

*Наведено результати математичного моделювання нелінійного нестационарного процесу теплопереносу в шарувато-неоднорідній системі. Виконано дослідження можливості заміщення тимчасової залежності теплопідводу, яке базується на використанні явища локалізації, простішими співвідношеннями. Показано, що таке заміщення дозволяє спростити математичну модель процесу і власне отримання розв'язку.*

*Ключові слова: математичне моделювання, нестационарний теплопідвід, явище локалізації, принцип заміщення*

*Приведены результаты математического моделирования нелинейного нестационарного процесса теплопереноса в слоисто-неоднородной системе. Выполнено базирующееся на использовании явления локализации исследование возможности замещения временной зависимости теплоподвода более простыми соотношениями. Показано, что такое замещение позволяет упростить математическую модель процесса и собственно получение решения.*

*Ключевые слова: математическое моделирование, нестационарный теплоподвод, явление локализации, принцип замещения*

# ВОЗМОЖНОСТИ ЗАМЕЩЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЙ ТЕПЛОПОДВОДА НА ОСНОВЕ ПОЛОЖЕНИЙ ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ

**В. Г. Прокопов**

Доктор технических наук,  
старший научный сотрудник

Отдел малой энергетики

Институт технической теплофизики НАН Украины  
ул. Желябова, 2а, г. Киев, Украина, 03057

E-mail: prokopov\_vg@ukr.net

## 1. Введение

Одной из актуальных задач вычислительной теплофизики и гидродинамики является повышение эффективности математического моделирования. Для решения данной проблемы могут быть использованы различные подходы. Например, такие, которые касаются введения дополнительных источников членов в уравнение энергии [1], применения смешанных моделей вихревой вязкости и подобных масштабов [2], использования метода моделирования крупных вихрей [3] или метода подвижных границ [4] и т. д. Среди различных подходов, ориентированных на указанное повышение эффективности, особо выделяется подход, связанный с применением положений теории локализации [5]. Согласно одному из принципов данной теории (принципу замещения) в определенных ситуациях ввиду проявления эффектов локализации правомерным оказывается замещение соответствующих условий однозначности на эквивалентные им в определенном смысле. Такие замещения во многих случаях позволяют существенно упростить как математическую модель процесса, так и нахождение решения. Это обуславливает актуальность исследований, посвященных анализу особенностей применения принципа замещения, т. е. изучению возможностей осуществления замен условий однозначности, базирующихся на использовании явления локализации.

## 2. Анализ литературных данных

Формулируемый в теории локализации принцип замещения может рассматриваться как развитие и обобщение ряда известных принципов, таких как принцип Сен-Венана [6], принцип местного влияния Н. Н. Рыкалина [7], принцип стабильности теплового потока А. И. Вейника [8], положение о местном во времени влиянии источника энергии В. И. Махненко [9] и пр. Каждый из указанных принципов и положений касается лишь физических процессов одной природы. Так, принцип Сен-Венана относится к механике упругого деформируемого тела, принципы Н. Н. Рыкалина и А. И. Вейника – к процессам теплопроводности и т. д. Причем, что важно подчеркнуть, эти принципы формулируются только для некоторых условий однозначности, а именно, для граничного условия или внутренних источников энергии. В принципе замещения эти ограничения отсутствуют; то есть, во-первых, он относится к физическим процессам различной природы и, во-вторых, распространяется на все без исключения условия однозначности.

В ряде работ рассматриваются отдельные вопросы, касающиеся применения принципа замещения при моделировании различных процессов переноса, в частности, для совершенствования технологии автовакуумного плакирования [10], при анализе теплового состояния деталей, испытывающих воздействия лазерного излучения [11], при формировании аморфных и нанокристаллических покрытий [12] и др.

Однако, задачи вычислительной практики требуют дальнейшего развития исследований в данном направлении.

