

УДК 519.853

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С ВИСЯЩИМИ УЗЛАМИ

С. А. Исаенко
Магистрант*

Контактный тел.: 067-456-00-07
E-mail: svetlyachok7@gmail.com

В. Н. Медведева

Кандидат технических наук, доцент*
Контактный тел.: (044) 400-85-45
E-mail: romyald@voliacable.com

Ю. Д. Щербашин

Кандидат технических наук, доцент*
Контактный тел.: (044) 454-95-23
E-mail: romyald@voliacable.com

*Кафедра автоматизации проектирования энергетических процессов и систем Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Описана идея спільного застосування методу топологічної згортки та оптимізаційного розрахункового алгоритму для розрахунку гідравлічних мереж, які містять висячі вузли. Наведені теоретичні основи методів, їх основні переваги, а також практичний приклад розрахунку за допомогою запропонованої методики

Ключові слова: гідравлічна мережа, висячий вузол, оптимізація, розрахунок

Описана идея совместного использования метода топологической свертки и оптимизационного расчетного алгоритма для расчета гидравлических сетей, содержащих висящие узлы. Приведены теоретические обоснования методов, их основные достоинства, а также практический пример расчета с помощью предложенной методики

Ключевые слова: гидравлическая сеть, висящий узел, оптимизация, расчет

This article represents the idea of joint use of such methods as the method of topological furl and the optimization calculation algorithm for hydraulic networks' with dangling nodes parameters calculation. The theoretical basis of mentioned methods, as well as the practical example of calculation by means of the offered methodology, are given

Keywords: hydraulic network, dangling node, optimization, calculation

Введение

В процессе проектирования и реконструкции гидравлических сетей или в случае возникновения аварийных ситуаций часто возникает острая необходимость оперативных численных расчетов гидравлических сетей для правильного выбора новых конфигураций, подбора и размещения оборудования таким образом, чтобы при выполнении требуемых технологических ограничений экономические потери были минимальными. Поэтому основной целью современных исследований в этой области должно быть повышение надежности, эффективности и качества расчета за счет математической оптимизации расчета и настройки гидравлических систем компьютерными средствами.

В данной статье рассматривается идея совместного применения усовершенствованного алгоритма решения задач нелинейного программирования с использованием базиса сокращенной размерности [1] и метода топологической свертки [2] для расчета гидравлических сетей, содержащих висящие узлы. Использование метода топологической свертки позволит решить проблему висящих узлов, часто возникающую при расчете больших магистральных сетей, нефтепроводов, систем пароснаб-

жения, а благодаря усовершенствованному алгоритму решения задач нелинейного программирования с использованием базиса сокращенной размерности, станет возможным произвести расчет сети с использованием математической оптимизации, что, безусловно, повлияет на скорость и эффективность расчета.

Постановка задачи

Говоря о расчете потокораспределения в гидравлических сетях, получим следующую оптимизационную задачу:

Найти

$$j_0'' - \left(\sum_{j=1}^m b_{cj} s_j x_j |x_j| \right)^2 \rightarrow \max, x_j \in W \subseteq E_n \quad (1)$$

если область допустимых решений Ω определяется ограничениями

$$y_i \equiv \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + Q_j = 0, i = 1..(m-1), \quad (2)$$

$$z_i \equiv \varphi_i(X) \equiv \sum_{j=1}^m b_{ij} s_j x_j |x_j| = 0, i = 1..(c-1), \quad (3)$$

$$v_j \equiv x_j - X_j^{\min} \geq 0, j=1..n, \tag{4}$$

$$v_j \equiv -x_j + X_j^{\max} \geq 0, j=1..n, \tag{5}$$

где

x_j - элемент вектора неизвестных переменных - расходы на ветвях схемы;

φ_0 - функция цели, которая максимизируется (сформулированная таким образом, что ее максимальное значение равно нулю);

b_{ij} - элементы матрицы контуров системы;

s_j - гидравлическое сопротивление j -ой ветви схемы;

y_i - отклонение в точке X от i -ой ограничивающей гиперплоскости;

a_{ij} - элемент i -ой строки матрицы A соединений схемы;

Q_i - свободный член - элемент вектора расходов в узлах схемы;

z_i - отклонение в точке X от i -ой ограничивающей поверхности $\varphi_i(X)=0$;

$\varphi_i(X)$ - i -тое нелинейное ограничение-равенство;

$X_j^{\min}(X_j^{\max})$ - нижний (верхний) предел допустимого изменения значения неизвестной переменной x_j ;

$v_j^-(v_j^+)$ - отклонения в точке X от нижнего (верхнего) предела допустимых значений переменной x_j .

Значения $X_j^{\min}(X_j^{\max})$ принимаем равными очень большому отрицательному (положительному) числу, то есть $X_j^{\min} \rightarrow -\infty(X_j^{\max} \rightarrow +\infty)$. Выбранные таким образом границы гарантируют, что в процессе решения мы никогда не выйдем за эти границы. И, следовательно, нет необходимости в вычислении шага до ограничивающей гиперплоскости тривиальных ограничений.

В качестве начальных приближений для вектора неизвестных переменных нужно выбирать нулевые значения.

Кроме того, в нашей задаче мы рассматриваем гидравлические сети, содержащие висящие узлы, то есть сети вида:

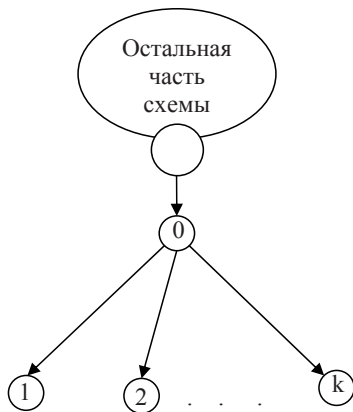


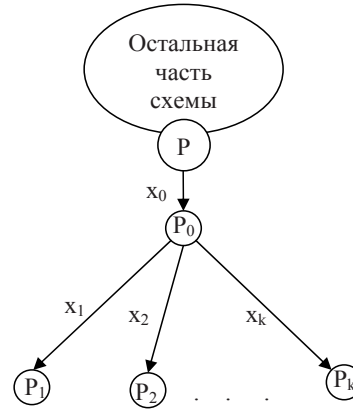
Рис. 1.

