УДК 681.321

НЕОБХОДИМЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ АДЕКВАТНОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В.М. Вартанян
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой
Кафедра маркетинга*
Контактный тел.: 707-46-05

Ю.А. Романенков
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра менеджмента*
Контактный тел:. 707-48-54

Д.С. Ревенко
Аспирант
Кафедра маркетинга*
Контактный тел.: 707-46-05

В.Ю. Кащеева
Старший преподаватель
Кафедра финансов*
Контактный тел.: 707-46-04
*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»
ул. Чкалова, 17, г. Харьков, Украина

Запропоновано та обґрунтовано необхідні алгебраїчні умови адекватності поліноміальних інтервальних моделей динамічних процесів, засновані на використанні білінійного конформного перетворення та теореми Харитонова о робастної стійкості інтервальних поліномів. Запропонований підхід проілюстрований прикладом

Ключові слова: параметричний синтез поліноміальних інтервальних моделей динамічних процесів, інтервальний поліном, білінійне перетворення, стійкість

Предложены и обоснованы необходимые алгебраические условия адекватности полиномиальных интервальных моделей динамических процессов, основанные на использовании билинейного конформного преобразования и теореме Харитонова о робастной устойчивости интервальных полиномов. Предложенный подход проиллюстрирован примером

Ключевые слова: параметрический синтез полиномиальных интервальных моделей динамических процессов, интервальный полином, билинейное преобразование, устойчивость

Necessary algebraic conditions of adequacy of polynomial interval models of the dynamic processes, based on use of bilinear conformal transformations and Haritonov's theorem of robust stability of interval polynomials are offered and proved. The offered method is illustrated by an example

Key words: parametric synthesis of polynomial interval models of the dynamic processes, interval polynomial, bilinear transformation, stability

1. Введение

В ряде прикладных задач возникает необходимость нахождения настроечного параметра x математической модели исследуемого процесса как корня полиномиального уравнения n-го порядка вида (1), причем исследователя интересуют корни, попадающие в некоторый, заранее известный интервал.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = 0 \qquad (1)$$

Например, такая задача возникает при параметрической настройке метода экспоненциального сглаживания, применяемого для пошагового прогнозирования различных показателей социально-экономических систем [1].

Задача усложняется и исключает применение классических методов (например, теоремы Штурма), если коэффициенты уравнения (1) являются интервальными числами, т.е. известно не их точное значение, а лишь границы изменения:

$$[a_i]=[\underline{a}_i;\overline{a}_i], \tag{2}$$

где $\underline{a}_i$ и $\overline{a}_i$ – нижняя и верхняя граница интервального коэффициента a_i, $i=1..n$.

Таким образом, интервальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{n}[a_i]x^{n-i}=0 \tag{3}$$

есть не что иное, как семейство уравнений с множественным сочетанием детерминированных коэффициентов внутри интервала $[a_i]$.

2. Постановка проблемы

Необходимо сформулировать необходимые алгебраические условия, при выполнении которых хотя бы один корень полиномиального интервального уравнения (3) будут гарантированно находиться на отрезке $[c,d]$, где c и d – вещественные числа, причем $c<d$.

3. Подход к решению

Предлагается следующий метод анализа расположения корней интервального полиномиального уравнения.

Разобьем плоскость комплексного параметра x на две области: область G_1 – круг единичного диаметра с центром в точке $\left(\frac{c+d}{2},0\right)$, и область G_2 – все остальные точки комплексной плоскости (рис. 1).

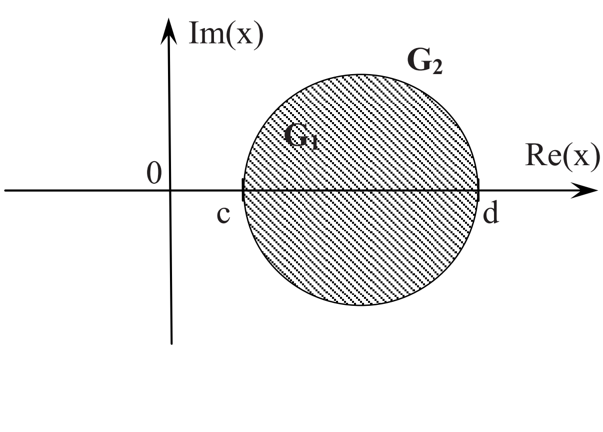

Рис. 1. Разбиение плоскости комплексного параметра x

Используя билинейное w-преобразование, которое отображает круг единичного радиуса в плоскости z во всю левую полуплоскость плоскости w, при использовании подстановки