### 3. Цель и задачи исследования

Цель данной работы заключается в анализе возможностей замещения нестационарных условий теплоподвода соответствующими стационарными аналогами при моделировании процессов теплопереноса в многослойной пластине в условиях импульсного периодического нагрева.

В задачу настоящей работы входит исследование указанных возможностей для ситуации осуществления теплоподвода к обогреваемой поверхности, а также при наличии локализованных внутренних источников энергии. При этом правомерность замещения данных условий теплоподвода рассматривается в аспекте проявления эффекта пространственной локализации их влияния.

### 4. Математическая постановка задачи теплопроводности в слоисто-неоднородной системе при импульсном периодическом теплоподводе

Рассматривается нелинейный нестационарный процесс теплопереноса в слоисто-неоднородной системе при импульсном периодическом теплоподводе (рис. 1). При этом нагрев системы может осуществляться как за счет теплоподвода  $q_{II}$  к наружной поверхности пластины, так и за счет внутренних источников энергии  $q_V$ , специальным образом распределенных в первом слое системы.

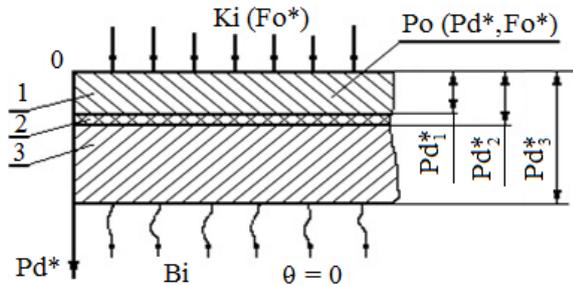


Рис. 1. К постановке задачи

Математическая модель исследуемого процесса может быть представлена в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial}{\partial Pd^*} \left( \Lambda_i(\theta) \frac{\partial \theta_i}{\partial Pd^*} \right) + Po(Pd^*, Fo^*) = C_{Vi}(\theta) \frac{\partial \theta_i}{\partial Fo^*}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Pd^*} \Big|_{Pd^*=0} = \begin{cases} -\frac{Ki_1}{\Lambda_1(\theta)} & \text{при } k-1 < Fo^* \leq k-1+Fo_u^* \\ 0 & \text{при } k-1+Fo_u^* < Fo^* \leq K, \quad k=1,2,\dots,K, \end{cases} \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial \theta_3}{\partial Pd^*} + \frac{Bi}{\Lambda_3(\theta)} \theta_3 \right) \Big|_{Pd^*=Pd_3^*} = 0, \quad (3)$$

$$\Lambda_i(\theta) \frac{\partial \theta_i}{\partial Pd^*} \Big|_{Pd^*=Pd_i^*} = \Lambda_{i+1}(\theta) \frac{\partial \theta_{i+1}}{\partial Pd^*} \Big|_{Pd^*=Pd_i^*}, \quad i=1,2, \quad (4)$$

$$\theta_i \Big|_{Pd^*=Pd_i^*} = \theta_{i+1} \Big|_{Pd^*=Pd_i^*}, \quad i=1,2, \quad (5)$$

$$\theta_i \Big|_{Fo^*=0} = \theta_0(Pd^*), \quad i=1,2,3, \quad (6)$$

$$Po(Pd^*, Fo^*) = \begin{cases} Po_1(Pd^*) & \text{при } k-1 < Fo^* \leq k-1+Fo_u^*, \\ 0 & \text{при } k-1+Fo_u^* < Fo^* \leq k, \end{cases} \quad (7)$$

$$Po_1(Pd^*) = Po_{max} \cdot f(Pd^*), \quad (8)$$

$$f(Pd^*) = \begin{cases} 1 - A(Pd^* - B)^2 & \text{при } 0 < Pd^* \leq Pd_{c1}^*, \\ C - D \cdot Pd^* & \text{при } Pd_{c1}^* < Pd^* \leq Pd_{c2}^*, \\ 0 & \text{при } Pd^* > Pd_{c2}^*. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь индекс “i” относит величины соответственно к первому, второму и третьему слоям пластины;

