Робота присвячена вивченню можливості розв'язання контактних задач теорії пружності, зокрема задачі про штамп, використовуючи дискретну модель суцільного середовища. Розв'язується змішана гранична задача статики пружного тіла. Дана робота базується на ідеї моделювання суцільного середовища з використанням дискретного елемента кінцевих розмірів. Для проведення розрахунків за цією моделлю пропонується використовувати метод послідовних переміщень

Ключові слова: дискретна модель, суцільне середовище, дискретний елемент кінцевих розмірів, метод послідовних переміщень

Работа посвящена изучению возможности решения контактных задач теории упругости, в частности задачи о штампе, используя дискретную модель сплошной среды. Решается смешанная граничная задача статики упругого тела. Данная работа базируется на идее моделирования сплошной среды с использованием дискретного элемента конечных размеров. Для проведения расчетов по данной модели предлагается использовать метод последовательных перемещений

Ключевые слова: дискретная модель, сплошная среда, дискретный элемент конечных размеров, метод последовательных перемещений

УДК 531; 539.3

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО ЭЛЕМЕНТА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

А. Д. Шамровский
Доктор технических наук, профессор*
E-mail: adshamr@rambler.ru
Е. Н. Богданова
Аспирант*
E-mail: lizaveta.zp@gmail.com
*Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем
Запорожская государственная инженерная академия
пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина, 69006

1. Введение

В настоящее время для решения задач теории упругости, в том числе и контактных задач, широко применяются дискретные методы. Наибольшее распространение из таких методов получил метод конечных элементов. Однако при этом применение дискретизации означает использование двух противоположных процедур. Вначале процедуры предельного перехода для получения дифференциальных уравнений теории упругости, затем процедуры дискретизации. Помимо логической противоречивости такого подхода возникают и трудноразрешимые проблемы. В частности, стандартные подходы метода конечных элементов не пригодны при значении коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}5$. Разрабатываются усовершенствованные варианты метода конечных элементов [1–4], позволяющие приблизиться к значению $\nu = 0{,}5$, но не достигнуть его в точности. В работе [5] было показано, что дискретные модели могут быть получены непосредственно, без использования дифференциальных уравнений теории упругости. При этом значительно расширяются возможности решения различных задач теории упругости, в том числе и контактных задач. В работе [6] была показана принципиальная возможность решения контактных задач на основе дискретной стержневой модели. В работе [5] приведен наиболее совершенный вариант дискретного элемента конечных размеров, позволяющий моделировать любые упругие характеристики сплошной среды. Данная работа посвящена решению контактных задач теории упругости на основе таких дискретных моделей с учетом опыта, полученного ранее в работе [6].

2. Анализ литературных данных

Решение смешанных граничных задач статики упругого тела аналитическими методами достаточно сложное и проблематичное, поскольку для нахождения границ областей контакта необходимо решать достаточно громоздкую систему трансцендентных уравнений.

Аналитические решения могут быть получены только для очень ограниченного класса контактных задач, поэтому важно развивать численные или дискретные методы их решения.

Достаточно хорошо известны методы решения контактных задач при помощи метода конечных элементов [1–4]. А также гранично-элементное моделирование [7, 8]. Однако при этом в некоторых случаях приходится решать дополнительные проблемы. Например, в случае эластомерных материалов обычные методы очень плохо работают при коэффициенте Пуассона близком к 0,5.

Был разработан метод последовательных перемещений, идея которого в своей основе имеет второй закон Ньютона в своей оригинальной форме [5]. Дискретные модели, полученные также в работах [9, 10] позволяют надеяться на достаточно эффективное решение контактных задач теории упругости, в том числе при любых значениях коэффициента Пуассона.

3. Постановка задачи

Решается смешанная граничная задача статики упругого тела аналогичная задаче, решенной в работе [6]. А именно, находится упругое равновесие тела, если заданы смещения части точек его поверхности. Физически это соответствует случаю, когда усилиями, приложенными к точкам поверхности, этим точкам сообщают заданные смещения и закрепляют поверхность в этом виде.

