В роботі розглядається принцип максимуму суб'єктивної ентропії. Запропоновано два варіанти суб'єктивного ризику: для предметних альтернатив та рейтингових альтернатив. Введено додаткове припущення про структурованість ентропійного простору.

Запропонована теорія може слугувати для вдосконалення методів управління активними системами аналізу процесів самоуправління

Ключові слова: суб'єктивний ризик, ентропія, предметні та рейтингові переваги, ентропійні пороги, рейтинг

В работе рассматривается принцип максимума субъективной энтропи. Предложено два варианта субъективного риска: для предметных альтернатив и рейтинговых альтернатив. Введено дополнительное предположение о структурированности энтропийного пространства.

Предлагаемая теория может служить основой для совершенствования методов управления активными системами анализа процессов самоуправления

Ключевые слова: субъективный риск, энтропия, предметные и рейтинговые предпочтения, энтропийные пороги, рейтинг

УДК 347.822.4 (045)

СУБЪЕКТИВНЫЙ РИСК ДЛЯ ПРЕДМЕТНЫХ И РЕЙТИНГОВЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

В. А. Касьянов
Доктор технических наук, профессор
Кафедра механики
Национальный авиационный университет
пр. Космонавта Комарова, 1, г. Киев, Украина, 03058
E-mail: vakasyanov@mail.ru

1. Введение

В работе предлагается модель «субъективного риска» и в этом смысле она является развитием идей, лежащих в основе «субъективного анализа» [1–3].

«Субъективный риск» используется в качестве «функции потерь» в вариационных задачах, предназначенных для получения распределения предпочтений I и II рода (предметных предпочтений и рейтинговых предпочтений).

Наряду с введенными ранее [1, 2] энтропийными порогами, предлагается ввести в рассмотрение пороги функции субъективного риска, которые, по мнению автора, могут быть связаны с достаточными условиями принятия решений на множествах S_a и S_ξ.

В работе не затрагиваются все возможные постановки и теоретические схемы, которые возникают в связи с многообразием представления предметных и рейтинговых энтропий, в частности, с большим кругом нестационарных задач, использующих рекурсивные схемы.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

С теорией байесовского риска мы знакомы благодаря М. Де Грооту [4]. Но ее развитие применительно к активным системам было получено в опубликованной ранее статье [5]. Переформулируем теорию байесовского риска таким образом, чтобы соединить её с основным принципом субъективного анализа – принципом максимума субъективной энтропии предпочтений и, тем самым ввести «субъективный байесовский риск» (SBR).

На сегодняшний день актуальной является задача моделирования таких систем, в центре которых находится субъект. Поэтому предлагается использование принципа максимума субъективной энтропии для достижения этой цели. Кроме этого, не в каждой задаче есть возможность рассчитать происходящие процессы с достоверной вероятностью. В таких случаях предлагается заменять условные вероятности на субъективные, что дает больше возможностей для моделирования.

3. Цель и задачи исследования

Целью данной статьи является предложение альтернативного взгляда на моделирование процессов, в которых присутствует субъект (человек).

Для этого необходимо решить несколько задач:

– нахождение моделей предметных и рейтинговых предпочтений;

– введение энтропийных порогов и порогов для риска;

– нахождение рейтинговых дифференциальных предпочтений в системах, ориентированных на агрегированные распределения.

4. Субъективный байесовский риск для предметных предпочтений

Рассмотрим критерий байесовского риска в простейшем случае, когда имеется две стратегии (или две альтернативы) σ_1 и σ_2, соответственно первая гипотеза состоит в том, что принимается стратегия σ_1, вторая – в том, что принимается стратегия σ_2. Пусть a – существенный параметр, который определяет тип ситуации, C – множество ситуаций и пусть подмножества A_1 и A_2 таковы, что $A_1 \subset C; A_2 \subset C; A_1 \cap A_2 = \varnothing; A_1 \cup A_2 = C$.

Пусть $p(\sigma_1)$ – априорная вероятность принятия стратегии σ_1, $p(\sigma_2)$ – априорная вероятность принятия стратегии σ_2. $P(a \in A_1|\sigma_1)$ – вероятность попадания значения параметра a в A_1 при условии принятия гипотезы (стратегии) σ_1, $p(a \in A_1|\sigma_1)$ – вероятность попадания a в A_1 при условии принятия гипотезы (стратегии) σ_2. Вероятности $p(a \in A_2|\sigma_1)$ и $p(a \in A_2|\sigma_2)$ определяются аналогично.

Положим что c_{11} есть «штраф» или плата при выборе гипотезы σ_1 и попадании a в A_1, аналогично определим c_{12}, c_{21}, c_{22}.