$$\theta = \frac{t-t_c}{t_c}, \quad Pd^* = \sqrt{Pd}, \quad Pd = \frac{x_p^2}{a_0 \tau_1}, \quad Pd_i^* = \frac{\delta_i}{\sqrt{a_0 \tau_1}},$$

$$Fo^* = \frac{Fo}{Fo_1}, \quad Fo = \frac{a_0 \tau}{\delta_3^2}, \quad Fo_1 = \frac{a_0 \tau_1}{\delta_3^2}, \quad Fo_u^* = \frac{Fo_u}{Fo_1},$$

$$Fo_u = \frac{a_0 \tau_u}{\delta_3^2}, \quad Bi = \frac{\alpha \sqrt{a_0 \tau_1}}{\lambda_0}, \quad Ki_1 = \frac{q_{II} \sqrt{a_0 \tau_1}}{t_c \lambda_0}, \quad Po = \frac{q_V a_0 \tau_1}{t_c \lambda_0},$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad C_V = \frac{c_V}{c_{V_0}}, \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{c_{V_0}},$$

$t, t_c$  – температура пластины и окружающей среды соответственно;  $x_p$  – декартова координата;  $\tau_u$  – время одного импульса;  $\tau_{c1}$  – период следования импульсов (время, равное длительности одного импульса и паузы между соседними импульсами);  $k$  – текущий номер импульса;  $K$  – число импульсов;  $\delta_i$  – суммарная толщина  $i$  слоев системы,  $\delta_i = \sum_{l=1}^i \Delta_l$ ,  $\Delta_l$  – толщина слоев;

$\lambda_0, c_{V_0}$  – фиксированные значения коэффициента теплопроводности  $\lambda$  и удельной объемной теплоемкости  $c_V$  материала соответственно;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $Po_{max}$  – максимальное значение числа Померанцева;  $f(Pd^*)$  – функция распределения плотности внутренних источников теплоты.

Графическое изображение функции  $f(Pd^*) = Po_1/Po_{max}$  дано на рис. 2. Характер изменения числа Кирпичева во времени иллюстрирует рис. 3.

В табл. 1 представлены исходные данные для рассматриваемых в работе вариантов расчетов при следующих значениях не варьируемых безразмерных параметров:  $\Lambda_2 = 0,0029$ ;  $A = 171,28$ ;  $B = 0,0433$ ;  $C = 1,851$ ;  $D = 13,923$ ;  $Pd_{c1}^* = 0,0984$ ;  $Pd_{c2}^* = 0,1329$ ;  $Pd_1^* = 0,197$ ;  $Pd_2^* = 0,2106$ ;  $Pd_3^* = 1,195$ ;  $Bi = 0,282$ .

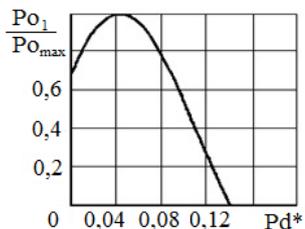


Рис. 2. Изменение относительной функции распределения плотности внутренних источников теплоты  $Po_1/Po_{max}$  по толщине пластины  $Pd^*$

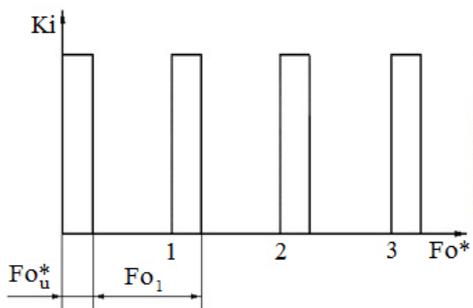


Рис. 3. Характер изменения числа  $Ki$  в зависимости от безразмерного времени  $Fo^*$