Сворачивание висящих узлов

Метод топологической свертки впервые предложен в работе [2] и назван методом линейной свертки. В последующем используется термин топологическая свертка (ТпС).

Метод позволяет исключить из расчета висящие узлы графа гидравлической сети.

Для рассмотренной выше топологии гидравлической сети введем обозначения расходов в ветвях и давлений в узлах схемы:



P_i - давления в узлах; x_i - расходы в ветвях;

Пусть $P - P_i = a_i + b_i \cdot x_i$ ($i=0+k$), где a_i ($i=0+k$) - некоторый перепад давления, а b_i ($i=0+k$) - коэффициент сопротивления ветви.

Зададимся некоторым значением давления $P=P_1$ в висящем узле и значением P_1+1 . Тогда

$$x_{i,1} = \frac{1}{b_i} \cdot (P_1 - P_i - a_i) \quad (i=1+k);$$

$$x_{0,1} = -\sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i} \cdot (P_1 - P_i - a_i) = -P_1 \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i} + \sum_{i=1}^k \frac{P_i + a_i}{b_i} \tag{6}$$

$$x_{i,2} = \frac{1}{b_i} \cdot (P_1 + 1 - P_i - a_i) \quad (i=1+k);$$

$$x_{0,2} = -\sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i} \cdot (P_1 + 1 - P_i - a_i) = -(P_1 + 1) \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i} + \sum_{i=1}^k \frac{P_i + a_i}{b_i} \tag{7}$$

а для изменения расходов в ветвях при изменении значений давления в висящем узле на единицу получим:

$$dx_0 = x_{0,2} - x_{0,1} = -\sum_{i=1}^k \frac{1}{b_i}; \quad dx_i = x_{i,2} - x_{i,1} = \frac{1}{b_i} \quad (i=1+k);$$

$$dx_i / dx_0 = -y_i / \sum_{n=1}^k y_n \quad (i=1+k) \tag{8}$$

Пусть P_0 - значение давления, при котором $x_0(P_0)=0$. Тогда расход в любой из ветвей системы можно определить как линейную функцию от давления в узле P :

$$\begin{aligned} x_i(P) &= y_i \cdot (P_0 - P_i - a_i) + (P - P_0) \cdot y_i = \\ &= x_{i,0} - x_0(P) \cdot \left[y_i / \sum_{n=1}^k y_n \right] \quad (i=1+k) \end{aligned} \tag{9}$$

$$x_0(P) = (P - P_0) \cdot \sum_{n=1}^k y_n; \quad P_0 = \left(\sum_{i=1}^k y_i \cdot (P_i + a_i) \right) / \sum_{n=1}^k y_n \tag{10}$$

Из (10) тогда следует, что для решения задачи расчета расходов достаточно найти расход x_0 , а поэтому вместо всех ветвей узла достаточно оставить только одну ветвь, по параметрам которой можно определить расход x_0 .

Таким образом, мы исключили из расчета висящие узлы схемы. Далее проведем непосредственный расчет гидравлической сети с помощью усовершенствованного алгоритма решения задач нелинейного программирования.

Расчет потокораспределения

Усовершенствованный алгоритм решения задач нелинейного программирования с использованием базиса сокращенной размерности относится к классу методов аппроксимирующего программирования [9],[6] и подробно описан в работе [1]. Как и в линейном программировании, здесь на каждой итерации определяется набор из *n* эффективных (имеющих нулевые уклонения) ограничивающих плоскостей, образующих базисный конус. Однако, в отличие от симплексных методов (движения по одному из ребер базисного конуса), метод допускает также движение "внутри" многогранника за счет одновременного изменения нескольких уклонений.

Геометрическая интерпретация процесса решения задачи – это движение изображающей точки $\mathbf{X}^{(k)} = \text{col}\{x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\}$ в *n*-мерном евклидовом пространстве E_n :

$$\mathbf{X}^{(k+1)} \equiv \mathbf{X}^{(k)} + \Delta\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k)} + \lambda^{(k)}\sigma^{(k)}, \tag{11}$$

где:

$\sigma^{(k)}$ - луч, исходящий из $\mathbf{X}^{(k)}$, движение вдоль которого не нарушает немедленно удовлетворенные в $\mathbf{X}^{(k)}$ равенства,

$\lambda^{(k)} > 0$ - длина шага вдоль $\sigma^{(k)}$.

По сравнению с $\mathbf{X}^{(k)}$, точка $\mathbf{X}^{(k+1)}$ должна либо уменьшить (ликвидировать) невязку одного из неудовлетворенных в $\mathbf{X}^{(k)}$ равенств при сохранении ранее удовлетворенных равенств, либо (при нахождении $\mathbf{X}^{(k)}$ в области допустимых решений Ω) улучшить функцию цели (1).

Итеративный алгоритм (11) требует решения на каждой итерации двух проблем:

1) Выбор подходящего направления - луча $\sigma^{(k)}$, вдоль которого уменьшается невязка неудовлетворенного в $\mathbf{X}^{(k)}$ равенства из числа (2),(3) или улучшается функция цели.

2) Определение допустимого шага $\lambda^{(k)}$, соответствующего одному из условий:

- достигнута гиперповерхность *r*-го нарушенного в $\mathbf{X}^{(k)}$ равенства $\varphi_r(\mathbf{X}) = 0$,
- нарушена инженерная точность $\pm \epsilon_s$ удовлетворенного в $\mathbf{X}^{(k)}$ равенства $\varphi_s(\mathbf{X}) = 0$,
- достигнут экстремум функции цели вдоль луча $\sigma^{(k)}$.