Определим байесовский риск формулой:

$$\begin{aligned} R_B = {} & c_{11}p(\sigma_1)p(a \in A_1|\sigma_1) + \\ & + c_{12}p(\sigma_2)\cdot p(a \in A_1|\sigma_2) + \\ & + c_{21}p(\sigma_1)p(a \in A_2|\sigma_1) + \\ & + c_{22}p(\sigma_2)\cdot p(a \in A_2|\sigma_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Сделаем теперь неформальный шаг: заменим априорные вероятности $p(\sigma_1)$ и $p(\sigma_2)$ на показатели предпочтений (или проще – на «предпочтения») $\pi(\sigma_1)$ и $\pi(\sigma_2)$.

Эти предпочтения выбираются как решение вариационной задачи [6,7] с функционалом:

$$\begin{aligned} \Phi_\pi = {} & -\big(\pi(\sigma_1)\ln\pi(\sigma_1) + \pi(\sigma_2)\ln\pi(\sigma_2)\big) \pm \\ & \pm\beta\big(\pi(\sigma_1)F_1(\sigma_1) + \pi(\sigma_2)F_2(\sigma_2)\big) + \gamma\big(\pi(\sigma_1) + \pi(\sigma_2)\big). \end{aligned} \tag{2}$$

Вводится субъективный байесовский риск:

$$\begin{aligned} R_{SB} = {} & c_{11}\pi(\sigma_1)p(a \in A_1|\sigma_1) + c_{12}\pi(\sigma_2)p(a \in A_1|\sigma_2) + \\ & + c_{21}\pi(\sigma_1)p(a \in A_2|\sigma_1) + c_{22}\pi(\sigma_2)p(a \in A_2|\sigma_2). \end{aligned} \tag{3}$$

В формуле (2) $F_i(\sigma_i)$ мы называем «когнитивными функциями». Последний член в этой формуле отражает условие нормировки: $\pi(\sigma_1) + \pi(\sigma_2) = 1$.

4. 1. Вариационная задача для предметных предпочтений

Функционал (2) в частном случае может быть выбран в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_\pi = {} & -\big(\pi(\sigma_1)\ln\pi(\sigma_1) + \pi(\sigma_2)\ln\pi(\sigma_2)\big) \pm \\ & \pm\beta\left\{\begin{aligned} & c_{11}\pi(\sigma_1)p(a \in A_1|\sigma_1) + c_{12}\pi(\sigma_2)p(a \in A_1|\sigma_2) + \\ & + c_{21}\pi(\sigma_1)p(a \in A_2|\sigma_1) + c_{22}\pi(\sigma_2)p(a \in A_2|\sigma_2) + \end{aligned}\right\} + \\ & + \gamma\sum\big(\pi(\sigma_1) + \pi(\sigma_2)\big). \end{aligned} \tag{4}$$

Возникает вопрос: откуда брать условные вероятности $p(a \in A_S|\sigma_k); S \in \overline{1,L}; k \in \overline{1,N}$?

Если сформулирована соответствующая стохастическая задача (например, задача стохастической управляемости или достижимости) и известно описание всех процессов, то они могут быть получены расчетом [8, 9]. Но, если такие расчеты с достаточной достоверностью сделать невозможно [10], то условные вероятности можно считать субъективными вероятностями, понимаемыми так, как это сделано, например, в монографии [4]. Такие условные субъективные вероятности будем обозначать: $\hat{p}(a \in A_S|\sigma_k)$. Принимая это обозначение в функционале (4), найдем модели предпочтений из уравнений:

$$\frac{\partial\Phi_\pi}{\partial\pi(\sigma_k)} = 0; \quad (k \in \overline{1,N}). \tag{5}$$

Из (5) находим:

$$-\ln\pi(\sigma_1) - 1 \pm \beta\big(c_{11}p(a \in A_1|\sigma_1) + c_{21}p(a \in A_2|\sigma_1)\big) + \gamma = 0,$$

$$-\ln\pi(\sigma_2) - 1 \pm \beta\big(c_{12}p(a \in A_1|\sigma_2) + c_{22}p_a(a \in A_2|\sigma_2)\big) - \gamma = 0.$$