Целью исследования является решение контактных задач теории упругости на основе дискретной модели с использованием элемента конечных размеров.

4. Метод последовательных перемещений

В работе [5] был предложен способ построения дискретной модели и проведения расчетов по этой модели. В качестве структурного элемента дискретной модели, заменяющего прямоугольный элемент сплошной упругой среды (рис. 1), был предложен прямоугольник, в углах которого находятся точечные массы, соединенные упругими связями.

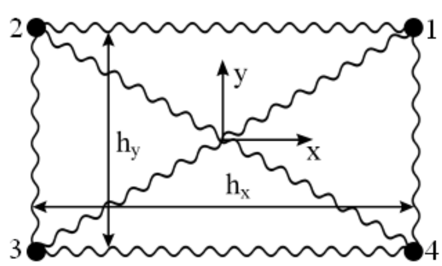

Рис. 1. Дискретный элемент конечных размеров

Данный элемент имеет прямоугольную форму и обладает конечными размерами. Его основной особенностью в отличие от обычных стержневых систем, в которых стержни вынуждены деформироваться совместно, является то, что жесткости каждого стержня элемента напрямую зависят от вида деформирования всего элемента в целом. Внешние нагрузки при этом могут быть приложены только к узлам элемента. Также приводится определение упругих характеристик дискретной модели [5].

Данная дискретная модель моделирует некую сплошную среду с изначально заданными перемещениями узлов в граничной зоне (рис. 2).

Эти начальные перемещения вызваны приложенной к телу нагрузкой, в зоне контакта имеется деформация. Для расчета используется метод последовательных перемещений [5]. Отличием решаемых контактных задач теории упругости является то, что для некоторых точек поверхности задаются усилия, а для других перемещения. Метод последовательных перемещений вполне пригоден для таких смешанных задач. Под штампом задаются перемещения узлов, а для остальных узлов поверхности — усилия (нулевые).

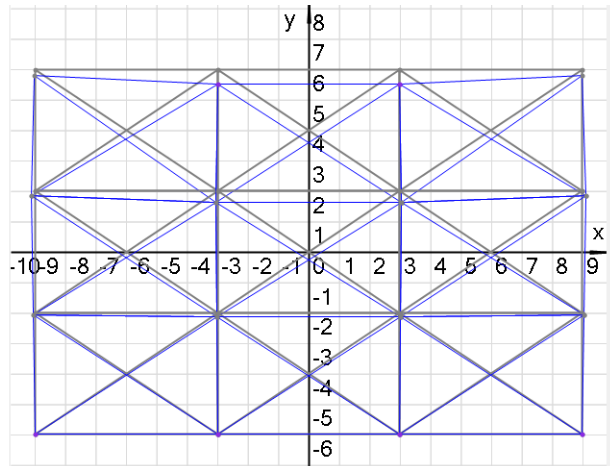

Рис. 2. Дискретная модель сплошной среды

Решаем задачу о напряженно-деформированном состоянии изображенной конструкции тем же методом последовательных перемещений, который применялся в случае одного прямоугольника [10].

Вначале считаем перемещения всех узлов, а также реакции всех стержней нулевыми.

На первом шаге вычисляем суммы проекций всех сил, действующих на узловые точки:

$$\sum X_i,\ \sum Y_i \quad (i=1,\ldots,16). \qquad (1)$$

При первой итерации в эти суммы будут входить только внешние нагрузки, но в дальнейшем будут учитываться и реакции стержней. Эти реакции находятся для каждого прямоугольника отдельно с последующим суммированием в узлах.

На втором шаге задаются перемещения узлов по формулам:

$$u_i = \gamma \sum X_i,\ v_i = \gamma \sum Y_i \quad (i=1,\ldots,16), \qquad (2)$$

где γ относительно малый коэффициент пропорциональности. Эти перемещения передаются в угловые точки соответствующих прямоугольников.

