показали результаты решения нестационарных задач теплопроводности [4], S-функции полностью устранили эти серьёзные недостатки, так как впервые позволили получать гладкие решения обратных задач аналитической и дифференциальной геометрии. Максимальные погрешности при решении нестационарных задач теплопроводности с использованием S-функций не превосходили 0.16 % для относительной погрешности.

Литература

1. Мацевитый, Ю. М. Обратные задачи теплопроводности: в 2-х т. Т.2. приложения [Текст] / Ю. М. Мацевитый. – Киев: Наук думка, 2002. – 391 с.
2. Маляренко, В. А. Техническая теплофизика ограждающих конструкций, зданий и сооружений [Текст] / В. А. Маляренко, А. Ф. Редько, Ю. И. Чайка, В. Б. Поволочко. – Харьков: Рубикон, 2001. – 279 с.
3. Вигак, В. М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами [Текст] / В. М. Вигак. – Киев: Наук думка, 1979. – 359 с.
4. Слесаренко, А. П. Структурно-разностный подход математическому моделированию высокоскоростных тепловых процессов с нестационарным теплообменом на поверхности конструктивных элементов [Текст] / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Проблемы машиностроения. – 2011. – Т. 14, № 3. – С. 66–75.
5. Слесаренко, А. П. S-функции в обратных задачах аналитической геометрии и моделирования тепловых процессов [Текст] / А. П. Слесаренко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – Т. 3, 4 (51). – С. 41–46.
6. Слесаренко, А. П. S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм [Текст] / А. П. Слесаренко // Восточно-Европейский Журнал передовых технологий. – 2012. – Т. 1, № 4 (55). – С. 4–10.
7. Самарский, А. А. Теория разностных схем [Текст] / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
8. Болтянский, В. Г. Оптимальное управление дискретными параметрами [Текст] / В. Г Болтянский. – М.: Наука, 1973. – 446 с.
9. Богословский, В. Н. Строительная теплофизика [Текст] / В. Н. Богословский. – М.: Высш. школа, 1985. – 367 с.
10. Бутковский, А. Г. Методы управления системами с распределёнными параметрами [Текст] / А. Г. Бутковский. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

УДК 519.218

ЗАСТОСУВАННЯ РОЗКЛАДУ В ПРОСТОРІ З ПОРІДНИМ ЕЛЕМЕНТОМ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ЙМОВІРНІСНОЇ ДІАГНОСТИКИ

С. В. Заболотній
Кандидат технічних наук, доцент
Кафедра радіотехніки
Черкаський державний технологічний університет
бул. Шевченко, 460, м. Черкассы, Україна, 18000
E-mail: zabolotni@ukr.net

Запропоновано семі-параметричний підхід до вирішення задач ймовірнісної діагностики, заснований на апараті розкладу у просторі з порідним елементом. Синтезовано адаптивні процедури поліноміальної узгодженої фільтрації, призначені на виявлення та ідентифікації типів розладки негаусових випадкових процесів при їх моментно-кумулянтному описі. Проведено статистичне моделювання на прикладі послідовного виявлення розкладки по середньому та дисперсії

Ключові слова: розладка, узгодженість, стохастичний поліном, негаусові процеси, статистики вищих порядків

Предложен семи-параметрический подход к решению задач вероятностной диагностики, основанный на аппарате разложения в пространстве с порождающим элементом. Синтезированы адаптивные процедуры полиномиальной согласованной фильтрации, предназначенные для обнаружения и идентификации типов разладки случайных негауссовских процессов при их моментно-кумулянтном описании. Проведено статистическое моделирование на примере последовательного обнаружения разладки по среднему и дисперсии

Ключевые слова: разладка, согласование, стохастический полином, негауссовские процессы, статистики высших порядков

1. Вступ

Виявлення та ідентифікація несправностей (FDI – Fault Detection & Identification) технічних систем є однією із найважливіших проблем сучасної інженерії. Оскільки значна частина інформаційних процесів за своєю природою має стохастичний характер, а на детерміновані сигнали зазвичай діють зовнішні випадкові завади та внутрішні шуми, то для коректного прийняття рішень є необхідним застосування ймовірнісного підходу для їх опрацювання. Однією з ключових проблем ймовірнісної діагностики є так звана «розладка» (change point problem), під якою розуміють різку непередбачувану зміну ймовірнісних властивостей випадкових процесів. Необхідно зазначити, що задачі, в математичній постановці яких фігурує поняття «розладка», не є специфічними виключно для діагностики та контролю стану технічних систем. Моніторинг геофізичних, економічних, екологічних процесів, аналіз біомедичних та соціологічних даних – це далеко не повний перелік проблемних галузей ймовірнісної діагностики. Широке коло прикладних задач, яке постійно розширюється, вимагає розробки нових моделей та методів статистичного опрацювання, що і обумовлює актуальність даної роботи.

2. Аналіз літературних джерел та постановка проблеми

Історія ймовірнісної діагностики розпочинається із винайдення у 1924 р. Шухартом інструменту аналізу мінливості випадкових процесів, який зазвичай називають контрольними картами [1]. За майже століття, що минуло з цього часу, теоретично обґрунтовано та досліджено властивості достатньо великої кількість діагностичних методів. Серед них найбільш вагомими результатами можна вважати розробку на основі послідовного аналізу Вальда алгоритму кумулятивних сум (CUSUM) Пейджем [2], метода ретроспективного (апостеріорного) оцінювання моменту виникнення розладки, що базується на основі ідеї максимізації правдоподібності, запропонованого Хінклі [3]. Значний вклад в розвиток методів прийняття рішень, зокрема, в байєсовій постановці задач, вніс Ширяєв, який першим застосував термін «розладка» у вітчизняні літературі [4].

