У статті досліджується задача про нелінійні коливання тришарових неоднорідних кругових циліндричних оболонок. Передбачається, що шари виготовлені з різних неоднорідних ізотропних матеріалів і пружні характеристики є безперервними функціями координати товщини оболонки. Беручи справедливість гіпотези Кірхгофа-Лява для всього елементу, отримана система рівнянь руху оболонки з урахуванням геометричної нелінейності. Отримане аналітичне рішення задачі

Ключові слова: тришарові кругові циліндричні оболонки, нелінійні коливання, неоднорідний матеріал, амплітудно-частотні характеристики

В статье исследуется задача о нелинейных колебаниях трехслойных неоднородных круговых цилиндрических оболочек. Предполагается, что слои изготовлены из различных неоднородных изотропных материалов и упругие характеристики являются непрерывными функциями координаты толщины оболочки. Принимая справедливость гипотезы Кирхгофа-Лява для всего элемента, получена система уравнений движения оболочки с учетом геометрической нелинейности. Получено аналитическое решение задачи

Ключевые слова: трехслойные круговые цилиндрические оболочки, нелинейные колебание, неоднородный материал, амплитудно-частотные характеристики

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

С. А. Гусейнов
Докторант
Кафедра «Теоретическая и строительная механика»
Азербайджанский архитектурно-строительный университет
ул. А. Султанова, 5,
г. Баку, Азербайджан, Аз1073
E-mail: fisayev@qu.edu.az

1. Введение

Различные задачи об устойчивости и колебании одно- и многослойных пластин и оболочек, изготовленных из однородно упругих материалов, в современной научной литературе освещено достаточно [1–4]. Однако когда конструкции изготовлены из неоднородных материалов и рассматриваются геометрически нелинейные задачи, научные исследования в этой области редко встречаются в литературе.

Поэтому в данной статье дается постановка задачи исследования нелинейных колебаний трехслойных круговых цилиндрических оболочек, слои которого изготовлены из различных неоднородно упругих материалов.

2. Анализ литературных данных

В статье [5] исследуется задача устойчивости и колебании непризматических слоистых призматических элементов мембран. В [6] исследованы колебательные процессы полярно-ортотропных неоднородных круговых пластинок. В [7] дана постановка и исследована задача о колебании двухслойных цилиндрических оболочек из функционально неоднородного материала. В [8] изучается собственные колебания симметрично слоистых цилиндрических оболочек из материала с переменными характеристиками. В статье [9] дана постановка и исследованы собственные колебания нано-пластинок на основе трехмерной теории упругости. В [10] проанализированы аэроупругое устойчивость и бифуркация слоистых панелей из нелинейного материала. В [11] задача о собственных колебаниях слоистых композитных пластинок исследована на основе метода конечных элементов. В статье [12] исследуется динамические процессы слоистых стержневых систем. В [13] рассмотрены задачи о нелинейной устойчивости и закритическом поведении эксцентрично сжатой цилиндрической оболочки из функционально неоднородного материала.

3. Постановка задачи

Рассмотрим трехслойную круговую цилиндрическую оболочку, изготовленную из неоднородно упругого материала. Координатная система выбрана следующим образом: оси OX и OY расположены в срединной плоскости, среднего слоя пластинки, ось OZ – направлена перпендикулярно им.

Связь между компонентами напряжений и деформаций на основе обобщенного закона Гука имеет вид:

$$\sigma_{11}^{i} = \lambda_{11}^{i}\varepsilon_{11} + \lambda_{12}^{i}\varepsilon_{22},\ \sigma_{22}^{i} = \\ = \lambda_{21}^{i}\varepsilon_{11} + \lambda_{22}^{i}\varepsilon_{22},\ \sigma_{12}^{i} = \lambda_{33}^{i}\varepsilon_{12}(i = 1,2,3)\ . \qquad (1)$$

Здесь предполагается, что упругие характеристики материала слоев являются непрерывными функциями координаты толщины т. е.:

$$\lambda_{ij}^{k} = \lambda_{ij}^{k'} \cdot a_{i}^{k}(z).$$

Используем гипотезу Кирхгофа-Лява для всей толщины элемента оболочки:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} - zx_{11},\ \ \varepsilon_{22} = e_{22} - zx_{22},\ \varepsilon_{12} = e_{12} - zx_{12}\ , \qquad (2)$$

где e_{11}, e_{22}, e_{12} и x_{11}, x_{22}, x_{12} – бесконечно малые изменения деформации и кривизны срединной плоскости.