На третьем шаге полученные перемещения угловых точек прямоугольников используются для нахождения реакций стержней прямоугольников. Эта операция выполняется по известному алгоритму для каждого прямоугольника в отдельности [5, 10]. Обратим внимание на то, что для смежных стержней, которые геометрически сливаются, вычисляются отдельные реакции в зависимости от того, в какой прямоугольник входит стержень. Разумеется, затем эти реакции суммируются при вычислениях первого шага.

После этого процесс повторяется рекуррентно с первого шага до достижения достаточной близости к нулю одновременно всех сумм сил (1).

Авторами, в рамкам научно-исследовательской работы кафедры программного обеспечения автоматизированных систем Запорожской государственной инженерной академии (Украина), разработана программа, реализующая данный алгоритм для решения соответствующих задач.

5. Анализ полученных результатов

Применение данного метода позволяет находить силы, вызвавшие заданные перемещения, а также перемещения всех узлов системы, удовлетворяющие равновесию системы в целом.

Для исследования поведения системы будем постепенно увеличивать заданное начальное смещение от 0,05 до 0,2 при неизменных параметрах самой системы, что демонстрируется на рис. 3–8.

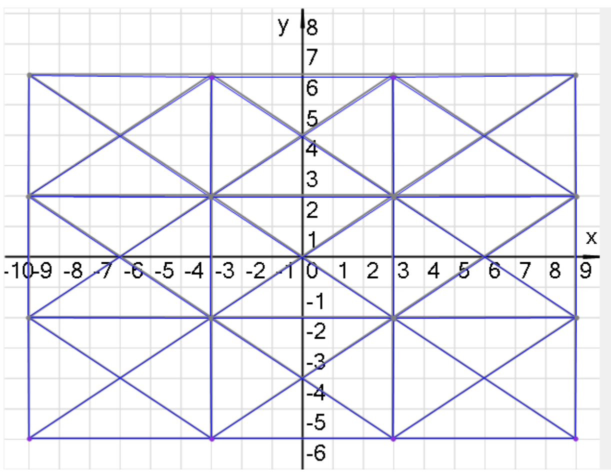

Рис. 3. Дискретная модель 3х3 элемента для перемещения 0,1

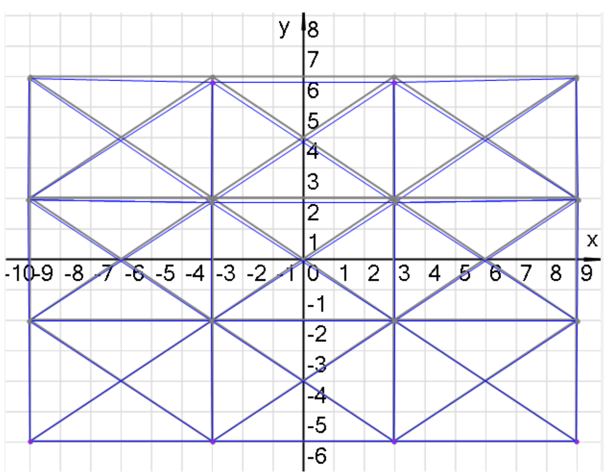

Рис. 4. Дискретная модель 3х3 элемента для перемещения 0,2

Проводим дальнейшее разбиение, уменьшаем размер дискретного элемента вдвое и сравниваем полученные результаты.

Как видно из рисунков, дальнейшее разбиение не имеет смысла, так как результаты, полученные с помощью данных моделей, существенных отличий не имеют.

Все полученные значения сил, а также суммарные значения, заносим в табл. 1.