Достатньо повний аналіз проблем та методів ймовірнісної діагностики, станом на кінець 20-го століття можна знайти в оглядовій статті [5]. Прикладами детального викладення теоретичних та прикладних аспектів застосування статистичних методів виявлення розладки, зокрема, із застосуванням процедур адаптивної фільтрації, і є роботи [6–8]. Аналіз цих джерел показує, що характерною особливістю більшості класичних методів ймовірнісної діагностики є їх орієнтація на гаусову (нормально-розподілену) модель статистичних даних. Відомо, що використання таких моделей суттєво спрощує процедури синтезу та аналізу алгоритмів опрацювання, будова яких заснована на параметричному апараті щільностей розподілу ймовірностей.

Зазначимо, що в багатьох практичних випадках гаусова модель не завжди є адекватною, що призводить до погіршення результатів опрацювання. Врахування ж реального розподілу статистичних даних пов'язане із суттєвим зростання обсягу апріорної інформації або необхідністю вирішення апроксимаційних задач на основі апостеріорних даних для побудови адекватних ймовірнісних моделей. Крім того, «негаусовість» моделей, як правило, призводить до ускладнення реалізації оптимальних параметричних методів, які в більшості випадків потребують нелінійного опрацювання. Альтернативою в цій ситуації є робастні (стійкі до неточності моделей) та непараметричні (вільні від розподілу) статистичні методи [9]. Проте їх застосування загалом вже не є оптимальним з точки зору загальноприйнятих критеріїв ефективності (максимізації потужності статистик, мінімізації середнього часу на прийняття рішень, дисперсії оцінок і т. д.).

Одним із альтернативних підходів до вирішення задач, пов'язаних із обробкою негаусових сигналів і даних, є напрямок, що базується на застосуванні статистик вищих порядків (моментів, кумулянтів та їхніх функцій) або їх спектральних перетворень (поліспектрів). Прикладами використання даного описового апарату в різних прикладних задачах, пов'язаних із розладкою, є: визначення моменту приходу сигналів акустичної емісії [10], детектування відеопотоків [11], виявлення атак в телекомунікаційних мережах [12], виявлення дефектів підшипників [13], діагностування сигналів електрокардіограм [14].

Оскільки моментно-кумулянтний опис не є повним [15], то існує лише асимптотична (з ростом кількості параметрів) можливість отримання оптимальних результатів. В цьому контексті методи, що базуються на статистиках вищих порядків, можна трактувати як семі-параметричні. Їх використання значно спрощує процес синтезу адаптивних статистичних алгоритмів, здатних на основі врахування ймовірнісних властивостей даних покращувати точність їх опрацювання. Прикладом такого підходу до вирішення статичних задач є застосування стохастичних поліномів Кунченко [16], які використовуються в даній роботі.

3. Мета і задачі дослідження

Метою даної роботи є аналіз особливостей застосування математичного апарату розкладу у просторі з порідним елементом (просторі Кунченко) для вирішення типових задач ймовірнісної діагностики: виявлення та ідентифікації типів розладки шляхом розпізнавання негаусових випадкових процесів при їх частковому описі моделями на основі статистик вищих порядків.

Практичним аспектом роботи є дослідження шляхом багаторазових випробувань ефективності синтезованих семі-параметричних адаптивних алгоритмів поліноміальної узгодженої фільтрації, призначених для вирішення модельних задач, пов'язаних із послідовним виявленням розладки параметрів (середнього та дисперсії) негаусових випадкових послідовностей.

4. Теоретичні основи розкладу у просторі з порідним елементом

Відомо, що ряди як математичний апарат були створені для спрощення розрахунків при роботі з детермінованими функціями. Проте в процесі розвитку науки цей апарат став одним із найпоширеніших інструментів при вирішенні багатьох статистичних задач, зокрема, пов'язаних із проблемами ймовірнісної діагностики. Найбільшого поширення набуло використання спектрального аналізу із застосуванням рядів Фур'є та розклади на основі вейвлет-перетворень.

У даній роботі застосовуються поліноми, спосіб формування яких принципово відрізняється від класичних розкладів. Вперше цей апарат, запропонований Кунченко [17], виник як специфічне середньоквадратичне наближення (розклад) випадкових величин за допомогою стохастичних поліномів із неортогональним базисом, в якості якого використовуються певні функціональних перетворень від об'єкту розкладу. Пізніше даний підхід був узагальнений і на його основі розроблена теорія нового абстрактного математичного простору – простору з порідним елементом (простору Кунченко), в якому можуть бути розкладені як детерміновані функції, так і випадкові сигнали з дискретним і неперервним часом [18].

Одним із ключових елементів даного математичного апарату є поняття «узгодженості» векторів, практична користь якого обумовлена поширеною функціонально-векторною аналогією, відповідно до якої випадкові величини та процеси можуть трактуватися як вектори у гільбертовому просторі [19]. Розглянемо дану властивість на прикладі наближення до вектора $\mathbf{X}=\{x_1,x_2,...,x_N\}$, що містить N статистично незалежних однаково розподілених випадкових елементів.

Використовуючи апарат стохастичних поліномів [16], отримаємо на основі вектора $\mathbf{X}$ інший вектор $\mathbf{Y}$ такої ж розмірності N, складові якого формуються шляхом поліноміальних перетворень S-го порядку $f_S(\cdot)$ від відповідних елементів порідного вектору

$$y_n = f_S(x_n) = k_0 + \sum_{i=1}^{S} k_i \phi_i(x_n),\ n=\overrightarrow{1,N}, \tag{1}$$

де коефіцієнти поліному k_0 та k_i, $i=\overrightarrow{1,S}$ – деякі постійні (незалежні від n) величини, а базисні функції $\phi_i(\cdot)$ є певним чином впорядковані нелінійні перетворення, такі, що існують їх математичні сподівання

$$E\{\phi_i(\cdot)\} = \psi_i < \infty,\ i=\overrightarrow{1,S}. \tag{2}$$

Як базисні функції можуть бути використані степеневі або тригонометричні перетворення. У першому випадку для побудови стохастичних поліномів необхідним є моментно-кумулянтний опис, а у другому – характеристичні функції [16, 20].