Таблица 1

Исходные данные для вариантных расчетов температурных полей

№ варианта	Характеристика температурного режима	$Po_{max}$	$Ki$	$Fo_u \cdot 10^{-4}$	$Fo_1$
1	Квазистационарный	7661,0	0	1,4	0,7
2	Стационарный	1,53	0	-	-
3	Квазистационарный	0	105,7	1,4	0,7
4	Стационарный	0	0,0212	-	-

**5. Результаты исследований возможности замещения временной зависимости теплоподвода более простыми соотношениями**

Основное внимание в статье уделяется базирующейся на использовании эффекта локализации возможности замещения таких условий однозначности, которые обуславливают в данной ситуации подвод теплоты к объекту, т. е. возможности замещения локализованных в пространстве внутренних источников  $q_V$  и теплового потока  $q_{II}$  (или соответствующих им безразмерных комплексов  $Po$  и  $Ki$ ). Здесь при анализе в первую очередь необходимо иметь в виду следующее. В исследуемых условиях процесс переноса энергии, подводимой к объекту за счет  $q_V$  и  $q_{II}$ , охватывает всю многослойную пластину, т.е. влияние  $q_V$  и  $q_{II}$  распространяется на всю рассматриваемую область. Ввиду этого речь может идти о качественной локализации влияния отмеченных условий однозначности, т.е. о прекращении влияния на процесс лишь некоторых

особенностей задания функции  $Po$  и  $Ki$  во времени и в пространстве.

Следует заметить, что если исследованию подлежат закономерности теплопереноса за пределами зоны локализации влияния тех или иных условий однозначности (т.е. в соответствующих зонах автономности), то оказываются возможными замещения этих условий однозначности, приводящие к упрощению исходной математической постановки и анализа процесса в целом.

Рассматривая возможности замещения величин  $Po$  и  $Ki$ , связанные с изменениями характера их зависимости от временной координаты, необходимо иметь в виду следующее. В данной ситуации на стадии квазистационарного режима доминирующим направлением процесса является направление вдоль оси  $Pd^*$ , поскольку на достаточном удалении от области теплоподвода наблюдается тенденция к затуханию колебаний температуры и прекращению зависимости процесса от временной координаты. Исследования показали, что в этих условиях переменность теплоподвода во времени (его импульсный характер) обуславливает существенную нестационарность процесса только в подобласти, непосредственно прилегающей к зоне подвода теплоты. На достаточном же удалении от этой зоны влияние изменения теплоподвода во времени сказывается незначительно и процесс здесь практически стационарен. Иначе говоря, в рассматриваемой ситуации на стадии квазистационарного режима в подобласти, удаленной от зоны теплоподвода, происходит асимптотическое вырождение размерности процесса с трансформацией нестационарного процесса в практически стационарный. Следует обратить особое внимание на то обстоятельство, что описанная картина прекращения зависимости процесса от времени наблюдается и в тех условиях, когда теплоподвод существенно переменен во времени. Так, в анализируемых ниже ситуациях время теплоподвода  $Fo_u$  составляет незначительную часть периода  $Fo_1$  ( $Fo_u/Fo_1 = 0,002$ ), и, тем не менее, отмеченный эффект устранения зависимости процесса от времени имеет место. Таким образом, речь здесь идет о том, что при квазистационарном режиме реализуется качественная локализация влияния чисел  $Po$  и  $Ki$  относительно всех особенностей их изменения во времени. Это позволяет осуществить замещение заданных по постановке изменяющихся во времени безразмерных комплексов  $Po$  и  $Ki$  независимыми от времени величинами. Подчеркнем, что такое замещение должно осуществляться при условии неизменности общего количества подводимой к пластине теплоты. Следовательно, на стадии квазистационарного режима при необходимости исследования теплового состояния в подобластях, достаточно удаленных от зоны теплоподвода, исходная математическая модель нестационарного процесса может быть заменена моделью стационарного процесса. При этом входящие в последнюю математическую модель величины  $Po_\tau$  ( $Pd^*$ ) и  $Ki_\tau$  определяются соотношениями