Нелинейные ограничения $\varphi_i(\mathbf{X})$ в точке $\mathbf{X}^{(k)}$ заменяются их линейной аппроксимацией:

$$\varphi_i(\mathbf{X}) \approx z_i \equiv \alpha_i^{(k)} * \Delta\mathbf{X} + \varphi_i(\mathbf{X}^{(k)}), \tag{12}$$

где:

$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k)} = \text{col}\{\Delta x_j, j=1, \dots, n\}$ - вектор отклонений от точки $\mathbf{X}^{(k)}$,

$$\alpha_i^{(k)} = \nabla \varphi_i(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^{(k)}} = \left\{ \partial \varphi_i(\mathbf{X}) / \partial x_j \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^{(k)}}, j=1, \dots, n \right\} \text{ - градиент } \varphi_i(\mathbf{X}) \text{ в точке } \mathbf{X}^{(k)} \tag{13}$$

Градиенты (нормали) плоскостей общего положения (2) и плоскостей тривиальных ограничений-неравенств (4),(5), параллельных координатным плоскостям, постоянны в процессе решения задачи и не требуют дополнительных вычислений типа (13):

$$\begin{aligned} \nabla v_i(\mathbf{X}) &= \mathbf{a}_i = \text{const}; \quad \nabla v_j'(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_j = \text{const}; \\ \nabla v_j''(\mathbf{X}) &= -\mathbf{e}_j = \text{const}, \end{aligned} \tag{14}$$

где:

$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in})$ - нормаль *i*-ой гиперплоскости (2),
 $\mathbf{e}_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ - *n*-мерная вектор-строка с *j*-ым единичным компонентом и остальными нулевыми компонентами.

В качестве начального приближения искомым переменных примем их нижнюю границу: $\mathbf{X}^{(0)} = \text{col}\{x_j^{(0)}, j=1..n\} = \text{col}\{X_1^{\min}, \dots, X_n^{\min}\}$, а в качестве базисных переменных – уклонения $v_j', j=1, \dots, n$.

Решение разобьем на 2 этапа:

Этап I - последовательное введение в базис уклонений $v_i, i=1, \dots, m$ и удержание их в базисе до конца решения задачи;

Этап II - аппроксимация нового эффективного в текущей точке нелинейного ограничения-равенства $\varphi_p(\mathbf{X}^{(k)}) = 0$; введение в базис z_p вместо z_s , для которого $\varphi_s(\mathbf{X})$ в текущей точке $\mathbf{X}^{(k)}$ стало ненулевым ($|\varphi_s(\mathbf{X}^{(k)})| > \epsilon_s$), или вместо $v_s'(v_s'')$, по которому уклонились.

Контроль уклонений от эффективных ограничений

Для определения $\sigma^{(k)}$ используем в качестве базиса независимых переменных уклонения от эффективных ограничивающих плоскостей [2].

Исходная задача (1)-(5) в качестве базиса имеет координаты x_1, \dots, x_n искомым переменных, а в качестве зависимых от базиса величин – уклонения v_i, z_i, v_j', v_j'' . Задача состоит в алгебраическом преобразовании, где зависимыми переменными становятся x_1, \dots, x_n , а независимыми (базисными) – *n* уклонений из перечисленных выше:

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}^{(k)} * \mathbf{Y}_B^{(k)} + \mathbf{b}^{(k)} \tag{15}$$

Здесь:

$\mathbf{X} = \text{col}\{x_j, j=1..n\}$ – вектор искомым переменных,
 $\mathbf{G}^{(k)}$ - обратная матрица размерности $n * n$ зависимости искомым переменных от уклонений от ограничивающих плоскостей текущего базисного конуса,
 $\mathbf{Y}_B^{(k)} = \text{col}\{v_i, z_i, v_j', v_j''; i, j \in B^{(k)}\}$ – *n*-мерный вектор уклонений от плоскостей текущего базиса $B^{(k)}$,
 $B^{(k)}$ – множество индексов базисных плоскостей, $\dim(B^{(k)}) = n$,
 $\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k)}$ – вектор свободных членов – вершина, образованная пересечением *n* плоскостей базисного конуса.

Далее в целях упрощения нотации верхний индекс номера итерации опускаем.

В соответствии с (2)-(5) отклонения от базисных плоскостей зависят от искомым переменных:

$$\mathbf{Y}_B = A_B * \mathbf{X} + \mathbf{b}_B, \quad (16)$$

где:

\mathbf{Y}_B - вектор отклонений от базисных плоскостей; в начальный момент $\mathbf{Y}_B = \text{col}\{v_j', j=1, \dots, n\}$,

A_B - $n \times n$ -матрица нормалей плоскостей базисного конуса; в начальный момент $A_B = I_n$ - единичная $n \times n$ матрица,

$\mathbf{X} = \text{col}\{x_j, j=1, \dots, n\}$ - вектор искомым переменных,

\mathbf{b}_B - вектор отклонения начала координат от плоскостей базисного конуса; в начальный момент $\mathbf{b}_B = -\mathbf{X}^{\min} = -\text{col}\{-X_j^{\min}, j=1, \dots, n\}$.

Из (16) нетрудно получить обратную зависимость:

$$\mathbf{X} = G * \mathbf{Y}_B + \mathbf{b}, \quad (17)$$

где:

$G = (A_B)^{-1} = \{g_{ij}; i=1, \dots, n; j=1, \dots, n\}$ - обратная $n \times n$ -матрица с элементами g_{ij} ; в начальный момент $G = I_n$ - единичная $n \times n$ матрица,

$$\mathbf{b} = -G * \mathbf{b}_B$$

\mathbf{b} - n -мерный вектор-столбец свободных членов; в начальный момент $\mathbf{b} = \mathbf{X}^{\min}$. Не вошедшие в базис отклонения вычисляются через базисные отклонения подстановкой (17) в (2):

$$y_i = \mathbf{u}_i * \mathbf{Y}_B + b_i' \quad (18)$$

где:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_i * G \quad (19)$$

$$b_i' = b_i + \mathbf{a}_i * \mathbf{b} \quad (20)$$

На Этапе I последовательно в цикле вводим в базис y_1, \dots, y_n . Для этого выполняем следующие действия:

Шаг 0. Формируем начальную 'расширенную' (дополненную вектором \mathbf{b}) обратную матрицу $G' = (G, \mathbf{b}) = (I_n, \mathbf{b})$ размерности $n \times (n+1)$. Номер цикла $t=1$.