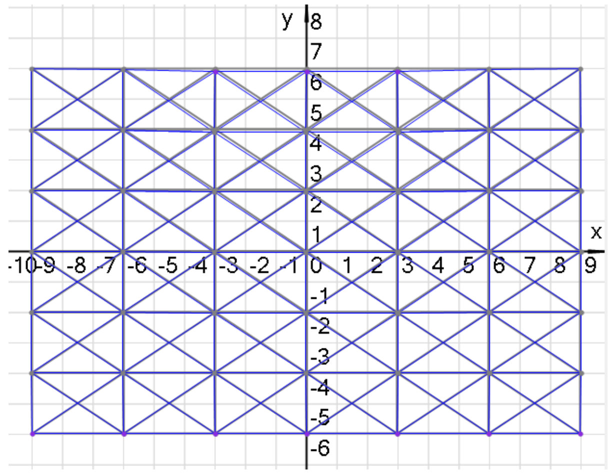

Рис. 5. Дискретная модель 6х6 элементов для перемещеня 0,1

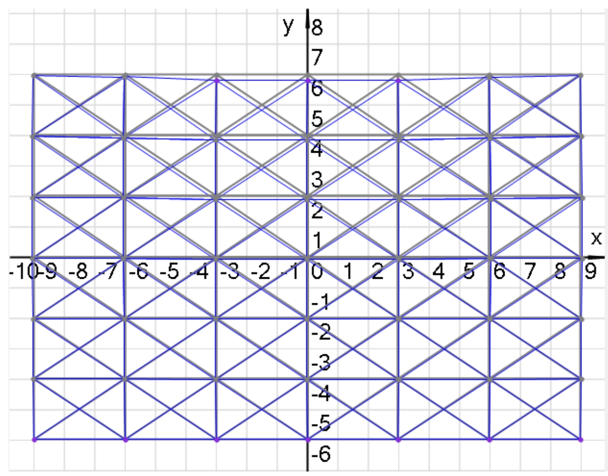

Рис. 6. Дискретная модель 6х6 элементов для перемещеня 0,2 снова уменьшаем размер дискретного элемента вдвое

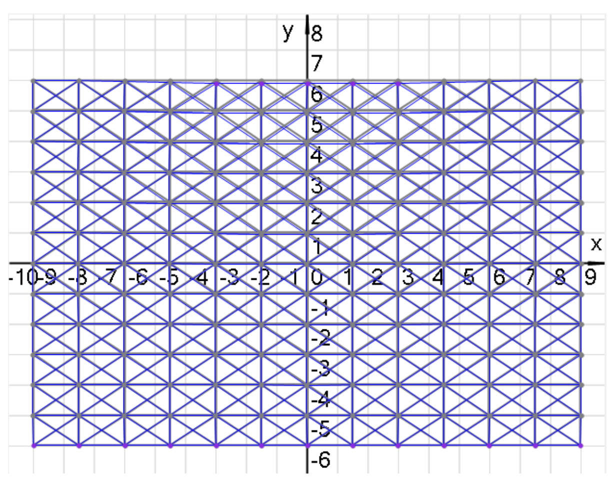

Рис. 7. Дискретная модель 9х9 элементов для перемещения 0,1

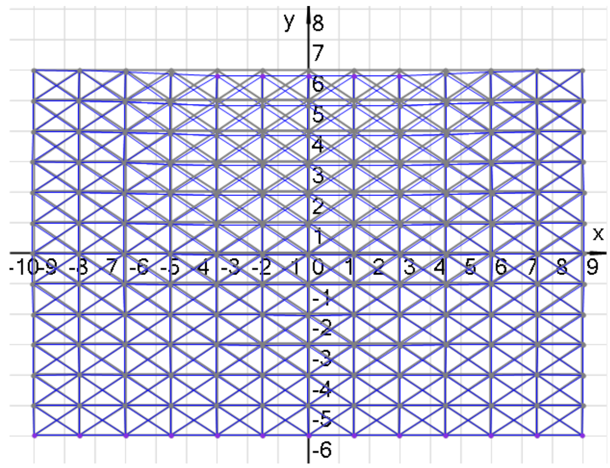

Рис. 8. Дискретная модель 9х9 элементов для перемещеня 0,2

Таблица 1

Сила для вызываемого ею перемещения для моделей 3х3, 6х6 и 9х9

Заданное смещение		0,05			0,1			0,15			0,2	
Размерность модели	3х3	6х6	9х9	3х3	6х6	9х9	3х3	6х6	9х9	3х3	6х6	9х9
Сила	0,071	0,071	0,071	0,142	0,141	0,140	0,212	0,211	0,208	0,283	0,280	0,275
Сила	0,071	0,082	0,082	0,142	0,164	0,163	0,212	0,245	0,242	0,283	0,325	0,320
Суммарная сила	0,142	0,071	0,082	0,284	0,141	0,163	0,425	0,211	0,242	0,565	0,280	0,320
		0,224	0,082		0,446	0,163		0,667	0,242		0,886	0,320
			0,071			0,140			0,208			0,275
			0,387			0,768			1,143			1,512