Отсюда

$$\pi(\sigma_1) = \frac{e^{\pm\beta\left(c_{11}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_1) + c_{21}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_1)\right)}}{e^{\pm\beta\left(c_{11}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_1) + c_{21}\hat{p}(a\in A_2|\sigma\ )\right)} + e^{\pm\beta^1\left(c_{12}\hat{p}(a\in A_1|\sigma_2) + c_{22}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_2)\right)}}, \tag{6}$$

$$\pi(\sigma_2) = 1 - \pi(\sigma_1).$$

Сравнивая (2) и (4) мы видим, что в качестве когнитивных функций выступают величины:

$$\begin{aligned} & F_1(\sigma_1) = c_{11}\hat{p}(a \in A_1|\sigma_1) + c_{21}\hat{p}(a \in A_2|\sigma_1); \\ & F_2(\sigma_2) = c_{12}\hat{p}(a \in A_1|\sigma_2) + c_{22}\hat{p}(a \in A_2|\sigma_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что условные вероятности удовлетворяют условиям нормировки:

$$\begin{aligned} & \hat{p}(a \in A_1|\sigma_1) + \hat{p}(a \in A_2|\sigma_1) = 1; \\ & \hat{p}(a \in A_1|\sigma_2) + \hat{p}(a \in A_2|\sigma_2) = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая условия нормировки и когнитивные функции можно получить модели предпочтений, которые непосредственно нас интересуют.

4. 2. Субъективный рейтинговый риск

По аналогии с тем, как это было сделано выше для предметных предпочтений $\pi(\sigma_i)$ (I-го рода), введем байесовский риск, связанный с выбором «исполнителя». Стратегия в данном случае состоит в выборе «исполнителя» и Σ_m из определенной группы субъектов S_ξ.

Положим, что Σ_m – обозначение субъекта из «группы» S_ξ. Априорная вероятность выбора Σ_m есть $p(\Sigma_m)$ и $\hat{p}(a \in A_j q|\Sigma_m)$ – условная вероятность попадания a в A_j, ($a \in A_j$), если в качестве исполнителя задачи будет выбран субъект Σ_m, наконец c_{mj} – цена (риск) связанная с выбором Σ_m. c_{mj} может быть, например, связана с вознаграждениями субъекта Σ_m – исполнителя. Объективный байесовский риск должен быть представлен в форме:

$$\begin{aligned} R_B = {} & c_{11}p(\Sigma_1)\hat{p}(a \in A_1|\Sigma_1) + c_{12}p(\Sigma_2)\hat{p}(a \in A_1|\Sigma_2) + \\ & + c_{21}p(\Sigma_1)\hat{p}(a \in A_2|\Sigma_1) + c_{22}p(\Sigma_2)\hat{p}(a \in A_2|\Sigma_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда субъективный риск такого выбора есть:

$$\begin{aligned} R_{SB} = {} & c_{11}\xi(\Sigma_1)\hat{p}(a \in A_1|\Sigma_1) + c_{12}\xi(\Sigma_2)\hat{p}(a \in A_2|\Sigma_2) + \\ & + c_{21}\xi(\Sigma_1)\hat{p}(a \in A_2|\Sigma_1) + c_{22}\xi(\Sigma_2)\hat{p}(a \in A_2|\Sigma_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\xi(\Sigma_m)$ – рейтинговый коэффициент субъекта Σ_m.

Введем рейтинговые когнитивные функции:

$$\begin{aligned}&G_1(\Sigma_1)=c_{11}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_1)+c_{21}\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_1);\\&G_2(\Sigma_2)=c_{12}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_2)+c_{22}\hat{p}(a\in A_2|\sigma_2)\end{aligned}. \quad (11)$$

В формуле (9) была произведена замена $\hat{p}(a\in A_j q|\Sigma_m)$, т.е. условной вероятности попадания a в A_j, ($a\in A_j$) на $\xi(\Sigma_m)$ – рейтинговый коэффициент субъекта. А теперь перейдем непосредственно к постановке вариационной задачи.

4. 3. Вариационная задача для рейтинговых предпочтений

Распределения $\xi(\Sigma_j)j$ подчинены, как и предметные распределения, определенному вариационному принципу. Соответствующий функционал запишем в виде:

$$\begin{aligned}&\Phi_\xi=-\left(\xi(\Sigma_1)\middle|\ln\xi(\Sigma_1)+\xi(\Sigma_2)\middle|\ln\alpha(\Sigma_2)\right)-\\&-\beta_\xi(c_{11}\xi(\Sigma_1)\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_1)+\\&+c_{12}\xi(\Sigma_2)\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_2)++c_{21}\xi(\Sigma_1)\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_1)+\\&+c_{22}\xi(\Sigma_2)\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_2)+\gamma_\xi\left(\xi(\Sigma_1)+\xi(\Sigma_2)\right).\end{aligned} \quad (12)$$

Условие нормировки рейтинговых коэффициентов:

$$\xi(\Sigma_m)=\frac{e^{-\beta_\xi\left(c_{m1}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_m)+c_{m2}\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_m)\right)}}{e^{-\beta_\xi\left(c_{m1}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_m)+c_{m2}\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_m)\right)}+e^{-\beta_\xi\left(c_{m1}\hat{p}(a\in A_1|\Sigma_m)+c_{m2}\hat{p}(a\in A_2|\Sigma_m)\right)}}. \quad (13)$$