Компоненты усилий и моментов вычисляются по формулам:

$$T_{ij} = \int_{-h_1-h/2}^{-h/2} \sigma_{ij}^1 dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^2 dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \sigma_{ij}^3 dz, \qquad (3)$$

$$M_{ij} = \int_{-h_1-h/2}^{-h/2} \sigma_{ij}^1 z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^2 z dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \sigma_{ij}^3 z dz\ .$$

где h_1, h и h_2 – толщины соответствующих слоев. С учетом (1), (2) из (3) получим:

$$T_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 \cdot A_{11}^0 \cdot e_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 \cdot A_{12}^0 \cdot e_{22} -$$
$$-\bar{\lambda}_{11}^2 \cdot A_{11}^1 \cdot x_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 \cdot A_{11}^1 \cdot x_{22}, \ldots\ , \qquad (4)$$

$$M_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 \cdot A_{11}^1 \cdot e_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 \cdot A_{11}^1 \cdot e_{22} -$$
$$-\bar{\lambda}_{11}^2 \cdot A_{11}^2 \cdot x_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 \cdot A_{12}^2 \cdot x_{22}, \ldots\ . \qquad (5)$$

В этих формулах A_{ij}^k – обобщенные жесткостные характеристики.

Таким образом, получены общие выражения для усилий и моментов рассматриваемой неоднородной трехслойной цилиндрической оболочки в виде (4) и (5). В дальнейшем используя эти выражения, будут получены уравнения движения оболочки в точной и приближенной постановке.

4. Получение уравнений движения оболочки

Как известно [1], уравнения движения прямоугольных пластинок состоит из следующих уравнений:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + T_{11}x_{11} +$$
$$+2T_{12}x_{12} + T_{22}x_{22} + \frac{T_{22}}{R} = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\ . \qquad (7)$$

Здесь γ_1, y, γ_2 – удельные весы материала слоев, g – ускорение силы тяжести, u, v, w –перемещения точек срединной плоскости по направлениям x, y, z – соответственно.

Используем связь между деформациями и кривизнами с компонентами перемещений с учетом геометрической нелинейности:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\ \ e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{w}{R},$$

$$e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$x_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \ x_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\ \ x_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\ . \qquad (8)$$

С учетом (4), (5), (8) из (6), (7) получается система нелинейных уравнений движения относительно перемещений рассматриваемой оболочки в общем виде:

$$L_i(U_j) = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2},$$
$$(i, j = 1,2,3),\ (u_j = u, v, w)\ . \qquad (9)$$

Здесь L_i– полученные нелинейные дифференциальные операторы.

Следует отметить, что деформации срединное плоскости оболочки должны удовлетворять уравнению совместности деформации :

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad (10)$$

Как видно, полная система уравнений движения рассматриваемой трехслойной оболочки в точной постановке состоит из (9) и (10).

5. Приближенная постановка задачи

В общем виде решение системы уравнений (9) связано с большими математическими трудностями. Поэтому в практике часто используется приближенная постановка задачи. В этом случае предполагается, что в системе (6) можно отбросить инерционные силы. Тогда эти уравнения будут удовлетворены тождественно, если ввести функцию напряжений F следующими соотношениями :

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ T_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\ . \qquad (11)$$

Для преобразования уравнений (7), (10) к необходимому виду, надо выразить e_{ij} через T_{ij} и x_{ij} из соотношений (4). Тогда после некоторых преобразований из (4) находим:

$$e_{11} = \alpha_{11}T_{11} + \alpha_{12}T_{22} + b_{11}x_{11} + b_{12}x_{22},$$

$$e_{22} = \alpha_{21}T_{11} + \alpha_{22}T_{22} + b_{21}x_{11} + b_{22}x_{22}\ , \qquad (12)$$

$$e_{12} = \alpha_{33}T_{12} + b_{33}x_{12}.$$

$$M_{11} = r_{11}T_{11} + r_{12}T_{22} + R_{11}x_{11} + R_{12}x_{22},$$

$$M_{22} = r_{21}T_{11} + r_{22}T_{22} + R_{21}x_{11} + R_{22}x_{22}, \qquad (13)$$

$$M_{12}=r_{33}T_{12}+R_{33}x_{12}.$$

В этих формулах коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, r_{ij}, R_{ij} выражаются через обобщенные жесткостные характеристики.

Подставляя выражения (12), (13) в уравнения (7) и (10), после некоторых преобразований получим следующую систему уравнений нелинейных колебаний рассматриваемой оболочки:

$$d_1\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)+d_2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+d_3\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+d_4\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+$$
$$+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+L_1(w,F)=\frac{\gamma_1 h_1+\gamma h+\gamma_2 h_2}{g}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (14)$$

$$D_1\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right)+D_2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+D_3\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+$$
$$+D_4\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}L_1(w,F). \quad (15)$$

Здесь d_i и D_i выражаются через обобщенные жесткостные характеристики пластинки и через L_1 – обозначен следующий нелинейный оператор:

$$L_1(\varphi,\tau)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}\ . \quad (16)$$

Таким образом, в приближенной постановке задачи уравнение нелинейных колебаний трехслойной неоднородной оболочки получены в виде (14) и (15).