Шаг 1. По формуле (19) вычисляем вектор-строку \mathbf{u}_t и ищем в ней максимальный по модулю элемент u_{ts} . По формуле (20) вычисляем свободный член b_t' и формируем 'расширенную' вектор-строку $\mathbf{u}_t' = (u_t, b_t')$.

Шаг 2. Выполняя над расширенной обратной матрицей шаг жорданова преобразования [2], вводим в базис u_t , исключая из базиса v_s' :

$$g_{ij} = g_{ij} - \frac{u_{ij} * g_{is}}{u_{ts}}, i=(1, \dots, n), j=(1, \dots, n+1), j \neq s. \quad (21)$$

$$g_{is} = \frac{g_{is}}{u_{ts}}, i=1, \dots, n, \quad (22)$$

где:

g_{ij} - элементы 'расширенной' $n \times (n+1)$ матрицы G' ,

g_{ij}' - элементы скорректированной 'расширенной' $n \times (n+1)$ матрицы G' ,

u_{ij} - элементы 'расширенной' вектор-строки \mathbf{u}_t' .

Шаг 3. $t=t+1$. Если $t > m$, то выход из цикла, иначе - переход к Шагу 1.

При окончании Этапа I обратная матрица имеет структуру:

$$G = (L, H, \mathbf{b}),$$

а вектор искомым переменных

$$\mathbf{X} = L * \mathbf{Y} + H * \mathbf{V} + \mathbf{b}, \quad (23)$$

где:

$\mathbf{Y} = \text{col}\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ - m -мерный вектор-столбец отклонений от плоскостей-линейных ограничений (2),

$\mathbf{V} = \text{col}\{v_j', v_p''; j, p \in B\}$ - $(n-m)$ -мерный вектор отклонений от тривиальных плоскостей, входящих в текущий базис,

B - множество индексов базисных плоскостей, $\dim(B) = n$,

\mathbf{b} - вектор свободных членов - вершина, образованная пересечением n плоскостей базисного конуса,

L, H - подматрицы обратной матрицы G размерности $m \times m$ и $m \times (n-m)$ соответственно.

Из (23) следует, что в момент окончания Этапа I изображающая точка $\mathbf{X}^{(m)}$ - вершина базисного конуса, равна \mathbf{b} . Используем $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{b}$ как начальную точку для Этапа II, где вычисления будем производить в приращениях в соответствии с алгоритмом (11).

Поскольку на Этапе II линейные ограничения-равенства (2) никогда не выходят из базиса, т.е. $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ до конца решения задачи, то в дальнейшем можно оперировать только отклонениями \mathbf{V} и их приращениями $\Delta \mathbf{V}$. При этом приращение вектора искомым переменных

$$\Delta \mathbf{X} = \sigma = H * \Delta \mathbf{V}, \quad (24)$$

а вектор приращения отклонений $\Delta \mathbf{V}$ размерности $(n-m)$ в качестве компонентов может содержать как вариации отклонения от тривиальных плоскостей (4), (5), так и от поверхностей, описываемых нелинейными уравнениями (3), аппроксимированные линейной формой (12):

$$\Delta \mathbf{V} = \text{col}\{\Delta z_i, \Delta v_j', \Delta v_k''; i, j, k \in B\}.$$

Пусть в точке $\mathbf{X}^{(t)}$ нарушено $\varphi_p(\mathbf{X})$. Попробуем в точке $\mathbf{X}^{(t+1)}$ уменьшить невязку $\varphi_p(\mathbf{X})$, не нарушая при этом эффективных в $\mathbf{X}^{(t)}$ ограничений. В соответствии с (12), (13) при достаточно малых вариациях $\Delta \mathbf{X}$

$$\Delta \varphi_p \approx \nabla \varphi_p(\mathbf{X}^{(t)}) \Delta \mathbf{X} = \alpha_p \Delta \mathbf{X} \quad (25)$$

Не теряя общности рассуждений, предположим, что $\varphi_p(\mathbf{X}^{(t)}) < 0$, и нам требуется при переходе от $\mathbf{X}^{(t)}$ к $\mathbf{X}^{(t+1)}$ получить

$$\Delta \varphi_p > 0, \quad (26)$$

т.е. сократить величину невязки. Подставляя (29) в (30) и учитывая условие (26), получим:

$$\Delta \varphi_p = u_p \Delta \mathbf{V} > 0 \quad (27)$$

где

$$u_p = (u_{p1}, \dots, u_{pn}) = \alpha_p H, \quad (28)$$

Отметим специфику случая сокращения невязки равенств: в (28) следует брать α_p если $\varphi_p(\mathbf{X}^{(t)}) < 0$, и $-\alpha_p$ - если $\varphi_p(\mathbf{X}^{(t)}) > 0$.

Таким образом, задача сокращения невязки $\varphi_p(X)$ сведена к выбору допустимого вектора уклонений ΔV , обеспечивающего выполнение условий (27). Аналогичные рассуждения можно провести для этапа улучшения функции цели, где вместо $\varphi_p(X)$ в формулах (25)–(28) будет фигурировать $\varphi_0(X)$.