Представимо (1) у більш компактній матричній формі

$$\mathbf{Y} = k_0 + \mathbf{K}\mathbf{\Phi_S}(\mathbf{X}), \tag{3}$$

де $\mathbf{K}$ – вектор коефіцієнтів розмірності S, а матриця $\mathbf{\Phi_S}(\mathbf{X})$ має розмірність $N\times S$.

Поліноміальний вектор $\mathbf{Y}$, сформований на основі (3), називають узгодженим із порідним вектором $\mathbf{X}$, якщо скалярний добуток цих векторів є рівним квадрату норми узгодженого вектору, тобто

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} = \|\mathbf{Y}\|^2. \tag{4}$$

Очевидно, що умова (4) спричиняє нерівність $\|\mathbf{X}\|^2 \ge \|\mathbf{Y}\|^2$, адже

$$(\mathbf{X}-\mathbf{Y})^2 = \|\mathbf{X}\|^2 - 2(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) + \|\mathbf{Y}\|^2 = \|\mathbf{X}\|^2 - \|\mathbf{Y}\|^2 = \|\mathbf{Z}\|^2 \ge 0\ . \tag{5}$$

З теорії просторів відомо [19], що для деякого вектору X найкраще наближення буде тоді, коли апроксиманта $\mathbf{Y}$ підібрана таким чином, що дає найменше відхилення, тобто коли вектор $\mathbf{Z}=\mathbf{X}-\mathbf{Y}$ має найменшу норму. Подібне можливо, коли апроксиманта є проекцією вектора на відповідний підпростір, і тоді буде справедлива теорема Піфагора

$$\|\mathbf{Z}\|^2 = \|\mathbf{X}-\mathbf{X_Y}\|^2 = \|\mathbf{X}\|^2 - \|\mathbf{X_Y}\|^2, \tag{6}$$

тобто із (5) та (6) випливає, що $\mathbf{Y}=\mathbf{X_Y}$.

Із урахуванням зазначеної функціонально-векторної аналогії, розглянемо відому властивість екстремуму (мінімальності) дисперсії довільного вектора випадкових величин $\mathbf{X}$, яка полягає у тому, що функція

$$D = E\{(\mathbf{X}-\psi_0)^2\} \tag{7}$$

досягає мінімуму, коли має місце рівність

$$E\{\mathbf{X}\psi_0\} = \psi_0^{\ 2},$$

а це можливо, якщо $\psi_0 = E\{\mathbf{X}\}$. Тобто за аналогією до (4) математичне сподівання ψ_0 є константою, значення якої лінійно узгоджене з $\mathbf{X}$. В цій ситуації мінімум в (7) дорівнює дисперсії σ_X^2 випадкової величини $\mathbf{X}$, тобто

$$D = E\{\mathbf{X}^2\} - E\{\mathbf{X}\}^2 = E\{\mathbf{X}^2\} - \psi_0^{\ 2} = \sigma_X^2. \tag{8}$$

Відомо, що мінімізація величини дисперсії або середньоквадратичної похибки (СКП) є дуже важливим фактором у математичній статистиці, оскільки ця категорія є однією з основних характеристик, що визначає точність статистичного оцінювання та впливає на ймовірність помилкових рішень при перевірці статистичних гіпотез.

Якщо розглядати $\mathbf{Z}$ як вектор, що містить випадкові елементи $z_n = x_n - y_n$, $n=\overrightarrow{1,N}$, то для забезпечення мінімуму дисперсії σ_Z^2, що еквівалентно мінімізації квадрату похибки поліноміального наближення $D_S = \|\mathbf{Z}\|^2$, необхідно щоб вектор коефіцієнтів K знаходився як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (ЛАР)

$$\mathbf{KF} = \mathbf{B}, \tag{9}$$

де $\mathbf{F}$ – квадратична матриця розмірності $S\times S$, що містить центровані корелянти

$$F_{i,j} = E\{[\phi_i(X)-\psi_i][\phi_j(X)-\psi_j]\},\ i,j=\overline{1,S},$$

а $\mathbf{B}$ – вектор-стовбець розмірності S, який складається з елементів $B_i = E\{[X-\psi_0][\phi_i(X)-\psi_i]\}$, $i=\overline{1,S}$.

Для мінімізації D_S також необхідно, щоб коефіцієнт k_0 знаходився із співвідношення

$$k_0 = \psi_0 - \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}, \tag{10}$$

де $\boldsymbol{\psi}$ – вектор-стовбець розмірності S, який складається із відповідних до (2) математичних сподівань ψ_i, $i=\overline{1,S}$.

Із врахуванням (3) та (10) величину похибки наближення можна записати

$$D_S = \left\{\left[\mathbf{X} - \psi_0\right] - K\left[\mathbf{\Phi_S}\left(\mathbf{X}\right) - \boldsymbol{\psi}\right]\right\}^2 . \quad (11)$$

Зіставлення (11) із (7) після незначних перетворень дозволяє записати співвідношення

$$D_S = D - \mathbf{KB} = D - J_S . \quad (12)$$

де величину J_S, що в розгорнутому вигляді представляється як

$$J_S = \sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} k_i k_j F_{i,j} , \quad (13)$$

називають інфоркуною стохастичного поліному [16]. Вона визначає ступінь наближення поліноміального узгодженого вектора $\mathbf{Y}$ до порідного вектора $\mathbf{X}$ в залежності від степені поліному S. А з точки зору властивостей випадкових величин, значення інфоркуни характеризує ступінь зменшення дисперсії випадкової величини, що формується як різниця між порідною і поліноміальною узгодженою величинами, порівняно із дисперсією σ_X^2 порідної випадкової величини.