$$z=\frac{1+w}{1-w}, \tag{4}$$

получим формулу преобразования области G_1 в правую полуплоскость комплексной плоскости W (рис. 2):

$$x=\frac{cw+d}{w+1},\ w=\frac{d-x}{x-c}. \tag{5}$$

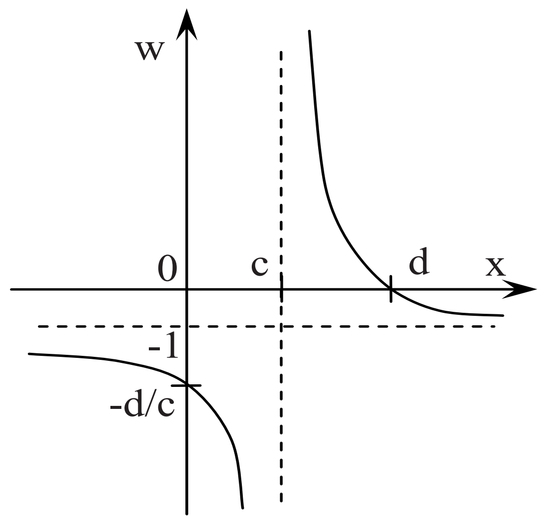

Рис. 2. График функции $w=\frac{d-x}{x-c}$

Из рис. 2 видно, что преобразование (5) отображает область G_2 плоскости X в левую полуплоскость комплексной плоскости w.

После подстановки уравнение (3) примет вид:

$$[a_0]\left(\frac{cw+d}{w+1}\right)^n+[a_1]\left(\frac{cw+d}{w+1}\right)^{n-1}+$$
$$+[a_2]\left(\frac{cw+d}{w+1}\right)^{n-2}+\ldots+[a_{n-1}]\frac{cw+d}{w+1}+[a_n]= \tag{6}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}[a_i]\left(\frac{cw+d}{w+1}\right)^{n-i}=0,$$

или после домножения на $(1+w)^n$:

$$[a_0](cw+d)^n+[a_1](cw+d)^{n-1}(w+1)+$$
$$+[a_2](cw+d)^{n-2}(w+1)^2+\ldots+$$
$$+[a_{n-1}](cw+d)(w+1)^{n-1}+[a_n](w+1)^n= \tag{7}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}[a_i](cw+d)^{n-i}(w+1)^i=0.$$

Уравнение (7) можно свести к стандартному виду:

$$[b_0]w^n+[b_1]w^{n-1}+[b_2]w^{n-2}+\ldots+[b_{n-1}]w+$$
$$+[b_n]=\sum_{i=0}^{n}[b_i]w^{n-i}=0\ , \tag{8}$$

где интервальные коэффициенты $[b_i]=[\underline{b}_i;\overline{b}_i]$ есть вычисляемые линейные функции от значений коэффициентов $[a_i]$.

Рассмотрим условия нахождения корней интервального полинома (8) в левой полуплоскости комплексной плоскости w. Согласно теореме Харитонова [2], интервальный полином устойчив (т.е. все корни полинома с интервальными коэффициентами лежат в левой полуплоскости комплексной системы координат вне зависимости от сочетаний значений коэффициентов), если устойчивы четыре характерных полинома с детерминированными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
D_1(w) &= \underline{b}_0 w^k + \underline{b}_1 w^{k-1} + \bar{b}_2 w^{k-2} + \bar{b}_3 w^{k-3} + \ldots + \underline{b}_{k-1} w + \underline{b}_k,\\
D_2(w) &= \underline{b}_0 w^k + \bar{b}_1 w^{k-1} + \bar{b}_2 w^{k-2} + \underline{b}_3 w^{k-3} + \ldots + \underline{b}_{k-1} w + \bar{b}_k,\\
D_3(w) &= \bar{b}_0 w^k + \bar{b}_1 w^{k-1} + \underline{b}_2 w^{k-2} + \underline{b}_3 w^{k-3} + \ldots + \bar{b}_{k-1} w + \bar{b}_k, \quad (9)\\
D_4(w) &= \bar{b}_0 w^k + \underline{b}_1 w^{k-1} + \underline{b}_2 w^{k-2} + \bar{b}_3 w^{k-3} + \ldots + \bar{b}_{k-1} w + \underline{b}_k.
\end{aligned}$$