Для выполнения условия (27) компоненты $\Delta V = \text{col}(\Delta v_j, j=1, \dots, (n-m))$ необходимо выбирать по следующим правилам:

$$\Delta v_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \in I_2 \text{ (базисное нелинейное равенство из (3))} \\ 0, & \text{если } j \in I_3(I_4) \text{ и } u_{pj} < 0 \text{ при } v_j^{\cdot}(v_j^{\ddot{}}) = 0 \text{ (базисное тривиальное} \\ & \text{ограничение – грань гиперкуба (4),(5))} \\ u_{pj}, & \text{если } j \in I_3(I_4) \text{ при } v_j^{\cdot}(v_j^{\ddot{}}) > 0 \text{ (внутренняя точка гиперкуба (4),(5))} \end{cases} \quad (29)$$

Определение длины шага

Пусть в соответствии с (29) вычислен вектор ΔV . Тогда, в соответствии с (24), можно определить ΔX и допустимое направление σ :

$$s \equiv \text{col}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \Delta X = H^* \Delta V \quad (30)$$

Длина шага (λ) вдоль направления σ ограничена следующими условиями:

$$\lambda = \min \{ \lambda', \lambda'', \lambda''' \}, \quad (31)$$

где:

$\lambda' = \min \{ \lambda_j', \lambda_j > 0, j \notin \dots \}$ - длина шага до j -ой ограничивающей гиперплоскости тривиальных ограничений (4),(5), не входящей в базис;

$\lambda'' = \min \{ \lambda_i'', \lambda_i > 0, i \in \dots \}$ длина шага до возникновения невязок эффективных в X^t нелинейных базисных ограничений (3), превышающих инженерную точность;

λ''' - длина шага до нарушенного ограничения $\varphi_p(X^{(t)})$ или до максимума $\varphi_0(X^{(t)})$ вдоль направления σ .

Значения минимального шага λ' до тривиальных границ вычисляется по формуле

$$\lambda_j = \begin{cases} (X_j^{\max} - X_j^{(t)}) / \sigma_j^{(t)}, & \text{если } \sigma_j^{(t)} > 0 \\ (X_j^{\min} - X_j^{(t)}) / \sigma_j^{(t)}, & \text{если } \sigma_j^{(t)} < 0 \end{cases}, \quad (32)$$

где:

$x_j^{(t)}$ ($\sigma_j^{(t)}$) - j -ая координата $X^{(t)}$ ($\Delta X^{(t)}$).

Для вычисления λ'', λ''' будем использовать квадратичную аппроксимацию:

$$\Delta \varphi_i(X, \sigma, \lambda) \approx \alpha_i \lambda + \beta_i \lambda^2, \quad (33)$$

где

$$\alpha_i = \left. \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \right|_{X=X^{(t)}}, \quad \beta_i = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} \right|_{X=X^{(t)}}.$$

Как правило, методы, использующие квадратичную аппроксимацию нелинейностей $\varphi_i(X)$, требуют применения матрицы вторых производных (матрицы Гессе) [10], что непомерно увеличивает объем вычислений на каждой итерации.

Поскольку нам необходимо значение второй производной только по направлению σ , эту трудность можно обойти, используя приближенное численное дифференцирование вдоль σ вместо аналитического расчета β_i через матрицы Гессе.

Итак,

$$\left. \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \right|_{X=X^{(t)}} \equiv \nabla \varphi_i^{(t)} \cdot \sigma^{(t)} \approx \frac{\varphi_i(X^{(t)} + \hat{\lambda}\sigma) - \varphi_i(X^{(t)})}{\hat{\lambda}}, \quad (34)$$

$$\left. \frac{d^2\varphi_i}{d\lambda^2} \right|_{X=X^{(t)}} \equiv \sigma^{(t)T} \nabla^2 \varphi_i^{(t)} \sigma^{(t)} \approx \frac{\left. \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \right|_{X=\tilde{X}^{(t+1)}} - \left. \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \right|_{X=X^{(t)}}}{\hat{\lambda}}, \quad (35)$$

где

$$\left. \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \right|_{X=\tilde{X}^{(t+1)}} \approx \frac{\varphi_i(X^{(t)} + 2\hat{\lambda}\sigma) - \varphi_i(X^{(t)} + \hat{\lambda}\sigma)}{\hat{\lambda}}; \quad (36)$$

$\hat{\lambda}$ - достаточно малый «пробный» шаг вдоль σ ;

$\tilde{X}^{(t+1)} = X^t + \lambda \sigma$ - пробная точка вдоль σ ;

$\nabla^2 \varphi_i^{(t)}$ - матрица Гессе в точке $X^{(t)}$.

Таким образом, предлагаемый метод сочетает экономичность методов, использующих только первую производную, с «дальнодействием» квадратичных методов.

В соответствии с (32), длина шага вдоль σ вычисляется по формулам:

$$\lambda_i'' = \begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon_i - \varphi_i(X^{(t)})}{\beta_i}}, & \text{если } \beta_i > 0 \\ \sqrt{\frac{-(\varepsilon_i + \varphi_i(X^{(t)}))}{\beta_i}}, & \text{если } \beta_i < 0 \end{cases} \quad (37)$$

$$\lambda''' = \begin{cases} +\infty, & \text{если } p=0 \text{ и } \beta_0 > 0 \text{ - ф-ия цели не ограничена сверху!} \\ -\frac{\alpha_0}{2\beta_0}, & \text{если } p=0, \alpha_0 > 0, \beta_0 < 0 \text{ - оптимум!} \\ -\frac{\alpha_p}{2\beta_p}, & \text{если } p \neq 0, \Rightarrow \alpha_p^2 < 4\beta_p \varphi_p \text{ несовместимость! (min несовместимости)} \\ -\frac{\varphi_p(X^{(t)})}{\alpha_p}, & \text{если } p \neq 0, \alpha_p \neq 0, \beta_p \approx 0, \\ -\frac{\alpha_p - \sqrt{\alpha_p^2 - 4\beta_p \varphi_p(X^{(t)})}}{2\beta_p}, & \text{если } p \neq 0 \text{ и } ((\varphi_p(X^{(t)}) \geq 0, \alpha_p > 0, \beta_p < 0) \text{ или } (\varphi_p(X^{(t)}) \leq 0, \alpha_p < 0, \beta_p > 0)) \\ -\frac{\alpha_p + \sqrt{\alpha_p^2 - 4\beta_p \varphi_p(X^{(t)})}}{2\beta_p}, & \text{если } p \neq 0 \text{ и } ((\varphi_p(X^{(t)}) > 0, \alpha_p < 0, \beta_p > 0) \text{ или } (\varphi_p(X^{(t)}) < 0, \alpha_p > 0, \beta_p < 0)) \end{cases} \quad (38)$$

В формуле (37) не фигурирует α_i , поскольку для базисных ограничений в точке $X^{(t)}$

$$\alpha_i = \frac{d\varphi_i}{d\lambda} \equiv \nabla\varphi_i\sigma = 0.$$

Алгоритм Этапа II может быть представлен следующими шагами:

Шаг 1. В текущей точке $X^{(t)}$ вычисление $\varphi_i(X^{(t)})$, $i \in B^{(t)}$. Если $|\varphi_i(X^{(t)})| > \varepsilon_i$, - выполнение устранения невязки базисного нелинейного ограничения-равенства, иначе - переход к Шагу 2.