Зазначимо, що введене раніше обмеження на статистичну незалежність між елементами порідного вектору в загальному вигляді може бути скасовано, а даний апарат застосовано як для представлення корельованих випадкових процесів із дискретним часом [21], так і для розкладу випадкових процесів із неперервним часом [22]. Проте в цих ситуаціях процедура наближення ускладнюється, оскільки для забезпечення узгодження між порідними випадковими процесами і стохастичними поліномами їх структура повинна містити не постійні коефіцієнти, а функції (ядра) розкладу. При цьому алгоритм формування оптимальних ядер та аналіз збіжності таких рядів вимагає переходу у частотну область та застосування ймовірнісного опису об'єктів розкладу у вигляді спектрів вищих порядків (поліспектрів).

5. Системи виявлення та ідентифікації розладки на основі розкладу в просторі з порідним елементом

Оскільки діагностування – це процес віднесення (ідентифікації) стану системи або явища до одного з можливих діагнозів, то при ймовірнісному підході такі задачі повинні вирішуватися методами статистичного виявлення та розпізнавання сигналів чи образів. Число можливих діагнозів (типових станів) залежить від особливостей завдань і цілей дослідження. В найпростішому випадку задача діагностування може бути зведена до вибору одного з двох можливих діагнозів. Наприклад, різка зміна (розладка) характеристик процесу на виході деякої системи може відповідати переходу від її «працездатного» стану до «непрацездатного». У більш складних задачах необхідно детальніше охарактеризувати непрацездатний стан, який може належати одному із класів визначеної множини, тобто здійснити ідентифікацію типу розладки шляхом статистичного розпізнавання.

Характерною особливістю більшості задач ймовірнісної діагностики є те, що вони орієнтовані не на статистичну обробку вибірок фіксованого обсягу, а на послідовний аналіз випадкових процесів, що надходять в режимі реального часу. В таких ситуаціях процедуру опрацювання вхідних даних зазвичай називають фільтрацією.

Серед підходів до вирішення задач виявлення несправностей динамічних систем з подальшою ізоляцією проблеми на основі ідентифікації станів одним із найбільш популярних є напрямок, що базується на структурах у вигляді паралельного з'єднання фільтрів типу Калмана, Вінера та ін. [7]. Загальний принцип роботи базується на тому, що процеси, які контролюються, проходять через сукупність (набір із M банків) фільтрів, кожен із яких налаштований на певну гіпотезу. При цьому один із фільтрів, як правило, відповідає налагодженому стану, а інші – наявності змін (розладок) певного типу. Якщо певні гіпотези дійсно виконуються, то сигнали на виході відповідних фільтрів повинні бути малими. Таким чином, вирішальна функція базується на визначенні того з набору фільтрів, реакція якого є мінімальною [8].

Очевидно, що такий підхід якнайкращим чином корелює із принципами узгодженості, які закладені в основу апарату розкладу у просторі з порідним елементом. В якості фільтруючих систем (рис. 1), що за середньоквадратичним критерієм мінімізують величину реакції на своєму виході, при спостереженні на вході випадкового процесу з очікуваними ймовірнісними властивостями, можна досліджувати різницю виду

$$z_n = x_n - f_S\left(x_n\right) ,$$

де $f_S\left(x_n\right)$ – узгоджене із вхідною послідовністю поліноміальне перетворення, що для розглянутого прикладу статистично незалежних значень x_n, має форму (1).

Поліноміальні фільтри в різних каналах можуть мати однакову структуру, але будуть відрізнятися параметрами (коефіцієнтами або ядрами розкладу), значення яких оптимізуються за визначеним середньоквадратичним наближенням для кожного із очікуваних класів.

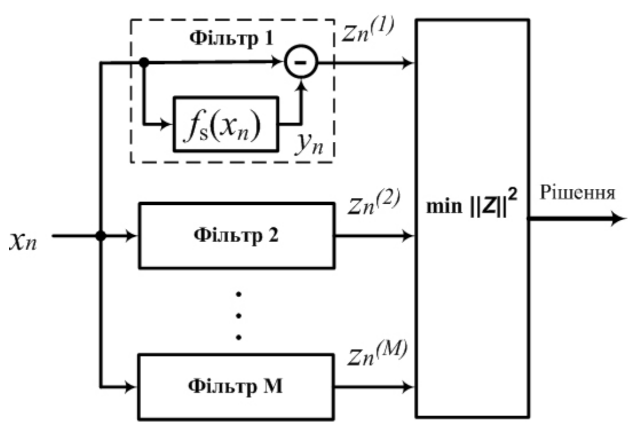

Рис. 1. Структурна схема системи виявлення та ідентифікації розладки на основі банку поліноміальних узгоджених фільтрів

У роботах [23, 24] на основі апарату розкладу у просторі з порідним елементом та функціональних степеневих перетворень обґрунтовані принципи синтезу та проаналізовані властивості дискретних нелінійних систем, які названі поліноміальними узгодженими фільтрами. Шляхом статистичного моделювання досліджена можливість застосування цих фільтрів для виявлення різноманітних сигналів та оцінювання моменту їх надходження. Отримані експериментальні результати підтверджують прогнозовану ефективність їх використання саме у випадках негаусовості статистичних даних. Нижче розглянуті особливості вирішення задач виявлення розладки негаусових випадкових послідовностей на основі поліноміальної узгодженої фільтрації.

6. Послідовне виявлення розладки із застосуванням поліноміальних узгоджених фільтрів

Розглянемо наступну постановку задачі. Нехай спостерігається послідовність $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ статистично незалежних випадкових величин, закон розподіл яких є невідомим та загалом відрізняється від гаусової моделі. До деякого (апріорно невідомого) моменту дискретного часу $\tau - 1$ значення параметрів, що контролюються, а саме, математичного сподівання (середнього) θ_0 та дисперсії σ_0^2 є незмінним (гіпотеза H_0). Потім, в момент часу τ , величина середнього та/або дисперсії різко змінюється (гіпотеза H_1), приймаючи відповідні значення θ_1 і σ_1^2. Завдання полягає в тому, щоб шляхом послідовного аналізу вхідної послідовності щонайшвидше виявити факт виникнення розладки при забезпеченні фіксованої вірогідності (середнього часу виникнення) помилкової тривоги.