Используя численные значения силы, строим графики зависимости силы от перемещения для предложенных моделей (рис. 9).

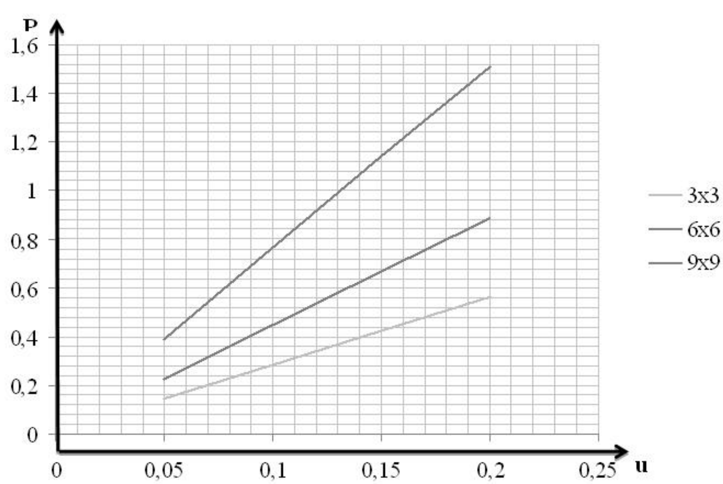

Рис. 9. Зависимость между силой и вызываемым ею перемещением для моделей 3х3, 6х6 и 9х9

Как видим, численно значения силы для данных моделей отличаются незначительно, а, следовательно, и нет потребности в дальнейшей дискретизации.

5. Выводы

Показана возможность использования чисто дискретных моделей для решения контактных задач теории упругости.

Использование подобных моделей не опирается на использование известных дифференциальных уравнений теории упругости. Это открывает дополнительные возможности при выборе значений упругих коэффициентов; в частности, при использовании значения коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}5$, характерного для эластомеров. Кроме того, при решении задач не приходится решать какие-либо алгебраические или дифференциальные уравнения. Вместо этого используется метод последовательных перемещений, являющийся одним из вариантов принципа сжимающих отображений. При этом отсутствует накопление погрешностей, а также появляется возможность решать нелинейные задачи таким же образом, как линейные.

Литература

1. Гребенюк, С. Н., Моделирование контактного взаимодействия эластомерных элементов конструкций [Текст] / С. Н. Гребенюк, Е. С. Решевская, В. М. Тархова // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2011. – Вип. 3 (42). – С. 163–167.

2. Дырда, В. И. Определение напряженно-деформированного состояния резинометаллических сейсмоопор [Текст] / В. И. Дырда, Н. И. Лисица, А. В. Новикова и др. // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2012. – Вип. 13. – С. 152–158.

3. Бова, А. А. Напружено-деформований стан гумових конструкцій на основі моментної схеми скінченного елемента [Текст] : зб. тез доповідей IV Всеукр. XI регіональної наук. конф. / А. А. Бова // Актуальні проблеми математики та інформатики. – Запоріжжя: ЗНУ, 2013. – С. 42–43.

4. Попович О.Г. Аналіз зміцнення поверхневого шару із застосуванням розв'язку контактної задачі [Текст] / О. Г. Попович, В. Г. Шевченко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетровський національний університет – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. Вип. 16. – С. 232–239.

5. Шамровский, А. Д. Дискретные модели для плоских статических задач теории упругости [Текст] / А. Д. Шамровский, Ю. А. Лымаренко, Д. Н. Колесник, Т. А. Миняйло, В. В. Кривуляк // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – Т. 3, № 7 (51). – С. 11–18.