6. Метод решения задачи

Аналогично работе [4], в частном случае задача сводится к исследованию колебаний полосы единичной ширины, имеющей размер вдоль дуги равной.

В этом случае можно показать, что уравнение движения получится в виде:

$$\left(D_3-D_1\frac{d_3}{d_1}\right)\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-\sigma h\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-$$
$$-\frac{\gamma_1 h_1+\gamma h+\gamma_2 h_2}{g}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{\sigma h}{R}=0. \quad (17)$$

При шарнирном закреплении краев полосы выражения для прогиба можно выбирать в виде:

$$W=f\sin\frac{\pi y}{b}. \quad (18)$$

Величину σ, входящую в (17), найдем из условия закрепления краев. Взаимное сближение краев принимаем равным нулю:

$$\Delta=-\int_0^б\frac{\partial\upsilon}{\partial y}дy=0. \quad (19)$$

Из выражений (3) и (5) получим:

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial y}=-\frac{\sigma h}{A_{11}^0}+\frac{A_{11}^1}{A_{11}^0}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\frac{W}{R}. \quad (20)$$

Подставляя (18) в (20) из условия (19), нетрудно получить:

$$\sigma=\frac{A_{11}^0}{h}\cdot\left[-\frac{A_{11}^1}{A_{11}^0}\cdot f\cdot\frac{2\pi}{b^2}-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{f^2}{b^2}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{f}{R}\right]. \quad (21)$$

С учетом (21) уравнение (17)-решается методом Бубнова-Галеркина:

$$\int_0^b\left\{\left(D_3-D_1\frac{d_3}{d_1}\right)\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-\right.$$
$$-A_{11}^0\cdot\left[-\frac{A_{11}^1}{A_{11}^0}\cdot f\cdot\frac{2\pi}{b^2}-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{f^2}{b^2}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{f}{R}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-$$
$$-\frac{A_{11}^0}{R}\cdot\left[-\frac{A_{11}^1}{A_{11}^0}\cdot f\cdot\frac{2\pi}{b^2}-\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{f^2}{b^2}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{f}{R}\right]-$$
$$\left.-\frac{\gamma_1 h_1+\gamma h+\gamma_2 h_2}{g}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right\}\cdot\sin\frac{\pi y}{b}dy=0. \quad (22)$$

После некоторых преобразований из (22) получается следуюшее уравнение:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\omega_{00}^2\phi(\xi)=0. \quad (23)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega_{00}^2=\frac{\pi^4}{9}\cdot\frac{c^2h_1^2}{b^4}\cdot\left[1+\frac{96}{\pi^6}\cdot\left(\frac{b^2}{Rh}\right)^2\right],\ \omega_{11}^2=\frac{c^2h_1^2}{b^4},$$

$$c^2=\frac{E_{10}g}{\gamma_1\delta_{12}+\gamma+\delta_{21}\gamma_2}\ ,\ \delta_{21}=\frac{h_2}{h},\ \delta_{12}=\frac{h_1}{h},$$

$$\Phi_2(\xi)=\frac{\omega_{11}^2}{\omega_0^2}\cdot\left(\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2+\alpha_3\xi^3\right),$$

$$\alpha_1=\frac{1}{h}\left\{\frac{\pi^4}{E_{01}h^2}\left(D_1\frac{d_3}{d_1}-D_3\right)\cdot+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2}{\pi R}-\frac{A_{11}^1}{A_{11}^0}\cdot\frac{2\pi}{b^2}\right)\cdot\frac{4A_{11}^0}{\pi R}\cdot\frac{b^4}{E_{10}h_1^2}\right\},$$

$$\alpha_2=-\left\{\left(\frac{2}{\pi R}-\frac{A_{11}^1}{A_{11}^0}\cdot\frac{2\pi}{b^2}\right)\cdot\frac{\pi^2A_{11}^0b^2}{E_{10}h_1^2}+\frac{\pi A_{11}^0}{R}\cdot\frac{b^2}{E_{10}h_1^2}\right\}.$$

$$\alpha_3=\frac{\pi^4}{4}\frac{A_{11}^0}{E_{10}h}. \quad (24)$$

Перейдем к исследованию амплитудно-частотных зависимостей для рассматриваемой оболочки. Принимая приближенное решение уравнения (23) в виде:

$$\xi=A\cos\omega t\ . \quad (25)$$

и удовлетворяя условию ортогональности, ¼ периода функции cosωt после некоторых преобразований получим:

$$\nu^2 = \frac{\omega_{11}^2}{\omega_{00}^2}\left(\alpha_1 + \frac{8}{3\pi}\alpha_2 A + \frac{3}{4}\alpha_3 \quad ^2\right),\ \nu^2 = \frac{\omega^2}{\omega_{00}^2}. \qquad (26)$$

При конкретных видах функций неоднородности материала слоев, амплитудно-частотные характеристики рассматриваемой оболочки определяются на основе (26).