Шаг 2. Нахождение первого неудовлетворенного в текущей точке небазисного $|\varphi_p(X^{(t)})| > \varepsilon_p$, $p \notin B^{(t)}$. Если таковых нет, то переход к Шагу 6, иначе - Шаг 3.

Шаг 3. Вычисление $\nabla\varphi_p(X)$ по формуле (13) и u_p по формуле (28). Вычисление $\sigma^{(t)}$ по формуле (29), (30).

Шаг 4. Вычисление λ по формулам (31)-(38). Определение небазисной плоскости - τ , шаг до которой минимален (z_τ, v_τ' или v_τ'').

Шаг 5. Вычисление $X^{(t+1)}$ по формуле (24). Вычисление u_τ по формуле (28) Введение в базис плоскости $z_\tau (v_\tau', v_\tau'')$ вместо одной из v_s' (v_s''), по которым уклонялись, - выполнение шага жорданова преобразования по формулам (31),(32).Переход к Шагу 1.

Шаг 6. Вычисление $\nabla\varphi_0(X^{(t)})$ по формуле (26) и u_0 по формуле (28). Если $\|\nabla\varphi_0(X^{(t)})\| < \varepsilon_0$, расчет окончен, иначе - вычисление $\sigma^{(t)}$ по формуле (29),(30), переход к Шагу 1.

Расчетный пример

Рассмотрим пример расчета элементарной системы пароснабжения:

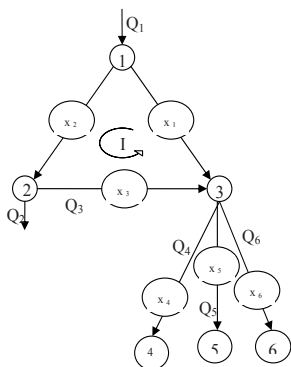


Рис. 3.

В узел 1 подается пар в количестве Q_1 тонн/час, из узла 2 потребитель забирает Q_2 тонн/час, из узла 3 - оставшиеся $Q' = Q_4 + Q_5 + Q_6 = Q_1 - Q_2$ тонн/час распределяются на три ветви, ведущие к висящим узлам 4, 5, 6. Необходимо определить минимальный диаметр (максимальное гидросопротивление) трубопровода потока x_3 , при котором перепад давления на этом трубопроводе Δp_3 будет в диапазоне

$$\Delta P_3^{\min} \leq \Delta p_3 \leq \Delta P_3^{\max}$$

а также величины расходов Q_4, Q_5, Q_6 на ветвях, ведущих к висящим узлам.

В первую очередь решим задачу нахождения максимального гидросопротивления потока x_3 .

Запишем линейные уравнения материального баланса для узлов 1 и 2 (аналог I закона Кирхгофа для электрических цепей) [4]:

$$y_1 \equiv -x_1 - x_2 + Q_1 = 0, \tag{39}$$

$$y_2 \equiv x_2 - x_3 - Q_2 = 0.$$

Здесь множество индексов линейных уравнений $I_1 = \{1, 2\}$.

Далее, для замкнутого контура I (см. рис. 1), можем записать уравнение второго закона Кирхгофа: сумма падений давления в замкнутом контуре равна нулю. В отличие от электрической цепи связь между потоком в ветви x_j и падением давления на ней Δp_j носит нелинейный (квадратичный) характер [4]:

$$\Delta p_j = \rho_j * x_j^* |x_j|, j = \{1, 2, 3\} \tag{40}$$

Обозначая неизвестное гидросопротивление третьего потока ρ_3 как x_4 , а Δp_3 как x_5 , запишем два нелинейных уравнения, из которых первое - это определение перепада давления на трубопроводе по формуле (31), а второе - II-ой закон Кирхгофа для контура I:

$$z_1 \equiv +x_4 * x_3^* |x_3| - x_5 = 0$$

$$z_2 \equiv -\rho_1 * x_1^* |x_1| + \rho_2 * x_2^* |x_2| + x_5 = 0, \tag{41}$$

где:

ρ_1, ρ_2 - известные (заданные) гидросопротивления трубопроводов потоков x_1, x_2 ,

x_1, x_2, x_3 - искомые значения потоков,

x_4 - искомое гидросопротивление,

x_5 - искомый перепад давления в потоке x_3 .

Здесь множество индексов нелинейных уравнений $I_2 = \{1, 2\}$.

Двусторонние тривиальные ограничения (4), (5) для рассматриваемого примера имеют вид:

$$\begin{aligned} v'_1 &\equiv x_1 & -X_1^{\min} &\geq 0 \\ v'_2 &\equiv x_2 & -X_2^{\min} &\geq 0 \\ v'_3 &\equiv x_3 & -X_3^{\min} &\geq 0 \\ v'_4 &\equiv x_4 & &\geq 0 \\ v'_5 &\equiv x_5 & -\Delta P_3^{\min} &\geq 0 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} v''_1 &\equiv -x_1 & +X_1^{\max} &\geq 0 \\ v''_2 &\equiv -x_2 & +X_2^{\max} &\geq 0 \\ v''_3 &\equiv -x_3 & +X_3^{\max} &\geq 0 \\ v''_4 &\equiv -x_4 & +X_4^{\max} &\geq 0 \\ v''_5 &\equiv -x_5 & +\Delta P_3^{\max} &\geq 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Здесь множество индексов тривиальных ограничений $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Критерий оптимальности в данном случае линеен:

$$\varphi_0(X) \equiv x_4 \rightarrow \max \tag{44}$$

Пусть при расчете гидравлической цепи рис. 1 $Q_1=1,0, Q_2=0,6, \rho_1=10, \rho_2=1$. Тривиальные ограничения (4),(5) выглядят так:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 0.8 \\ 0 \leq x_2 \leq 0.8 \\ -0.3 \leq x_3 \leq +0.3 \\ 0 \leq x_4 \leq 100 \\ -0.5 \leq x_5 \leq +0.5 \end{aligned}$$