При відсутності інформації про закон розподілу щільності ймовірностей вхідних сигналів для вирішення подібних задачі можна застосовувати непараметричний підхід. Відомо [5], що існує чотири основних типи непараметричних методів послідовного виявлення розладки, які базуються на статистиках типу CUSUM, GRSh (Гіршика–Рубіна–Ширяєва), експоненційного згладження та ковзного вікна. Остання статистика, як окремий випадок, включає класичну карту Шухарта. Більшість непараметричних методів об'єднує той факт, що вони орієнтовані на виявлення розладки у вигляді «зсуву» середнього значення. Проте, як показано у [9], загальна задача виявлення змін довільної ймовірнісної характеристики може бути зведена до виявлення змін середнього для деякої іншої послідовності, що сформована із початкової. Для введеної постановки задачі такою трансформацією може бути отримання нормованої послідовності виду

$$d_n = \frac{\left(x_n - \theta_0\right)^2}{\sigma_0^2}. \tag{14}$$

Розглянемо особливості вирішення поставленого завдання із застосуванням поліноміальної узгодженої фільтрації. Якщо в якості базисних використати ціло-степеневі функції $\phi_i(x) = x^i$, то узгоджене поліноміальне перетворення загального виду (1) з урахуванням (10) набуде форми

$$f_S\left(x_n\right) = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{S} k_i \left(x_n^i - \alpha_i\right), \tag{15}$$

де α_i – початкові моменти i -го порядку вхідної випадкової послідовності в налагодженому стані (при гіпотезі H_0).

Таким чином, на основі перетворення (15), із урахуванням, що при гіпотезі H_0 початковий момент $\alpha_1 = \theta_0$, та по аналогії до (14), сформуємо нормовану поліноміальну послідовність

$$d_n^{(S)} = \frac{\left(x_n - \theta_0 - \sum_{i=2}^{S} k_i \left(x_n^i - \alpha_i\right)\right)^2}{\sigma_0^2 \left(1 - J_S\right)}, \tag{16}$$

де J_S – інфоркуна виду (13).

Порівняльний аналіз (16) з (14) вказує на те, що послідовність d_n можна розглядати як окремий випадок поліноміальної послідовності $d_n^{(S)}$ при $S = 1$, тобто при відсутності нелінійних перетворень.

В цілому, ідея збільшення ефективності обробки шляхом застосування поліноміальних перетворень базується на тому, що значення параметрів стохастичних поліномів S-го порядку формуються із оптимальним (за критерієм середньоквадратичного наближення) урахуванням імовірнісних властивостей випадкових величин, які визначаються набором початкових моментів до 2S-го порядку. Наявність такої інформації дозволяє збільшити селективність опрацювання, оскільки за наявності на вході сигналу із узгодженими властивостями, після відповідної нелінійної (поліноміальної) обробки має місце суттєве зменшення дисперсії послідовності, що формується як різниця між порідною та узгодженою послідовностями. Саме ця різниця і використовується для подальшого аналізу та прийняття рішень, для чого може бути використана одна із класичних непараметричних статистик. Важливим позитивним наслідком зменшення дисперсії послідовності, що аналізується, є можливість суттєвого зниження порогу ухвалення рішень про розладку при забезпеченні відповідної величини помилкової тривоги.

Таким чином, запропонований підхід поліноміальної узгодженої фільтрації можна трактувати як семі-параметричний варіант попереднього опрацювання, який володіє властивістю адаптивності до ймовірнісних характеристик процесів, що контролюються. На рис. 2 наведена структурна схема адаптивної системи виявлення розладки, побудована на основі поліноміального узгодженого фільтру (ПУФ), непараметричної статистики (НС) типу «ковзного вікна», порогового пристрою (ПП) та підсистеми забезпечення адаптивності, в структурі якої можна виділити три складові: блоку оцінювання моментів (БОМ), блоку визначення коефіцієнтів (БВК) та блоку визначення порогу (БВП).

Очевидно, що реалізація адаптивності вимагає наявності «навчальної» послідовності, ймовірнісні характеристики якої повинні відповідати налагодженому стану (гіпотезі H_0). При вирішення постановленої задач на основі непараметричного підходу в якості «навчальних» характеристик використовуються оцінки перших двох моментів, значення яких дозволяє здійснювати нормування вхідного процесу. І хоча для коректного функціонування ПУФ порядку S кількість необхідних моментів α_i зростає до $2S$ порядку, алгоритм знаходження їх оцінок суттєво не змінюється і може базуватися на достатньо простій з реалізаційної точки зору рекурентній процедурі виду:

$$\hat{\alpha}_{i,n} = \frac{1}{n}\left[\left(n-1\right)\hat{\alpha}_{i,n-1} + x_n^i\right]. \qquad (17)$$

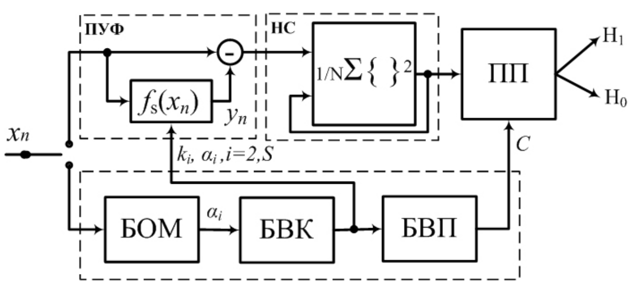

Рис. 2. Структурна схема адаптивної поліноміальної системи виявлення розладки

В роботі [25] запропонована евристична методика визначення похибок формування коефіцієнтів систем ЛАР виду (9), які застосовуються для адаптивного пошуку узгоджених параметрів (оптимальних значень коефіцієнтів k_i) ПУФ. Дана методика базується на рекурентному статистичному оцінюванні виду (17) та дозволяє реалізовувати поточний контроль необхідного обсягу навчальної вибірки за рахунок аналізу точності отримуваних оцінок у вигляді ковзного віконного усереднення їх середньоквадратичних відхилень.