$\xi(\Sigma_1)+\xi(\Sigma_2)=1$

Из условия: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi(\Sigma\ )}$ имеем:

Обобщение

В общей форме функционал над множеством S_a имеет вид:

$$\Phi_\pi=H_\pi+\beta_\pi R_{SB_\pi}+\gamma_\pi N_\pi\to\max(\pi\in\Pi). \quad (14)$$

Здесь H_π – субъективная энтропия, $R_{SB\pi}$ – субъективный риск, зависящий от распределения предметных предпочтений, $\gamma_\pi N_\pi$ – член, обусловленный наличием условия нормировки.

Функционал для рейтинговых предпочтений (над множеством S_ξ) представляется так:

$$\Phi_\xi=H_\xi+\beta_\xi R_{SB\xi}+\gamma_\xi N_\xi\to\max(\xi\in Z). \quad (15)$$

Здесь в (14) и (15) предполагается, что все функции, содержащиеся в функционалах (12) и (15) определены в один и тот же момент времени. Таким образом, принципы (10) и (15) являются статическими в том смысле, что изменение эндогенной и экзогенной обстановки мгновенно отражается на величине предпочтений и их распределений.

Пусть теперь количество предметных альтернатив равно N: $k\in\overline{1,N}$; а количество подмножеств A_j равно L, тогда:

$$\Phi_\pi=-\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k)\ln\pi(\sigma_k)-\beta\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_n)\sum_{j=1}^{L}c_{kj}p(a\in A_j|\sigma_n)+\gamma\sum_{k=1}^{N}\pi(\sigma_k) \quad (16)$$

и соответственно:

$$\Phi_\xi=-\sum_{m=1}^{M}\xi(\Sigma_m)\ln\xi(\Sigma_m)-\beta_\xi\sum_{m=1}^{M}\sum_{S=1}^{L}c_{ms}\xi(\Sigma_m)\hat{p}(A_s|\Sigma_m)+\gamma_\xi\sum_{m=1}^{M}\xi(\Sigma_m). \quad (17)$$

Подразумевается, что рейтинги $\xi(\Sigma_m)$ сформированы в сознании некоего субъекта «q».

Если рассматриваются дифференциальные предпочтения – рейтинги, отнесенные к определенной альтернативе $\sigma_k\in\sigma_a$, то можно воспользоваться подобным функционалом относительно распределения $\xi(\Sigma_m|\sigma_k)$ и, соответственно, вероятностью $\hat{p}(A_s|\Sigma_m,\sigma_k)$.

Функционалы (16) и (17) порождают распределения:

$$\pi(\sigma_k)=\frac{e^{-\beta_\pi\sum_{s=1}^{L}c_{kj}\hat{p}(A_j|\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{N}e^{-\beta_\pi\sum_{j=1}^{L}c_{qj}\hat{p}(A_j|\sigma_q)}} \quad (18)$$

и

$$\xi(\Sigma_m|\sigma_k)=\frac{e^{-\beta_\xi\sum_{s=1}^{L}c_{ms}\hat{p}(A_s|\Sigma_m,\sigma_k)}}{\sum_{q=1}^{M}e^{-\beta_\xi\sum_{s=1}^{L}c_{qs}\hat{p}(A_s|\Sigma_q,\sigma_k)}}. \quad (19)$$

Заметим, что если использовать байесовский риск, выраженный через априорные вероятности $p(\sigma_k)$ и вероятностную энтропию:

$$H_p=-\sum_{k=1}^{N}p(\sigma_k)\ln p(\sigma_k), \quad (20)$$

то получаются формально в точности такие же формулы как в случае (16), (17) с теми же численными значениями при прочих равных условиях с той лишь разницей, что условные вероятности не считаются субъективными.

При этом, однако, необходимо сделать предположение о применимости принципа Джейнса [3] к психическим процессам, в том числе, о свойствах множества альтернатив.

5. Пороги для энтропии и пороги для риска

Ранее [2] в рассмотрение были введены характерные значения энтропии: пороги $H_\pi^*, H_\pi^{**}, H_{*\pi}$.

Под H^* понималось такое значение предметной энтропии, что выполнение неравенства $H_\pi<H_\pi^*$ являлось необходимым условием «принятия решения» – выбора на S_a.

Считалось, что если $H_\pi>H_\pi^*$, то альтернативы плохо различимы. При этом дополнительным условием было пересечение энтропийного порога H_π^* «сверху вниз», то есть $\dot{H}_\pi^*|t^*<0$, где t_H^* – момент пересечения энтропийного порога H_π^* (рис. 1).