Если все полиномы Харитонова (9) окажутся гурвицевыми, то все корни интервального уравнения (8) лежат в левой полуплоскости комплексной системы координат при любом сочетании значений коэффициентов, а, следовательно, все корни уравнения (3) находятся в области G_2. В случае же негурвицевости любого из полиномов Харитонова хотя бы один из корней уравнения (3) находится в области G_1. Проверка полиномов Харитонова на гурвицевость может быть выполнена с помощью известных алгебраических критериев устойчивости [3]. Наиболее уместным с практической точки зрения представляется применение обобщенного критерия Рауса, который позволяет не только установить факт неустойчивости полинома, но и определить число корней, находящихся в правой полуплоскости (что соответствует числу корней уравнения (3) с вещественной частью на интервале $[c,d]$).

Таким образом, *необходимым алгебраическим условием* нахождения корней интервального полинома (3) с вещественной частью на участке вещественной оси $[c,d]$ является негурвицевость хотя бы одного из полиномов Харитонова, полученных с помощью билинейного преобразования (5) исходного интервального полинома.

Следует отметить, что в рассматриваемых моделях параметр x предполагается вещественным. В этом случае необходимо учитывать, что предложенный подход формирует именно необходимые условия локализации корней на отрезке, которые превращаются в достаточные для нечетного количества корней.

Однако, путем дробления области G_1 на более мелкие и проверяя наличие в них корней, можно существенно приблизить область локализации корней к отрезку на вещественной оси.

Проиллюстрируем предложенный подход. Пусть для интервального полинома (3) выполняется сформулированное выше необходимое условие локализации корней на интервале $[c,d]$, т.е. область G_1 содержит корни интервального уравнения (3).

Расположим в области G_1 m кругов диаметром $\frac{d-c}{m}$ таким образом, чтобы они содержали в себе весь отрезок вещественной оси $[c,d]$.

Используем для каждого круга полученное из (5) преобразование:

$$x = \frac{c(m-i) + id + w(c(m-i+1) + d(i-1))}{m(1+w)}, \qquad (10)$$

где $i = 1..m$ – порядковый номер малого круга.

Проверяя изложенным выше способом факт наличия корней интервального уравнения (3) внутри каждого из m кругов, можно отсечь отрезки на интервале $[c,d]$, на которых корни (3) не могут появиться ни при каких сочетаниях значений коэффициентов интервального уравнения.

При этом максимальная мнимая составляющая пары корней в малых кругах $\mathrm{Im}(x)$ в m раз меньше, чем аналогичная величина для первоначального круга, что существенно приближает ее к вещественной оси и фактически может служить мерой точности метода. Так как все процедуры при проверке расположения корней не представляют существенной вычислительной сложности, уточнение расположения корней ограничено лишь видом корневого годографа.

4. Пример

Для иллюстрации предложенного метода, в том числе и графической, рассмотрим методологический пример 2-го порядка.

Пусть известна интервальная полиномиальная модель 2-го порядка некоторого динамического процесса:

$$-[19{,}6;20{,}4]x^2 + [44{,}4;45{,}6]x - [22;23] = 0\,.$$

Необходимо оценить адекватность модели, которая в рассматриваемом случае определяется наличием корней на участке $[0,1]$ для любого сочетания коэффициентов полиномиального уравнения из указанных интервалов.