$$Po_\tau(Pd^*) = \int_0^1 Po(Pd^*, Fo^*) dFo^* = Fo_u \cdot Po_1(Pd^*), \quad (10)$$

$$Ki_\tau = \int_0^1 Ki(Fo^*) dFo^* = Fo_u \cdot Ki_1. \quad (11)$$

На рис. 4–6 сопоставлены данные, соответствующие двум указанным моделям. Здесь графики 4 и 5 отвечают результатам расчета при теплоподводе к обогреваемой поверхности и  $Po = 0$ , график 6 – при наличии внутренних источников теплоты и  $Ki = 0$ .

Рассмотрим вначале данные, касающиеся первого из отмеченных случаев. Рис. 4 иллюстрирует изменение температуры по толщине многослойной пластины. Причем, линия 1 отвечает данным стационарной задачи (вариант 4), прочие линии – результат решения нестационарной задачи (вариант 3). Как видно, наибольшие расхождения стационарного и нестационарного решений имеют место в первом слое пластины на обогреваемой поверхности. Так, максимальные значения сравниваемых температур отличаются более, чем в 5,8 раза. По мере же удаления от обогреваемой поверхности расхождения сопоставляемых температур уменьшаются и в третьем слое пластины они (указанные расхождения) пренебрежимо малы. На рис. 5 представлен характер зависимости от безразмерного времени  $Fo^*$  относительных отклонений сравниваемых температур  $\delta\theta$ , в третьем слое пластины  $\delta\theta_1 = [(\theta_I - \theta_{II}) / \theta_{I\max}] \cdot 100\%$ , где индексы I и II относят температуру к различным условиям теплоподвода: I – к переменному во времени тепловому потоку, определяемому формулой (2), II – к постоянному во времени значению  $Ki_i$ ; надстрочный индекс “max” здесь и ниже обозначает наибольшую температуру процесса при данном теплоподводе). Как следует из полученных решений, здесь величина  $|\delta\theta_1|$  не превышает 0,3 %.

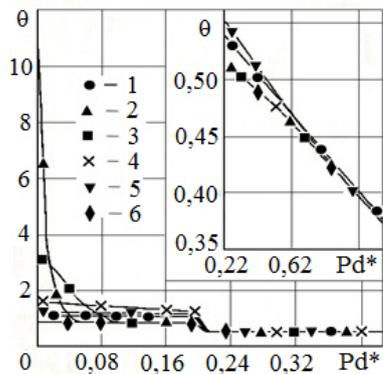


Рис. 4. Распределение температуры  $\theta$  по толщине пластины  $Pd^*$  для вариантов 3 и 4: 1 – данные стационарной задачи; 2–6 – результаты решения нестационарной задачи при  $Fo^* = 2 \cdot 10^{-4}$ ;  $1 \cdot 10^{-3}$ ;  $1 \cdot 10^{-2}$ ;  $2,5 \cdot 10^{-1}$ ; 1 соответственно

Рассмотрим вкратце результаты расчетов, касающиеся второго из отмеченных случаев, когда теплоподвод осуществляется только за счет внутренних источников теплоты (варианты 1, 2). Рис. 6 иллюстрирует реализуемое в этих условиях изменение температуры по толщине пластины. Приведенные данные свидетельствуют, что картина соотношения температур, соответствующих указанным различным решениям, в целом здесь аналогична описанной выше. Однако имеют место и определенные различия. Эти различия обнаруживаются при сопоставлении