Под H_π^{**} подразумевается такое пороговое значение $H_\pi^{**}>H_\pi^*$, что при выполнении условия $H_\pi>H_\pi^{**}$ невозможна никакая разумная деятельность: психика находится в состоянии стресса (истерики) $H_\pi^{**} < H_{\pi\max} = \ln N$.

$H_{\pi\max}$ – это такая энтропия, которая не может быть для данного субъекта достигнута.

Область $H_\pi \in [H_{*\pi}, 0]$ считается «областью Зомби»: не существует метода $H_{*\pi}$ и ресурсов способных вернуть объекта в область продуктивной производственной и рассудочной психической деятельности (рис. 2).

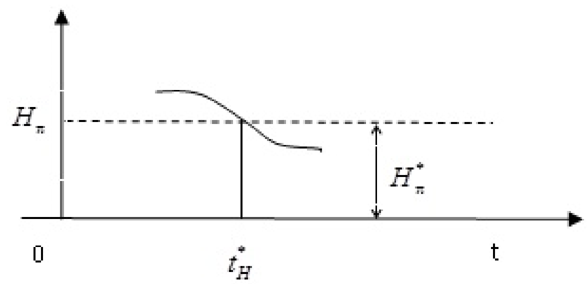

Рис. 1. Необходимое условие принятия решения, где H_π^* — энтропийный порог, а t — время

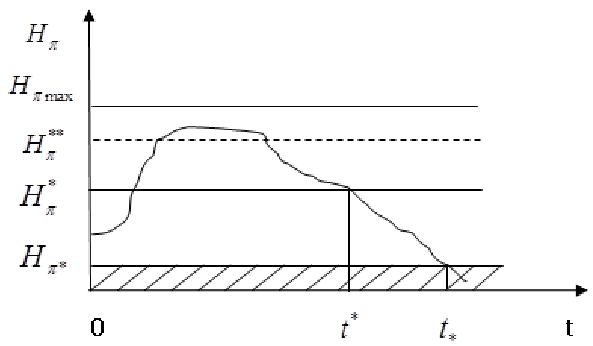

Рис. 2. Энтропийные пороги: $H_{\pi\max}$ — максимальная энтропия, H_π^{**} — порог стресса, H_π^* — порог принятия решения, $H_{*\pi}$ — порог «Зомби», а t — время

Напомним, что была предложена [2] схема оценки стоимости субъективной информации, в частности, стоимостей, связанных с переводом системы с одной энтропийной границы к другой: $H_{\max} \to H_\pi^{**}; H_\pi^{**} \to H_\pi^*; H_\pi^* \to H_{*\pi}; H_{*\pi} \to 0$

Существующие формулы носят формальный характер, так как тип ресурсов каждый раз необходимо определить. Наличие в явном виде количественных соотношений, связывающих величину предпочтений с ресурсами, позволяет вычислить изменения предпочтений при изменении ресурсной ситуации и, тем самым, решить задачу определения (оценки) потребных ресурсов для изменения предпочтений (может быть – ориентации субъекта на множестве S_a).

При этом, конечно, необходимо учитывать эффект множественного информационного и ресурсного взаимодействия между субъектами в группе.

Решение этой последней задачи можно будет получить, если удастся предложить модель информационного взаимодействия субъектов в группе (эффекты кумуляции, демпфирования и т. д.)

Энтропийные пороги, как пороги субъективного риска, служат важными показателями индивидуальной психики.

Существует очевидная задача – задача управления порогами, так как они могут изменяться со временем, и их величина определяет поведение субъектов и группы субъектов. Поэтому необходимо располагать моделями динамики порогов.

Если построить для функции риска график, аналогичный графику на (рис. 1), то заметим, что если выполняется условие $R_{BS} > R_{BC}^*$, то это служит достаточным условием для выбора альтернативы (стратегии) σ_k (рис. 3).

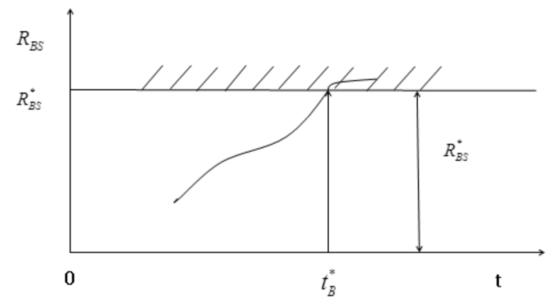

Рис. 3. График функции риска; R_{BS} — субъективный байесовский риск, R_{BS}^* — порог субъективного байесовского риска, t_B^* — момент наступления события $R_{BS} > R_{BS}^*$

Время t_B^* – есть момент наступления события $R_{BS} > R_{BS}^*$. В качестве дополнительного условия возьмем, что в момент t_B^* $\dot{R}_{BS} > 0$, т. е. риск возрастает.