Оскільки при апріорно невідомому негаусовому характері досліджуваних випадкових процесів теоретично встановити вигляд закону та значення параметрів розподілів статистик неможливо, то єдиним шляхом для визначення порогу прийняття рішень C, що забезпечує прийнятну вірогідність хибних тривог, є процедура попереднього навчання системи шляхом статистичного моделювання. В роботі [26] проаналізовані основні існуючі підходи до вирішення апроксимаційної задачі для статистик, що формуються на основі поліноміальної узгодженої фільтрації. Отримані результатів показали, що апроксимація емпіричного розподілу на основі двох та трьохкомпонентних гаусових сумішей забезпечує прийнятні результати для оцінювання ймовірностей помилкових рішень на рівні 10^{-3}. Більш ефективним є спосіб, що базується на апроксимації лише «хвостових» значень статистик із застосуванням узагальненого розподілу Парето. Цей підхід надає можливість достатньо просто розраховувати пороги прийняття рішень та адекватно прогнозувати помилки із ймовірністю на рівні 10^{-6}, проте вимагає великої кількості статистичних даних, оскільки при отриманні оцінок параметрів моделі використовуються лише частина «хвостових» значень.

7. Результати статистичного моделювання послідовного виявлення розладки та їх аналіз

На основі представлених вище результатів у середовищі Matlab/Simulink був розроблений комплекс імітаційного статистичного моделювання, функціонування якого дозволяє експериментальним шляхом оцінювати ефективність застосування ПУФ для вирішення ряду типових задач ймовірнісної діагностики. Для побудови моделі генератора процесів, що досліджуються, застосовано оригінальний підхід, який базується на двокомпонентній (бігаусовій) суміші нормально-розподілених випадкових величин. Застосування такого способу генерації дозволяє задавати ступінь «негаусовості», фіксуючи значення кумулянтних коефіцієнтів асиметрії γ_3 та ексцесу γ_4 [27].

Кожен експеримент полягає у багаторазовому послідовному виявленні розладок, що періодично виникають у процесі, який аналізується на основі застосування непараметричної статистики типу «ковзного вікна». Основним результатом такого статистичного дослідження є визначення усереднених значень часу $T^{(S)}$ та $T^{(1)}$, необхідних для прийняття рішень після виникнення розладки (при забезпеченні певного рівня хибної тривоги), відповідно, для випадків використанні ПУФ степені S та при відсутності додаткової нелінійної обробки. Відзначимо, що в процесі реалізації експериментів величина та тип розладки вважаються апріорі невідомими, а інформація про оптимальні параметри ПУФ отримується адаптивно, шляхом знаходження апостеріорних оцінок початкових моментів негаусових випадкових послідовностей.

Як приклад візуалізації результатів імітаційного моделювання на рис. 3 представлено осцилограми функціонування моделі, яка реалізує послідовне виявлення розладки негаусових випадкових послідовностей x_n (рис. 3, *а*) із параметрами $\gamma_3 = 1$ та $\gamma_3 = 5$ при періодичній зміні значень середнього на відносну величину $q = \left(\theta_1 - \theta_0\right)^2 / \sigma_1^2 = 1$ та дисперсії на масштабний коефіцієнт $g = \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 2$. На рис. 3, *б* та рис. 3, *в* представлені статистики, отримувані із застосуванням прямокутного «ковзного вікна» шириною $N = 100$ відліків, що згладжують послідовності, сформовані на основі перетворень (14) та (16). Нижче зображені імпульси, тривалість яких відповідає часу на прийняття рішення про виникнення розладки у випадку відсутності (рис. 3, *г*) нелінійної обробки та із застосуванням (рис. 3, *д*) ПУФ степені $S = 3$ (за умови забезпеченні однакової величини ймовірності хибної тривоги на рівні 10^{-2}).

Очевидно, що часові затримки на прийняття рішень про виявлення розладки для кожного із періодів є різними, що обумовлено стохастичними властивостями процесів, які аналізуються. Тому кінцевим результатом кожного із експериментів є отримання усереднених (для достатньо великої кількості періодів $L = 10^3$) часових значень $T^{(S)}$ і $T^{(1)}$, які і дозволяють здійснювати порівняльний аналіз ефективності запропонованого поліноміального семі-параметричного та класичного непараметричного підходів. На рис. 4 представлені отримані шляхом багаторазових випробувань залежності відношень $T^{(S)} / T^{(1)}$ від величини коефіцієнту асиметрії γ_3, побудовані при різних значеннях степені стохастичного поліному S (рис. 4, *а*), величини відносної розладки по середньому q (рис. 4, *б*), відносної величини розладки по дисперсії g (рис. 4, *в*) та при різних значеннях коефіцієнта ексцесу γ_4 (рис. 4, *г*).