результатов расчетов, отвечающих вариантам 1, 2 и 3, 4. Данные варианты отличаются друг от друга только условиями теплоподвода. Для вариантов 1, 2 заданным является число  $Po$  при  $Ki=0$ , для 3, 4 – число  $Ki$  при  $Po=0$  причем между величинами  $Po$  и  $Ki$  соблюдается соотношение

$$Ki = \int_0^{Pd^*} Po \cdot dPd^* \tag{12}$$

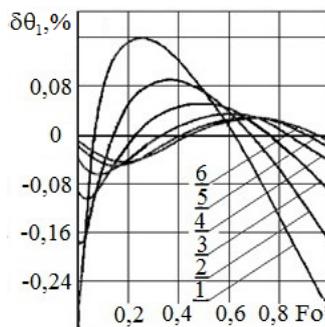


Рис. 5. Изменения относительного отклонения температуры  $\delta\theta$  в зависимости от безразмерного времени  $Fo^*$  в различных точках третьего слоя: 1 –  $Pd^*=0,2106$ ; 2 –  $Pd^*=0,4075$ ; 3 –  $Pd^*=0,6044$ ; 4 –  $Pd^*=0,8013$ ; 5 –  $Pd^*=0,9981$ ; 6 –  $Pd^*=1,1950$

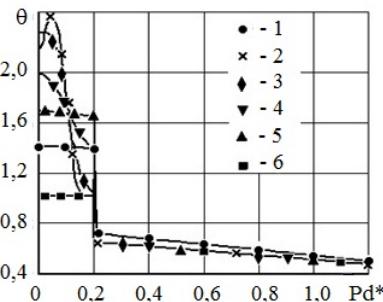


Рис. 6. Распределение температуры  $\theta$  по толщине пластины  $Pd^*$  для вариантов 1 и 2: 1 – данные стационарной задачи; 2 – 6 – результаты решения нестационарной задачи при  $Fo^* = 2 \cdot 10^{-4}$ ;  $1 \cdot 10^{-3}$ ;  $5 \cdot 10^{-3}$ ;  $2 \cdot 10^{-1}$ ; 1 соответственно

Анализ результатов численных исследований показывает, что отличие максимальных температур, отвечающих стационарной и нестационарной задачам, существенно выше при наличии теплоподвода к обогреваемой поверхности (варианты 3, 4), чем при задании внутренних источников энергии (варианты 1, 2); величины отношения этих температур равны для указанных случаев соответственно 5,8 и 1,4. Что же касается расхождения сопоставляемых температур в третьем слое пластины, то оно оказывается пониженным для ситуаций, отвечающих  $Po = 0$  при  $Ki > 0$ . Так, здесь при задании внутренних источников энергии и  $Ki=0$  относительные отклонения температур, отвечающих нестационарной и стационарной задачам,  $\delta\theta_2$  достигают – 3,5 %, при теплоподводе же к обогреваемой поверхности и  $Po = 0$  величины  $\delta\theta_1$  не превышают – 0,3 %  $\delta\theta_2 = [(\theta_{III} - \theta_{IV}) / \theta_{III\max}] \cdot 100\%$ , где индексы III и IV относят температуру к различным

условиям теплоподвода: III – к переменной во времени и в пространстве величине  $Ro$  ( $Pd^*, Fo^*$ ), определяемой зависимостями (7)–(9), IV – к неизменному во времени значению  $Ro_\tau$  ( $Pd^*$ ). Причем, в последнем случае меньше также и размеры зоны существенных различий сравниваемых температур. Иначе говоря, размеры зоны качественной локализации влияния переменности теплоподвода во времени в рассматриваемых условиях меньше для ситуаций, в которых  $Ki > 0$ ,  $Ro = 0$ . И, следовательно, при замещении переменной во времени величины  $Ki(Fo^*)$  постоянной обеспечиваются большие, чем при наличии внутренних источников энергии, размеры подобласти, которая характеризуется незначительными отличиями данных, соответствующих различным математическим моделям.