Итак, рис. 1 демонстрирует необходимое условие выбора, а рис. 3 – достаточное условие выбора.

Время t_B^* – есть момент наступления события $R_{BS} > R_{BS}^*$. В качестве дополнительного условия возьмем, что в момент t_B^* $\dot{R}_{BC} > 0$, т. е. риск возрастает.

Рассмотрим совмещенный график, на котором изобразим обе зависимости: $H_\pi(t)$ и $R_{SB}(t)$ – рис. 4.

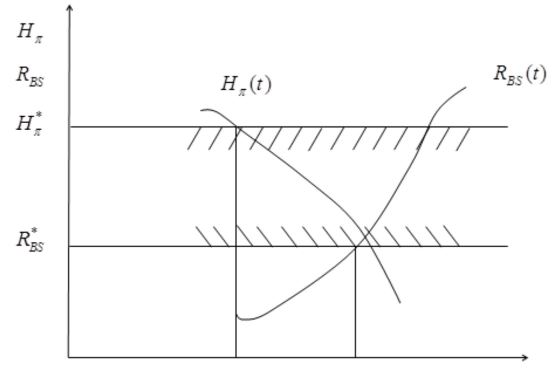

Рис. 4. Совмещенный график, на котором изображено обе зависимости: $H_\pi(t)$ и $R_{SB}(t)$ при $t_{R_{SB}}^* > t_H^*$

На представленной ниже диаграмме показана ситуация, когда $t_H^* < t_{R_{SB}}^*$, т. е. условие для распознавания ситуации складываются раньше, чем возникло условие, вынуждающее принять решение (сделать выбор на S_a) – рис. 5.

На данном рисунке изображена другая ситуация. Здесь $t_{R_{SB}}^* < t_H^*$, т.е. условия, вынуждающие принять решение: $R_{SB} > R_{SB}^*$ возникают раньше, чем появляется такая возможность, т.е. достаточная различимость альтернатив: (выполняется неравенство $H \le H_\pi^*$).

Если решение принимается в момент t^*, то избыточная неопределенность определяется величиной $\Delta H^* = H_\pi - H_\pi^*$. Если решение принимается в момент t_H^*, то в момент принятия решения степень избыточной неопределенности равна $H_\pi^{(t)} - H_\pi^* = 0$, а риск превышает порог на величину $R_{SB} - R_{SB}^* > 0$.

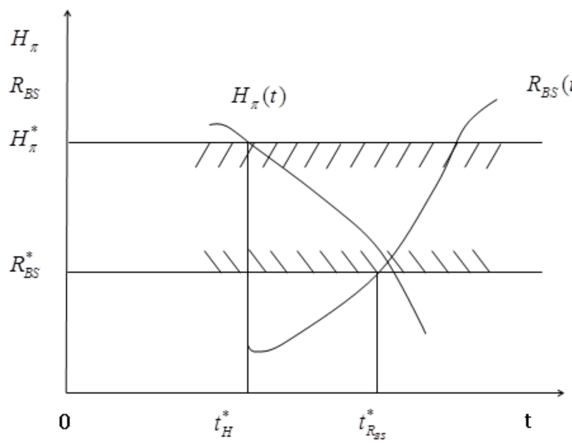

Рис. 5. Совмещенный график, на котором изображено обе зависимости: $H_\pi(t)$ и $R_{SB}(t)$ при $t_{R_{SB}}^* < t_H^*$

Предполагается, что пороги H_π^* и R_{SB}^* являются подвижными и зависят в первую очередь от мгновенных значений H_π и R_{SB}:

$$H_\pi^* = f(H_\pi, R_{SB}),$$
$$R_{SB}^* = g(H_\pi, R_{SB}). \tag{21}$$

Отсюда получим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dH^*}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial H_\pi}\cdot \dot{H}_\pi + \frac{\partial f}{\partial R_{SB}}\cdot \dot{R}_{SB}, \\ \frac{dR^*}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial H_\pi}\cdot \dot{H}_\pi + \frac{\partial g}{\partial R_{SB}}\cdot \dot{R}_{SB}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Эти уравнения дают возможность в дальнейшем учитывать изменения энтропийных порогов и порогов риска.

6. Модели с комбинированной энтропией и распределениями, которые зависят от времени

В этом разделе мы рассматриваем системы, ориентированные на агрегированные распределения. В качестве такого распределения выберем следующее:

$$\pi_j^\Sigma(\sigma_k, t) = \sum_{i=1}^{M} \pi_i(\sigma_k, t)\cdot \xi(j - i|\sigma_k, t). \tag{23}$$

Здесь $\pi_j^\Sigma(\sigma_k, t)$ – агрегированное предпочтение σ_k субъекта *j*. $\pi_i(\sigma_k, t)$ – индивидуальное предпочтение.