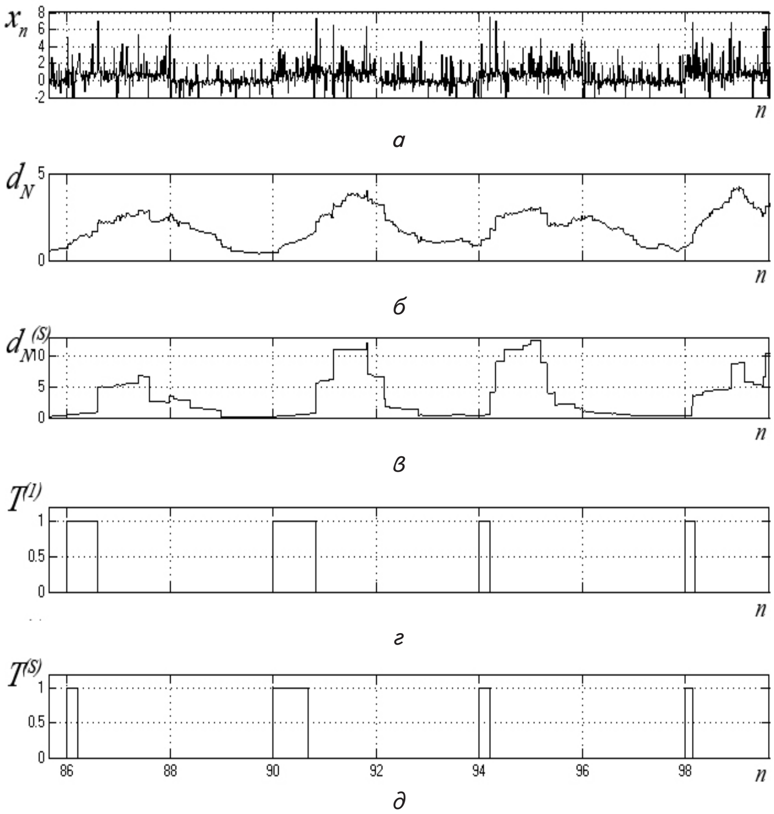

Рис. 3. Осцилограми моделювання послідовного виявлення розладки

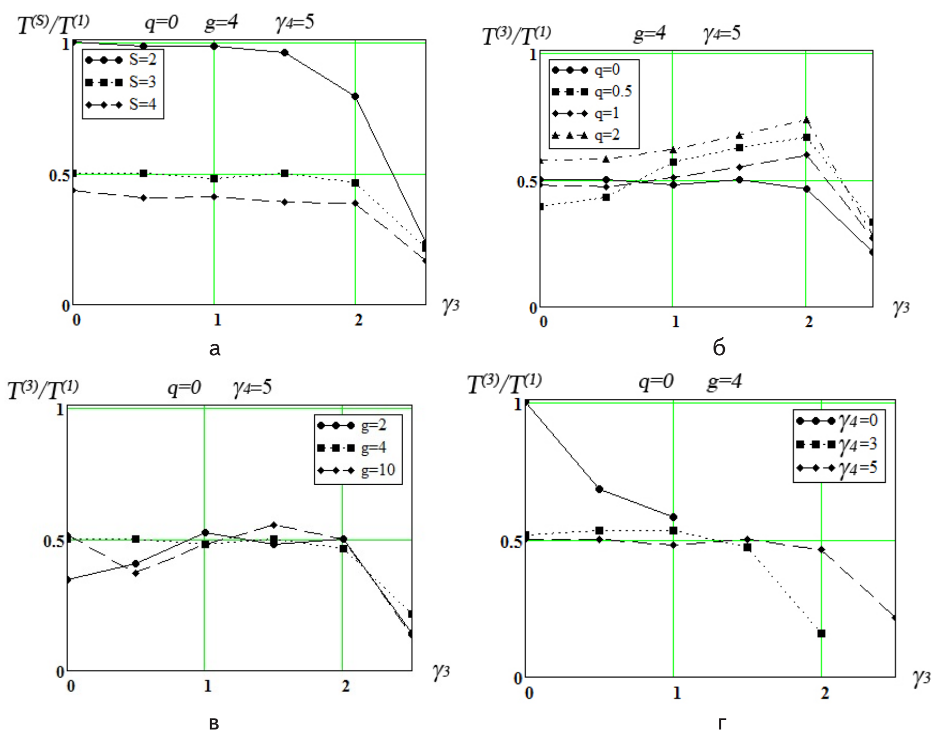

Рис. 4. Залежності відношень середніх значень затримок на прийняття рішень: *а* — при різних степенях поліному S; *б* — при величині розладки середнього q; *в* — при величні розладки дисперсії q; *г* — при коефіцієнті ексцесу γ_4

Аналіз наведених на рис. 4 графіків та інших отриманих в процесі експериментальних досліджень результатів дозволяє зробити наступні основні висновки стосовно характеру змін величини ефективності (зменшення середнього часу на виявлення розладки), що забезпечується застосуванням процедур, заснованих на поліноміальній узгодженій фільтрації:

- величина виграшу зростає із збільшенням степеня поліному S (порядку ПУФ), але в більшості випадків стає значимою лише при $S \geq 3$;
- величина переваги застосування ПУФ порядку S суттєво не залежить від відносної величини розладки (як середнього так і дисперсії);
- при будь-якому степені S величина виграшу зростає із збільшенням ступеня негаусовості (абсолютних значень кумулянтних коефіцієнтів вищих порядків).

8. Висновки

Сукупність наведених результатів теоретичних і експериментальних досліджень дозволяє зробити загальний висновок про потенційно високу ефективність застосування апарату розкладу в просторі з порідним елементом для вирішення задач ймовірнісної діагностики.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у тому, що на основі властивості узгодження стохастичних поліноміальних перетворень над досліджуваними негаусовими випадковими процесами, модель яких описуються статистиками вищих порядків, здійснено теоретичне обґрунтування семі-параметричного підходу до вирішення задач послідовного виявлення та ідентифікації типів розладки. Запропонований підхід є компромісними оскільки результуючі методи аналізу мають меншу аналітичну та реалізаційну складність порівняно із параметричними підходом та забезпечують підвищення точності порівняно з непараметричними методами, які не враховують реальний характер ймовірнісного розподілу статистичних даних.

Практичне значення результатів базується на тому, що запропонований підхід дозволяє зменшити розрив між модельним, як правило, гаусовим, представленням про реальні процеси та їх фактичними характеристиками. Поліноміальні обчислювальні процедури характеризуються алгоритмічною простотою та оптимізовані для забезпечення властивості адаптивності, важливої для роботи в умовах апріорної невизначеності.