(4'),(5')

Начальные значения уклонов и функции цели для этапа 2: $z_1 = -0.5$; $z_2 = -5.31$; $\varphi_0 = 0$. Промежуточные результаты работы второго этапа представлены в табл. 5:

Таблица 5

№	λ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z_1	z_2	φ_0
1	0,45	0,25	0,75	0,15	0	-0,5	-0,5	-0,5625	0
2	0,5625	0,25	0,75	0,15	0	0,0625	-0,0625	0	0
3	0,0667	0,2411	0,7588	0,1588	0	-0,0042	-0,0042	-0,0099	0
4	18,4748	0,2801	0,7198	0,1198	18,4741	0,2587	-0,0064	-0,0082	18,4741
5	20,7797	0,2986	0,7013	0,1013	39,2539	0,3963	-0,0073	-0,0034	39,2539
6	12,1821	0,3058	0,6941	0,0941	51,4360	0,4568	-0,0009	-0,0032	51,4360
7	6,4005	0,3098	0,6901	0,0901	57,8366	0,4791	-0,0090	-0,0045	57,8366
8	4,7344	0,3115	0,6884	0,0884	62,5710	0,4944	-0,0055	-0,0025	62,5710
9	0,2184	0,3116	0,6883	0,0883	62,7895	0,5	-0,0098	-0,0026	62,7895

Расчет выполняется с точностью $\epsilon = 0,01$.

Этап I – введение в базис линейных ограничений-равенств (2).

В соответствии с Шагом 0 Этапа I, сформируем в виде таблицы Штиффеля-Зуховицкого [2] начальную ‘расширенную’ обратную матрицу G' , вектор-строки a_1 , a_2 и рассчитаем вектор-строку u_1' по формулам (19),(20):

Таблица 1

Базис x_i	v_1'	v_2'	v_3'	v_4'	v_5'	1
$x_1 =$	1	0	0	0	0	0
$x_2 =$	0	1	0	0	0	0
$x_3 =$	0	0	1	0	0	-0.3
$x_4 =$	0	0	0	1	0	-0.5
$x_5 =$	0	0	0	0	1	1
$u_1' =$	-1	-1	0	0	0	1.0

$a_1 = (-1, -1, 0, 0, 0)$
 $a_2 = (0, 1, -1, 0, 0)$

Ищем разрешающий элемент - наибольший по модулю коэффициент в вектор-строке u_1' ($u_{11} = -1$, в табл. 1 затенен). Исключаем из базиса v_1' и вводим в базис u_1 , выполняя шаг жорданова преобразования по формулам (21),(22).

Получаем новую расширенную обратную матрицу (табл. 2). Для a_2 вычисляем u_2' , находим разрешающий элемент (u_{22}). Исключаем из базиса v_2' и вводим в базис u_2 , выполняя шаг жорданова преобразования. Получаем окончательную обратную матрицу Этапа I (табл. 3).

Таблица 2

Базис X_i	u_1	v_2'	v_3'	v_4'	v_5'	1
$x_1 =$	-1	-1	0	0	0	1.0
$x_2 =$	0	1	0	0	0	0
$x_3 =$	0	0	1	0	0	-0.3
$x_4 =$	0	0	0	1	0	-0.5
$x_5 =$	0	0	0	0	1	1
$u_2' =$	0	1	-1	0	0	-0.3

Таблица 3

u_1	u_2	v_3'	v_4'	v_5'	1
-1	-1	-1	0	0	0.7
0	1	1	0	0	0.3
0	0	1	0	0	-0.3
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	-0.5

Начальная матрица (H-затенена) и начальный вектор-столбец искоемых переменных ($X^{(0)}$ – светлый столбец) Этапа II изображены в табл. 4:

Таблица 4

Базис X_i	v_3'	v_4'	v_5'	1
$x_1 =$	-1	0	0	0.7
$x_2 =$	1	0	0	0.3
$x_3 =$	1	0	0	-0.3
$x_4 =$	0	1	0	0
$x_5 =$	0	0	1	-0.5

Итеративный алгоритм завершен, так как достигнуто граничное значение для переменной x_5 ($x_5 \leq 0,5$), что означает, что мы нашли максимум функции цели при заданных ограничениях.

Таким образом, искомое максимальное гидросопротивления потока x_3 равно 62, 79.

Теперь перейдем к задаче расчета расходов Q_4 , Q_5 и Q_6 .

Пусть гидросопротивления для соответствующих потоков x_4 , x_5 и x_6 равны $\rho_4 = 10$, $\rho_5 = 20$, $\rho_6 = 30$.

Для ветви потока x_3 выберем гидросопротивление $\rho_3 = 57,84$ (соответствующий перепад давления Δp_3 тогда равен 0,48 (согласно табл. 5)). На основании этих величин, рассчитаем значение расхода Q_3 потока x_3 из формулы:

$$\Delta p_i = \rho_i \cdot Q_i^2 \tag{45}$$

$$Q_3^2 = \Delta p_3 / \rho_3 = 0,48 / 57,84 = 0,008;$$

$$Q_3 = 0, 09 \text{ тонн/час.}$$

Теперь вычислим проводимости для каждой из ветвей:

$$y_n = 1/\rho_n \quad (n=1+k) \tag{46}$$

$$y_1 = 1/\rho_1 = 1/10 = 0,1$$

$$y_2 = 1/\rho_2 = 1/1 = 1$$

$$y_3 = 1/\rho_3 = 1/57,84 = 0,017$$

$$y_4 = 1/\rho_4 = 1/10 = 0,1$$

$$y_5 = 1/\rho_5 = 1/20 = 0,05$$

$$y_6 = 1/\rho_6 = 1/30 = 0,033$$

Определим суммарную проводимость для всей сети:

$$Y = \sum_{n=1}^k y_n = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 0,$$

$$1 + 1 + 0,017 + 0,1 + 0,05 + 0,033 = 1,3$$

Определим суммарную проводимость для ветвей с висящими узлами:

$$Y' = \sum_{i=1}^k y_i = y_4 + y_5 + y_6 = 0,1 + 0,05 + 0,033 = 0,183$$

В качестве эквивалентной ветви выберем ветвь потока x_3 . Определим $P_0 = \sum_{i=1}^k y_i \cdot (P_i + \Delta p_i) / \sum_{n=1}^k y_n$ – граничное давление для эквивалентной ветви ($Q_3(P_0) = 0$). Пусть давление P_3 ветви потока x_3 фиксировано и равно 1,5 МПа. Тогда, с учетом величины перепада давления, граничное давление для эквивалентной ветви будет равно:

$$P_0 = \sum_{i=1}^k y_i \cdot (P_i + \Delta p_i) / \sum_{n=1}^k y_n = 0,183 * (1,5 + 0,48) / 1,3 = 0,29$$

Определим расходы на ветвях с висящими узлами при $Q_3 = 0$:

$$Q_{i,0} = y_i \cdot ((P_3 + \Delta p_3) - P_0) \quad (47)$$

$$Q_{4,0} = y_4 \cdot (P_0 - (P_3 + \Delta p_3)) = 0,1 \cdot (1,5 + 0,48 - 0,29) = 0,17$$

$$Q_{5,0} = y_5 \cdot (P_0 - (P_3 + \Delta p_3)) = 0,05 \cdot (1,5 + 0,48 - 0,29) = 0,08$$

$$Q_{6,0} = y_6 \cdot (P_0 - (P_3 + \Delta p_3)) = 0,033 \cdot (1,5 + 0,48 - 0,29) = 0,06$$

На следующем шаге определим доли расхода Q_i , распределяемых в i – ю ветвь:

$$q_i = y_i / Y' \quad (48)$$

$$q_4 = y_4 / Y' = 0,1 / 0,183 = 0,55$$

$$q_5 = y_5 / Y' = 0,05 / 0,183 = 0,27$$

$$q_6 = y_6 / Y' = 0,033 / 0,183 = 0,18$$

Теперь рассчитаем эквивалентное сопротивление эквивалентной ветви:

$$r_{3,0} = r_3 + 1 / Y' = 57,84 + 1 / 0,183 = 63,3$$

И дальше определим расходы в ветвях, содержащих висящие узлы:

$$Q_i = Q_3 \cdot q_i + Q_{i,0} \quad (49)$$

$$Q_4 = Q_3 \cdot q_4 + Q_{4,0} = 0,09 \cdot 0,55 + 0,17 = 0,22$$

$$Q_5 = Q_3 \cdot q_5 + Q_{5,0} = 0,09 \cdot 0,27 + 0,08 = 0,1$$

$$Q_6 = Q_3 \cdot q_6 + Q_{6,0} = 0,09 \cdot 0,18 + 0,06 = 0,08$$

Следовательно, искомые расходы Q_4 , Q_5 , Q_6 в ветвях найдены и равны соответственно 0,22; 0,1 и 0,08 тонн/час.

Выводы

В процессе подробного изучения двух современных методов расчета гидравлических сетей, а именно метода топологической свертки и алгоритма решения задач нелинейного программирования с использованием базиса сокращенной размерности – были выделены основные преимущества и сильные стороны этих двух методов.

Важным преимуществом метода топологической свертки является процедура исключения из расчета

висящего узла графа системы. Благодаря этой процедуре, представляется возможным решение проблемы висящих узлов, существующих в больших гидравлических сетях [2].

В то же время, главной особенностью усовершенствованного алгоритма решения задач нелинейного программирования с использованием базиса сокращенной размерности является существенная оптимизация расчета гидравлической сети.

На основании полученных выводов, была установлена возможность эффективного совместного применения вышеуказанных методов для расчета гидравлических сетей с висящими узлами. Идея состоит в том, чтобы использовать процедуру исключения висящих узлов метода топологической свертки и расчетно-оптимизационный механизм усовершенствованного алгоритма решения задач нелинейного программирования с использованием базиса сокращенной размерности.

Как показали практические исследования, данный прием особо эффективен для гидравлических сетей сложной структуры с большим количеством висящих узлов.

Литература

1. Щербашин Ю.Д. Метод решения задач нелинейного программирования с использованием базиса переменной размерности. // Проблемы управления и информатики. -2006.-№3.-С.27-36.
2. Винничук С. Д. Метод линейной свертки для расчета распределительных сетей. // Моделирование и диагностика сложных процессов и систем: Сб. науч. тр. – Киев: ИПМЭ НАН Украины, 1997. – с. 71-79.
3. Гасс С. Линейное программирование. –М.:Физматгиз, 1961,-303с
4. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. –М.: Наука, 1985.- 278с.
5. Дерябин А.Н., Кондратьев А.В., Файзуллин Р.Т., Федоров С.В. Квазистационарный расчет больших электрических цепей с нелинейными элементами. // Труды Международной конференции “Математические модели и методы их исследования”.-: Красноярск – 2001.- Т.1, С.223-227.
6. Щербашин Ю.Д. Об одном методе улучшения непрерывного производственного процесса. // Автоматика и телемеханика. –1970.-№9.-С.119-125.
7. Левин М.М., Волковицкая П.И., Лаптин Ю.П., Журбенко Н.Г. Использование средств оптимизации в системе автоматизированного проектирования энергетических котлоагрегатов КРОКУС. //Энергетика и электрификация.-2003.-№7.-С41-51.
8. Константинова Е.С., Курдюк Е.В., Щербашин Ю.Д. Оптимизация технологического режима цеха синтеза аммиака. // Сб.”Моделирование и оптимизация каталитических процессов”. –М.:Наука, 1965, -С.109-127.
9. Griffith R. E., Stewart R. A. A non-linear programming technique for the optimization of continuous processing systems. – Management Sci., 1961, № 7, p.379–392.