Составим функционал:

$$\begin{aligned} \Phi_{j,k,t,t-1} &= -\sum_{i=1}^{M} \pi_i(\sigma_k, t)\times \\ &\times \xi(j\to i|\sigma_k, t)\ln \pi_i(\sigma_k, t)\xi(j\to i|\sigma_k, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{M} \pi_i(\sigma_k, t)\cdot \xi(j\to i)|\sigma_k, t)\times \\ &\times \ln + \Big[\alpha_s\big(\pi_i(\sigma_k, t-1)\cdot \xi(g\to i|\sigma_k, t-1)\big) + \\ &+ \exp\Big(\beta_j \sum_{s=1}^{L} r_{sk}\hat{p}_j(A_s|\sigma_k, t-1)\Big)\Big] + \\ &+ \gamma_j \sum_{i=1}^{M} \xi(j\to i)|\sigma_k, t). \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\xi(j\to i|\sigma_k, t)$ – «профессиональный» рейтинг (относительно σ_k) субъекта «*i* в глазах *j*», *L* – количество областей $A_s \subset S_a$. Используя этот функционал, «принадлежащий *j*» найти предметное распределение $\pi_i(\sigma_k, t)$, «принадлежащее *i*» невозможно, так как «*j* не управляет *i*», «*j* агрегирует предпочтение *i*» если они уже сложились к моменту *t*-1 и подстраивает свои предпочтения к предпочтениям $i \in S_\xi$ с помощью процедуры агрегирования.

Таким образом, функционал (24) можно использовать для определения рейтинговых дифференциальных предпочтений $\xi(j\to i|\sigma_k, t)$ в момент *t*. При этом обеспечивается рекурсивная процедура.

Вычислим условие экстремума функционала (24):

$$\frac{\partial \Phi_{j,k,t,t-1}}{\partial \xi(j\to i|\sigma_k, t)} = 0; \quad \begin{matrix} j \in \overline{1,M} \\ k \in \overline{1,N} \end{matrix}. \tag{25}$$

Далее по (24)

$$\begin{aligned} &-\pi_i(\sigma_k, t)\ln \pi_i(\sigma_k, t)\xi(j\to i|\sigma_k, t) - \pi_i(\sigma_k, t) + \pi_i(\sigma_k, t)\times \\ &\times \ln\Big[\alpha_j \pi(\sigma_k, t-1)\cdot \xi(j\to i|\sigma_k, t-1) + \\ &+ \exp\beta_j\Big(\sum_{s=1}^{L} r_{sk}\hat{p}_i(A_s|\sigma_k, t-1)\Big)\Big] + \\ &+ \gamma_j = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &-\ln \pi_i(\sigma_k, t)\xi(j\to i|\sigma_k, t) - 1 + \\ &+ \ln\Big[\alpha_j \pi(\sigma_k, t-1)\cdot \xi(j\to i|\sigma_k, t-1) + \\ &+ \exp\Big(\beta_j \sum_{s=1}^{L} r_{sk}\hat{p}_i(A_s|\sigma_k, t-1)\Big)\Big] + \\ &+ \frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k, t)} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\pi_i(\sigma_k, t)\xi(j\to i|\sigma_k, t) = \\ &= \Big[\alpha_j \pi_i(\sigma_k, t-1)\xi(j\to i|\sigma_k, t-1) + \\ &+ \exp\Big(\beta_j \sum_{s=1}^{L} r_{sk}\hat{p}_i(A_s|\sigma_k, t-1)\Big)\Big]\times \\ &\times \exp\Big(-1 + \frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k, t)}\Big). \end{aligned}$$

Поделив на $\pi_i(\sigma_k,t)$, найдем:

$$\xi(j\to i|\sigma_k,t)=\frac{1}{\pi_i(\sigma_k,t)}\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)}\times$$
$$\times\left[\alpha_j\pi_i(\sigma_k,t-1)\xi(j\to i|\sigma_k,t-1)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(\beta_j\sum_{s=1}^{L}r_{sk}\hat{p}_i(A_s|\sigma_k,t-1)\right)\right]. \qquad (26)$$

(26) можно записать в виде:

$$\xi(j\to i|\sigma_k,t)=\frac{1}{\pi_i(\sigma_k,t)}\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)}\cdot V_{j,i,k,t-1}. \qquad (27)$$