После подстановки $x = \frac{1}{1+w}$ и домножения на $(1+w)^2$ исходный полином примет вид:

$$\begin{aligned}
&-[22;23]w^2 + ([44{,}4;45{,}6] - 2\cdot[22;23])w -\\
&-[19{,}6;20{,}4] + [44{,}4;45{,}6] - [22;23]
\end{aligned}\,.$$

Таким образом, коэффициенты интервального полинома относительно w:

$$[b_0] = -[22;23],\ [b_1] = [-1{,}6;1{,}6],\ [b_2] = [1;4]\,.$$

Полиномы Харитонова:

$$\begin{aligned}
D_1(w) &= -23w^2 - 1{,}6w + 4,\\
D_2(w) &= -23w^2 + 1{,}6w + 4,\\
D_3(w) &= -22w^2 + 1{,}6w + 1,\\
D_4(w) &= -22w^2 - 1{,}6w + 1.
\end{aligned}$$

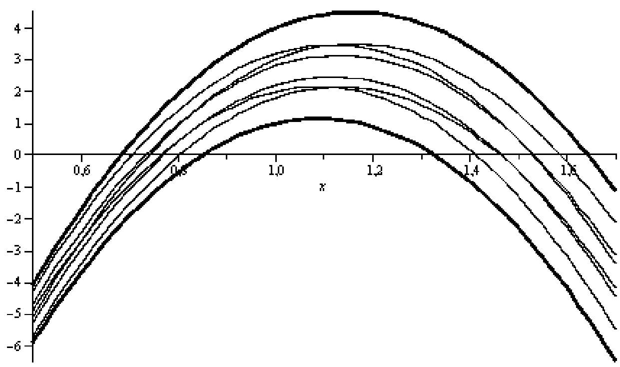

Рис. 3. График интервального полинома на интервале [0,5; 1,7]

Согласно критерию Рауса, для устойчивости уравнения второго порядка необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты полинома были одного знака, что в данном случае не выполняется. Следовательно, на интервале [0,1] существуют корни уравнения (3). Причем согласно обобщенному критерию Рауса, этих корней столько, сколько перемен знака у коэффициентов полинома (в данном случае один, а второй, являясь вещественным, находится на вещественной оси вне этого интервала).

Для геометрической иллюстрации примера построим семейство кривых, описываемых интервальным уравнением

$$P(x) = -\left[19{,}6;20{,}4\right]x^2 + \left[44{,}4;45{,}6\right]x - \left[22;23\right].$$

Очевидно, что семейство ограничено всего двумя стационарными полиномами (рис. 3):

$$\underline{P}(x) = \underline{a_0}x^2 + \underline{a_1}x + \underline{a_2} = -20{,}4x^2 + 44{,}4x - 23\ ,$$
$$\overline{P}(x) = \overline{a_0}x^2 + \overline{a_1}x + \overline{a_2} = -19{,}6x^2 + 45{,}6x - 22\ ,$$

и один из корней лежит на интервале (0,65; 0,85).

5. Выводы

Сформулированы необходимые алгебраические условия адекватности интервальных полиномиальных моделей динамических процессов, как требование нахождения настраиваемого параметра (корня уравнения) в заданном диапазоне для любого сочетания коэффициентов полиномиального уравнения из указанных интервалов.

Условия основаны на использовании билинейного конформного преобразования исходного полинома и теоремы Харитонова о робастной устойчивости интервальных полиномов, что позволяет определить факт нахождения и число корней интервального полинома в окрестности отрезка вещественной оси.

Предложенный подход в общем случае формирует необходимые условия локализации корней на заданном отрезке вещественной оси, которые вместе с тем, могут превращаться в достаточные для случая нечетного количества корней.

Литература

1. Вартанян В.М., Ревенко Д.С. Модель, метод и инструментальные средства интервального прогнозирования на основе экспоненциального сглаживания для случая неопределенности данных. Радиоэлектронные и компьютерные системы. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ». – 2009. – Вып. № 5(39) – С. 16-19
2. Жабко А.П., Харитонов В.Л. Необходимые и достаточные условия устойчивости линейного семейства полиномов // Автоматика и телемеханика. 1994. № 10. С. 125-134.
3. Вартанян В.М. Алгебраические методы исследования устойчивости динамических систем: Харьков: Гос. аэрокосмический ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2000. -90 с.