Литература

1. Shewhart, W. A. Economic Control of Quality of Manufactured Product. [Text] / W. A. Shewhart. – ASQ (republished), 1931/1980. – 501 p.
2. Page, E. S. Continuous inspection schemes [Text] / E. S. Page. // Biometrika. – 1954. – V. 1. – P. 100–115.
3. Hinkley, D. Inference about the change-point in a sequence of random variables [Text] / D. Hinkley // Biometrika. – 1970. – Vol. 57. №. 1. – P. 1–17.
4. Ширяев, А. Н. Некоторые точные формулы в задаче о разладке [Текст] / А. Н. Ширяев // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Т. 10. №. 2. – С. 380–385.
5. Бродский, Б. Е. Проблемы и методы вероятностной діагностики [Текст] / Б. Е. Бродский, Б. С. Дарховский // Автоматика и телемеханіка. – 1999. – № 8. – С. 3–50.
6. Basseville, M. Detection of Abrupt Changes: Theory and Application [Text] / M. Basseville, I. V. Nikiforov. – Englewood Cliffs, N. J. : Prentice Hall, 1993.
7. Gustafsson, F. Adaptive Filtering and Change Detection [Text] / F. Gustafsson. – Wiley, 2000.
8. Бассвиль, М. Обнаружение изменения свойств сигналов в динамических системах [Текст] / М. Бассвиль. – М. : Мир, 1989. – 278 с.
9. Brodsky, B. Nonparametric Methods in Change-Point Problems [Text] / B. Brodsky, B. Darkhovsky. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1993.
10. Lokajicek, T. A First Arrival Identification System of Acoustic Emission (AE) Signals by Means of a Higher-Order Statistics Approach [Text] / T. Lokajicek, K. Klima // Measurement Science and Technology. – 2006, – Vol. 17. – P. 2461–2466.
11. Yih-Ru, Wang The signal change-point detection using the high-order statistics of log-likelihood difference functions [Text] : IEEE inter. conf. / Wang Yih-Ru // Acoustics, Speech and Signal Processing. ICASSP. – 2008. – P. 4381–4384.
12. Constantinos, S. Change Point Detection in Time Series Using Higher-Order Statistics: A Heuristic Approach [Text] / S. Hilas Constantinos, T. Rekanos Ioannis, Paris Ast // Mastorocostas. Mathematical Problems in Engineering, , Article ID 317613. – 2013. – Vol. 2013. – P. 10.
13. Yongjun, Shen Application of Higher-Order Cumulant in Fault Diagnosis of Rolling Bearing [Text] / Shen Yongjun. – J. Phys.: Conf. Ser. 448 012008, 2013.
14. Martis, R. J. Application of higher order cumulants to ECG signals for the cardiac health diagnosis [Text] / R. J. Martis, U. R. Acharya, A. K. Ray, C. Chakraborty // Engineering in Medicine and Biology Society, EMBC, 2011 Annual International Conference of the IEEE. – 2011. –P. 1697–1700.
15. Малахов, А. Н. Кумулянтный анализ негауссовских случайных процессов и их преобразований [Текст] / А. Н. Малахов. – М. : Сов. радио, 1978. – 376 с.
16. Кунченко, Ю. П. Стохастические полиномы [Текст] / Ю. П. Кунченко. – К. : Наук. думка, 2006. – 275 с.
17. Кунченко, Ю. П. Неортогональное разложение случайных величин [Текст] / Ю. П. Кунченко // Імовірнісні моделі та обробка випадкових сигналів і полів: зб. наук. пр. –1993. – Т. 2, Ч. 1. – С. 45–49.
18. Кунченко, Ю. П. Полиномы приближения в пространстве с порождающим элементом [Текст] / Ю. П. Кунченко. – К.: Наук. думка, 2003. – 243 с.
19. Драган, Я. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів [Текст] / Я. Драган. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біо-технічних систем, 1997. – 333 с.
20. Заболотній, С. В. Розклад випадкових величин у тригонометричні стохастичні ряди [Текст] / С. В. Заболотній // Відбір і обробка інформації. – 2010. – № 32(108). – С. 44–49.
21. Заболотній, С. В. Розклад корельованих дискретних випадкових процесів в стохастичні функціональні ряди з порідним елементом [Текст] / С. В. Заболотній, О. С. Гавриш // Радіоелектроніка та інформатика. – 2009. – № 1. – С. 19–22.
22. Заболотній, С. В. Розклад гаусових випадкових процесів у степеневі стохастичні ряди засобами просторів Кунченка [Текст] / С. В. Заболотній // Вісник ЧДТУ. – 2012. – № 3. – С. 74–78.
23. Заболотній, С. В. Нелінійні дискретні фільтри оптимальні за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки розкладу в просторі з порідним елементом [Текст] / С. В. Заболотній // Відбір і обробка інформації. – 2008. – № 29 (105). – С. 21–28.
24. Заболотній, С. В. Виявлення відеосигналів із застосуванням нелінійних дискретних фільтрів з постійними коефіцієнтами [Текст] / С. В. Заболотній, В. В. Коваль, С. В. Салипа // Електроніка та системи управління. – 2008. – № 3. – С. 77–83.
25. Заболотній, С. В. Рекурентне оцінювання точності формування СЛАР для адаптації параметрів узгоджених поліноміальних фільтрів [Текст] / С. В. Заболотній // Вісник НУ Львівська політехніка. Автоматика, вимірювання та керування. – 2012. – № 741. – С. 23–28.
26. Заболотній, С. Аналіз властивостей емпіричних розподілів степеневих поліноміальних узгоджених статистик [Текст] : XI міжнар. конф. / С. Заболотній // Контроль і управління в складних системах. – Вінниця: ВНТУ, 2012. – С. 20.
27. Заболотній, С. В. Спосіб генерації випадкових величин. Деклараційний патент України на корисну модель МПК G06F7/58 [Текст] / С. В. Заболотній, А. В. Чепинога, С. В. Салипа. – № 57092; заявл. 16.07.2010; опубл. 10.02.2011, Бюл. № 3.