Находим:

$$-\frac{1}{\pi_i(\sigma_k,t)}\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)}+\frac{1}{\pi_i(\sigma_k,t)}\times$$
$$\times\left(-\frac{\gamma_j}{\pi_i^2(\sigma_k,t)}\right)\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)}=0$$

и, следовательно:

$$-1-\frac{\gamma_j}{\pi_i^*(t)}=0 \ \text{ или } \ \gamma_j=-\pi_i^*(t).$$

Величину γ_j можно определить из условия нормировки:

$$\sum_{i=1}^{M}\xi(j\to i|\sigma_k,t)=1, \qquad (28)$$

при условии, что известны все другие параметры, входящие в распределение (26), в частности функции $\pi_i(\sigma_k,t)$. Из (26) с учетом (28) получаем:

$$1=\sum_{i=1}^{M}\left(\pi_i(\sigma_k,t)\right)^{-1}\cdot e^{\left(-1+\frac{\gamma_j}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)}\times$$
$$\times\left[\alpha_j\pi_i(\sigma_k,t-1)\xi(j\to i|\sigma_k,t-1)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(\beta_j\sum_{s=1}^{L}r_{sk}\hat{p}_i(A_s|\sigma_k,t-1)\right)\right]. \qquad (29)$$

Если мы поделим (26) на (29), то получим соотношение:

$$\xi(j\to i|\sigma_k,t)=\frac{\left(\pi_i(\sigma_k,t)\right)^{-1}\cdot\exp\left(\frac{\pi_\xi^*(t)}{\pi_i(\sigma_k,t)}\right)V_{j,i,k,t-1}}{\sum_{q=1}^{M}\left(\pi_q(\sigma_k,t)\right)^{-1}\cdot\exp\left(\frac{\pi_q^*(t)}{\pi_q(\sigma_k,t)}\right)V_{j,i,k,t-1}}. \qquad (30)$$

7. Выводы

Дальнейшее развитие теории субъективного риска представляется актуальной задачей, применимой в тех областях, где роль «человеческого фактора» является определяющей. Субъективный риск является основой теории безопасности активных систем, в задачах социальной и экономической динамики.

Многие авторы говорят об исключительной роли энтропии. У Льва Гумилева [10], например, читаем: «...походы монголов 1201–1260 22 есть история пассионарного толчка или, точнее, энергетического взрыва, погашенного энтропией». Автор не конкретизирует понятие энтропии: энтропия чего, каких распределений имеется в виду. Аналогично, в экономике неравномерное развитие, которое отражается в так называемых «волнах Эллиота» также имеет, скорее всего, в основе энтропийную динамику.

Благодаря постановке вариационной задачи, где были учтены условия нормировки, и когнитивные функции найдены модели рейтинговых и предметных предпочтений. Построены графики энтропийных порогов и порогов для риска, а также получено достаточное и необходимое условие принятия решения. Энтропийные пороги, как пороги субъективного риска, служат важными показателями индивидуальной психики.

Найдены рейтинговые дифференциальные предпочтения в системах, ориентированных на агрегированные распределения.

Весьма продуктивной оказывается энтропийная концепция в задачах обучения. Принцип максимума субъективной энтропии во всех этих проявлениях играет фундаментальную роль, а субъективный риск позволяет записать в наиболее последовательной форме критерий оптимальности.

Литература

1. Касьянов, В. А. Субъективный анализ [Текст] / В. Касьянов. – К. : НАУ, 2007. – 512 с.
2. Kasyanov, V. Subjective entropy of preferences [Text] / V. Kasynov. – Warsaw, 2013. – 644 p.
3. Jaynes, E. Information theory and statistical mechanics [Text] / E. Jaynes // Phys. Rev. – 1957. – Vol 106, Issue 4. – P. 620–630. doi:10.1103/physrev.106.620
4. Де Гроот, М. Оптимальные статистические решения [Текст] / М Де Гроот. – М. : Мир, 1974. – 491 с.
5. Касьянов, В. Гібридна модель генерації переваг [Текст] / В. Касьянов, Т. Шипитяк, К. Шафран // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – Т. 4, № 9(58). – С. 24–29. – Режим доступа: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/5738/5170
6. Иваненко, В. Проблема неопределенности в задачах принятия решений [Текст] / В. Иваненко, В. Лабковский. – К.: Наукова Думка, 1990. – 133 с.
7. Колмогоров, А. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А. Колмогоров, С. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 542 с.
8. Уилкс, С. Математическая статистика [Текст] / С. Уилкс. – М. : Наука, 1967. – 632 с.
9. Боровков, А. Математическая статистика [Текст] / А. Боровков. — М. : Наука, 1984. — 472 с.
10. Гумилёв, А. Черная легенда [Текст] / А. Гумилёв. – М. : Айрис Пресс, 2007. – 564 с.