## 6. Выводы

Выполнено математическое моделирование температурных режимов многослойной пластины в условиях импульсного периодического нагрева. На основе учета эффектов локализации выполнен анализ возможности замещения нестационарных условий тепло-

подвода соответствующими стационарными аналогами. При этом показано, что:

1. Наличие эффекта локализации влияния условий теплоподвода позволяет заменить функциональные зависимости теплоподвода более простыми, вплоть до постоянных во времени величин. Это дает возможность при исследовании теплопереноса за пределами соответствующих зон локализации упростить математическую модель процесса, нахождение решения и анализ полученных результатов.

2. Отличия решений, отвечающих стационарной и нестационарной моделям, при наличии теплоподвода к обогреваемой поверхности и задании внутренних источников энергии соотносятся между собой следующим образом:

а) в удаленном от области теплоподвода третьем слое пластины данные отклонения оказываются пониженными в случае теплоподвода к обогреваемой поверхности;

б) размеры подобласти, которая отвечает незначительным отклонениям стационарного и нестационарного решений, являются заметно большими при теплоподводе к поверхности нагрева по сравнению с заданием внутренних источников энергии.

## Литература

1. Wang, S. J. A comparative study of five low Reynolds number  $k-\epsilon$  models for impingement heat transfer [Text] / S. J. Wang, A. S. Mujumdar // Applied Thermal Engineering. - 2005. – Vol. 25, Issue 1. – P. 31–44. doi:10.1016/j.applthermaleng.2004.06.001
2. Sagaut, P. Multiscale and multisolution approached in turbulence [Text] / P. Sagaut, S. Deck, M. Terracol. – London: Imperial College Press, 2006. – 356 p.
3. Zhou, L. X. Simulation of 3D gas-particle flows and coal combustion in a tangentially fired furnace using a two-fluid-trajectory model [Text] / L. X. Zhou, L. Li., R. X. Li, J. Zhang // Powder Technology. – 2002. – Vol. 125, Issue 2-3. – P. 226–223. doi:10.1016/s0032-5910(01)00510-1
4. Xia, H. Detached-eddy simulation for synthetic jets with moving boundaries [Text] / H. Xia, N. Qin // Modern Physics Letters. Series B. – 2005. – Vol. 19, Issue 28–29. – P. 1429–1434. doi:10.1142/s0217984905009584
5. Прокопов, В. Г. Основы теории локализации [Текст] / В. Г. Прокопов, Н. М. Фиалко, Ю. В. Шеренковский. – Киев: ИТТФ НАН Украины, 2003. – 200 с.
6. Saint-Venant, B. Memoire sur la torsion des prismes, etc. [Text] / B. Saint-Venant // Mem. des Savants Etrangers. - 1855. – Vol. 14. - P. 233–560.
7. Рыкалин, Н. Н. Тепловые основы сварки. Ч. 1. [Текст] / Н. Н. Рыкалин. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – 271 с.
8. Вейник, А. И. Теория приближенного подобия в явлениях теплопроводности [Текст] / А. И. Вейник // Журн. техн. физики. – 1950. – Т. 20, № 3. – С. 295–307.
9. Махненко, В. И. Тепловые процессы при механизированной наплавке деталей типа круговых цилиндров [Текст] / В. И. Махненко, Т. Г. Кравцов. – Киев: Наук. думка, 1976. – 156 с.
10. Фиалко, Н. М. Теплофизика энергосберегающих технологий для энергетики [Текст] / Н. М. Фиалко, В. Г. Прокопов. – Киев: ИТТФ НАНУ, 2000. – 214 с.
11. Фиалко, Н. М. Математическое моделирование энергосберегающих технологий для энергетики [Текст] / Н. М. Фиалко, В. Г. Прокопов. – Киев: ИТТФ НАНУ, 2002. – 229 с.
12. Шпак, А. П. Теплофизика формирования аморфных и нанокристаллических газотермических покрытий. Математические модели. [Текст] / А. П. Шпак, Н. М. Фиалко, В. Г. Прокопов и др. – Киев: Академперіодика, 2005. - 120 с.