,433.$$

Моменти часу виникнення та зникнення черг є розв'язком рівняння, $Nq_4(t) = 1$. Маємо рівняння: $N(-0,104e^{-1,923t} + 1,464te^{-1,923t}) = 1$.

Рівняння має два кореня. Корені рівняння $t_1 = 0,142$, $t_2 = 3,249$. Крім того, маємо $e_4 = 0,05$, та $c_4 = 0,333$.

Для часу активного обслуговування $T_A(E_i)(t)$ маємо

$$T_A(E_i)(t) = \begin{cases} 0, & \forall t: \quad t \le 0,092 \\ t - 0,092, & \forall t: \quad 0,092 \le t \le 3,582 \\ 3,49, & \forall t: \quad 3,582 \le t \end{cases}.$$

Для коефіцієнта $K_4(t)$ використання термінала розгрузки маємо

$$K_4(t) = \begin{cases} 0, & \forall t: \quad t \le 0,092 \\ 1 - 0,092t^{-1}, & \forall t: \quad 0,092 \le t \le 3,582 \\ 3,49t^{-1}, & \forall t: \quad 3,582 \le t \end{cases}.$$

Таким чином, існує один проміжок часу існування черг (0,142, 3,249), та один проміжок часу активного обслуговування заявок (0,092, 3,582).

Тобто розвантаження вагонів починається в час t = 0,092, в час t = 0,142 виникає черга на розвантаження, в час t = 3,249 черга зникає, а в час t =3,582 розвантаження закінчується розвантаження вагонів.

6. Висновок

Уяву про ефективність роботи системи масового обслуговування можуть дати дві характеристики: коефіцієнт використання (відносна характеристика) та коефіцієнт очікування обслуговування (абсолютна характеристика).

Для систем масового обслуговування марковського типа с неперервним часом отриманні формули для обчислення часу очікування $P_i(\tau_1, \tau_2)$ обслуговування заяв в і-му стані за час від τ_1 до τ_2, $P_i(\tau_1,\tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (Nq_i(t) + c_i\lambda_{ii})dt$, та за час t з початку обслуговування $P_i(t) = \int_0^t (Nq_i(t) + c_i\lambda_{ii})dt$. Вперше ліві частини формул отримані не як сталі, а як функції часу.

Отримані формули для обчислення моментів часу виникнення та зникнення черг, проміжків часу існування черг в системі в будь-якому зі станів системи, проміжків часу активного обслуговування заявок. Отримані формула залежності від часу коефіцієнтів використання будь-якого зі станів системи. Отримані формули дозволяють дослідити динаміку зміни простою та коефіцієнтів експлуатації будь-якого стану: обчислити екстремуми цих процесів, інтервали зростання та спадання.

Як застосування отриманих формул наведено приклад обчислення: часу очікування розвантаження, проміжку часу існування черг, проміжку часу розвантаження та коефіцієнта використання термінала розвантаження вантажного залізничного вузла.

Література

1. Каштанов, В. А. Теория массового обслуживания [Текст] / В. А. Каштанов. – М. : ЮНИТИ, 2008. – 230 с.
2. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания [Текст] / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко; 2-е изд.,перераб. и доп. – М. : Наука: гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 336 с.
3. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания [Текст] / А. Я. Хинчин. – М. : Физматгиз, 1963. – 156 с.
4. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания [Текст] / Л. Клейнрок; пер. с англ. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
5. Вентцель, Е. С. Исследование операций [Текст] / Е. С. Вентцель. – М. : Сов. радио, 1972. – 320 с.
6. Вентцель, Е. С. Теория вероятности [Текст] / Е. С. Вентцель; 3-е изд., перераб. – М. : Инфра-М, 2004. – 178 с.
7. Овчаров, Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания [Текст] / Л. А. Овчаров. – М. : Машиностроение, 1969. – 177 с.
8. Кофман, А. Массовое обслуживание. Теория и приложения [Текст] / А. Кофман, Р. Крюон. – М.: Мир, 1965. – 265 с.
9. Тараканов, К. В. Аналитические методы исследования систем [Текст] / К. В. Тараканов, Л. А. Овчаров, А. Н. Тырышкин. – М. : Сов. радио, 1974. – 217 с.
10. Lomotko, D. V. Dynamics distribution of mathematical expectations of number of vans in cargo rail junction [Electronic resource] / D. V. Lomotko, S. D. Bronza, M. Zh. Ovchiev // Materials of the international research and practice conference (Science, Technology and Higher Education), December 11-12, 2012, Westwood, Canada. – Available at: http://science-canada.com/12-2012-2.pdf.