6. Богданова, Є. М. Розв'язання контактних задач теорії пружності за допомогою дискретних моделей [Текст] / Є. М. Богданова, О. Д. Шамровський // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2013. – № 1. – С. 100–105.

7. Игумнов, Л. А. Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропной теории упругости

[Текст] / Л. А. Игумнов, И. П. Марков, В. П. Пазин // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2013. – Вып. 1(3). – С. 115–119.

8. Igumnov L. A. Using the Boundary-Element Method for Analyzing 3-D Problems of Equilibrium of Anisotropic Elasticity with Conjugated Fields [Text] / L. A. Igumnov, I. P. Markov, A. A. Ipatov, S. Yu. Litvinchuk // 2014 International Symposium on Physics and Mechanics of New Materials and Underwater Applications (PHENMA 2014): Abstracts & schedule. Khon Kaen, Thailand, 2014. – P. 38–39
9. Миняйло, Т. А. Усовершенствованный метод последовательных перемещений для расчета пространственных стержневых конструкций [Текст] / Т. А. Миняйло, Д. Н. Колесник, О. Д. Шамровський // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2013. – № 1. – С. 100–105.
10. Колесник, Д. Н. Роль нелинейных эффектов при решении одной плоской задачи теории упругости [Текст] / Д. Н. Колесник, А. Д. Шамровский // Восточно-Европейский Журнал передовых технологий. – 2011. – Т. 5, №7 (53). – С. 59–62.

УДК 004.89

ДЕСТАБИЛИЗАЦИЯ ПОТОКА В КАНАЛЕ С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПО ДЛИНЕ РАСХОДОМ

О. М. Яхно
Доктор технических наук, профессор*
E-mail: o.yahno@kpi.ua
Н. В. Семинская
Кандидат технических наук*
E-mail: seminska@ukr.net
Д. В. Колесников
Старший преподаватель
Кафедра автоматических систем безопасности и электроустановок**
E-mail: dekol@bigmir.net
С. В. Стась
Кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой
Кафедра техники**
E-mail: stas_serhiy@yahoo.com
*Кафедра прикладной гидроаэромеханики и механотроники
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
пр. Победы, 37, г. Киев, 03056
**Черкасский институт пожарной безопасности им. Героев Чернобыля
ул. Оноприенко, 8, г. Черкассы, Украина, 18034

У роботі на підставі експериментальних досліджень проведено порівняння гідравлічних характеристик потоків в'язких і аномально – в'язких рідин в гідравлічних системах з криволінійним трубопроводом і транзитним витратою з подібними результатами за умови постійності витрати. Показано відмінність у визначенні гідравлічних втрат і дані рекомендації для розрахунку перепаду тиску в каналах з дискретним відбором рідини по довжині

Ключові слова: дискретний відбір, дестабілізація, кривизна каналу, транзитні витрати, фіктивна довжина

В работе на основании экспериментальных исследований проведено сопоставление гидравлических характеристик потоков вязких и аномально – вязких жидкостей в гидравлических системах с криволинейным трубопроводом и транзитным расходом с подобными результатами при условии постоянства расхода. Показано различие в определении гидравлических потерь и даны рекомендации для расчета перепада давления в каналах с дискретным отбором жидкости по длине

Ключевые слова: дискретный отбор, дестабилизация, кривизна канала, транзитный расход, фиктивная длина

1. Введение

Течение вязких и аномально-вязких жидкостей в каналах с изменяющимся по длине расходом обладает целым рядом особенностей. Такое течение, как правило, является нестабилизированным, уровень дестабилизации связан не только с отбором по длине канала жидкости, но и целым рядом других факторов, одним из которых являются реологические свойства среды. В качестве примера рассмотрим пенообразующие присадки, используемые в пожарном деле, которые в ряде случаев являются неньютоновскими жидкостями. Из этого следует, что с изменением по длине расхода Q, может изменяться градиент скорости $\gamma = \frac{4Q}{\pi R^2}$, а, сле-