7. Численные расчеты и анализ

Для проведения численных расчетов функции неоднородности материала слоев принимались в следующем виде:

$$a_{11}^1(z) = 1 + \mu_1 \frac{z}{h_1},\ \ a_{11}(z) = 1 + \mu \frac{z}{h},\ \ a_{11}^2(z) = 1 + \mu_2 \frac{z}{h_2}. \qquad (27)$$

Результаты численных расчетов представлены на рис 1.

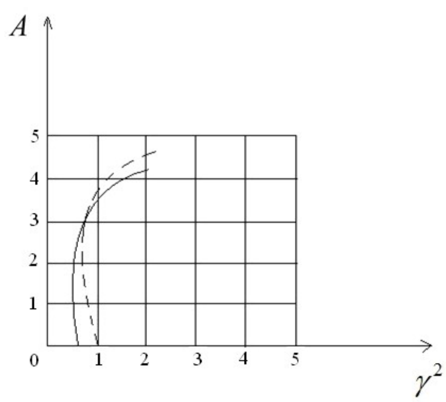

Рис. 1. График зависимости амплитудно-частотной характеристики оболочки на основе формулы (25). 1: $\mu_1=\mu_2=\mu=0$; 2: $\mu_1=\mu_2=\mu=1$

Здесь пунктирной линией отмечено решение аналогичной однородной задачи.

8. Выводы

В статье дана постановка задачи и получена система уравнений движения трехслойных неоднородных круговых цилиндрических оболочек в точном и приближенном вариантах. Получено решение задачи о нелинейных колебаниях трехслойных оболочек и найдена формула для определения амплитудно-частотной характеристики оболочки.

Анализ проведенных численных расчетов показывает, что учет неоднородности свойства материала слоев может существенно влиять на поведение конструкции в геометрически нелинейных задачах. В конкретном данном случае влияние неоднородности на значение амплитудно-частотной зависимости составляет 7–10 %.

Литература

1. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем [Текст] / А. С. Вольмир. – М.; Наука, 1967. – 984 с.
2. Вольмир, А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек [Текст] / А. С. Вольмир. – М.; Наука, 1972. – 432 с.
3. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел [Текст] / В. А. Ломакин. – М., изд-во МГУ, 1978. – 245 с.
4. Алфутов, Н. А. Расчеты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов [Текст] / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М.; Машиностроение, 1984. – 264 с.
5. Rajasekaran, S. Stability and Vibration analysis of non-prismaticthin-walled composite spatial member sofgeneric section [Text] / S. Rajasekaran, K. Nalinaa // J. Appl. Mechanics. – 2010. – Vol. 77, № 3. – P. 310–319.
6. Pentaras, D. Polar Orthotropic Inhomogeneous Circular plates: Vibration Tailoring [Text] / D. Pentaras, I. Elishakoff // J.Appl.Mechanics. – 2010. – Vol. 77, № 3. – P. 310–319.
7. Arshad, S. H. Vibration analysis of bilayered FGM cylindricalshells [Text] / S. H. Arshad, M. N. Naeem, N. Sultana, A. G. Shah, Z. Iqbal // J.Appl.Mechanics. – 2011. – Vol. 81, № 8. – P. 319–343.
8. Viswanathan, K. K. Free vibration of symmetric angle-ply laminated cylindrical shells of variable thickness [Text] / K. K. Viswanathan, Jang Hyun Lee, Zainal Abdul Aziz // J.Acta Mechanica. – 2011. – Vol. 221, № 10. – P. 309–319.
9. Alibeigloo, A. Free vibration analysis of nano-plate using three-dimensional theory of elasticity [Text] / A. Alibeigloo // J.Acta Mechanica. – 2011. – Vol. 222, № 11. – P. 149–159.
10. Li, Peng The aeroelastic stability and bifurcation structure of subsonic nonlinear thin panels subjected to external excitation [Text] / Peng Li, Yiren Yang, Wei Xu, Guo Chen // J.Arch.Appl.Mech. – 2012. – Vol. 82. – P. 1251–1267.
11. Avades, K. Free vibration analysis of laminated composite plates with elastical lyrestained edges using FEM [Text] / K. Avades, N. D. Sharma // Central European Journal of Engineering. – 2013. – Vol. 3, № 2. – P. 306–315.
12. Singh, Bhagat Dynamic analysis of damping in layered and welded beams [Text] / Bhagat Singh, Bijoy Kumar Nanda // J. Engineering Structures. – 2013. – Vol. 48. – P. 10–20.
13. Dao, Van Dung Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure [Text] / Van Dung Dao, Le KhaHoa // J.Thin-Walled Structures. – 2013. – Vol. 63. – P. 117–124