

8. Dailydka S., Lingaitis L.P., Myamlin S., Prichodko V. Modelling the interaction between railway wheel and rail // Transport 2008, 23(3), pp. 236-239.
9. Божко А.Е., Гноевой А.В., Шпачук В.П. Пространственное виброн нагружение. - Киев: Наукова думка, -1987. – 192с.
10. Шпачук В.П. К проблеме испытаний объектов пространственной структуры на виброндежность, реализующих эффект синергизма // Прикл. механика. -2005.-№7.-С.116-121.

Здійснюється аналіз природи виникнення додаткових похибок поплавкового двохступеневого гіроскопа в режимі експлуатаційного використання літальних апаратів. З'ясовується ступінь впливу проникаючого акустичного випромінювання на похибку вимірювань внаслідок дифракційних явищ в ревербераційному об'ємі

Ключові слова: поплавковий гіроскоп, дифракційна хвиля, рідностатичний підвіс

Проводится анализ природы возникновения дополнительных погрешностей поплавкового двухступенного гироскопа в режиме эксплуатационного использования летательных аппаратов. Устанавливается степень влияния проникающего акустического излучения на погрешность измерений вследствие дифракционных явлений в реверберационном объеме

Ключевые слова: поплавковый гироскоп, дифракционная волна, жидкостатический подвес

It is analyzed the nature of appearance of additional errors of floating double-stage gyroscope mode operational use of aircraft. It is established the degree of influence of penetrating acoustic radiation on measurement error due to diffraction phenomena in the reverberation volume

Key words: floating gyroscope, diffraction wave, oil-fed hydrostatic suspension

УДК 629.7.054

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОПЛАВКОВОГО ПОДВЕСА ГИРОСКОПА И ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

В. В. Карачун

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой*

Контактный тел.: (044) 454-94-51

E-mail: karachun 1@gala.net

В. Н. Мельник

Кандидат технических наук, доцент*

*Кафедра биотехники и инженерии

Национальный технический университет Украины

«Киевский политехнический институт»

пр-т Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056

1. Введение

Исследования относятся к области прикладной механики и посвящены изучению и описанию природы возникновения нелинейных колебаний в жидкостатическом подвесе двухступенного гироскопа. Такие приборы нашли широкое применение как пилотажно-навигационные. Достаточно часто они используются как чувствительные элементы трехосной гиросtabilизированной платформы на летательных аппаратах различного класса и базирования.

Известно, что оценка параметров полета широкой модификации аппаратов проводится уже непосредственно на борту носителя и потому вопросы точности построения опорной системы координат приобретают

исключительную важность и актуальность. Особенно при решении задач ближнего космоса, когда погрешности приборов инерциальной навигации могут привести к необходимости коррекции орбиты, либо к доукомплектованию носителя дополнительным количеством горючего.

2. Анализ состояния проблемы и постановка задачи исследований

Упругое взаимодействие механических систем бортовой аппаратуры летательных аппаратов с проникающим акустическим излучением и возникающие, как следствие, особенности приборов командно-из-

мерительного комплекса, систематическое изучение приобрели лишь в последнее время [1, 2]. Как правило, уменьшение этого влияния решалось методами пассивной звукоизоляции [3]. Вместе с тем, как оказалось, проблема существует и требует пристального внимания [4]. Причиной погрешности измерений служит упруго-напряженное состояние подвеса гироскопа, чувствительных элементов систем коррекции, токоємников и т.п. Особенное внимание следует сосредоточить на многофазных подвесах.

Подверженными появлению дополнительных погрешностей оказались не только некорректируемые, но и корректируемые приборы, а также сложные системы в виде трехосной гироскопической платформы [5].

Таким образом, представляется актуальным изучение особенностей механических систем пилотажа-навигационного оборудования в условиях эксплуатационного использования летальных аппаратов и описания природы этого проявления в виде погрешности измерений.

Целью проводимых исследований является описание структуры возникающих в поплавковом подвесе гироскопа, как наиболее сложном, нелинейных колебаний, порождаемых дифракционными явлениями.

3. Дополнительные погрешности поплавкового гироскопа в акустической среде

Нелинейные колебания подвижной части гироскопа, вызванные неоднородностью жидкофазной составляющей подвеса. В натуральных условиях, вследствие ударных воздействий, вибрации, температурных и других факторов, в разделяющей поплавок и корпус прибора жидкости могут возникать газообразные пузырьки, которые под действием акустического излучения будут перемещаться в сторону распространяющейся волны давления, то есть в зону акустической тени (рис. 1). Собираясь в одном месте они могут нарушить равновесие исходной системы гидростатических и массовых сил и привести к возникновению возмущающего момента M относительно оси подвеса поплавок.

Оставляя в стороне вопрос анализа природы образования пузырьков, определим их перемещение, считая поверхность упруго-деформируемой. Оценим степень влияния деформируемой поверхности и не зависящих от времени свойств взвешивающей жидкости, например, вязкости, на величину предельного перемещения пузырьков. Предположений о форме акустической волны делать не будем.

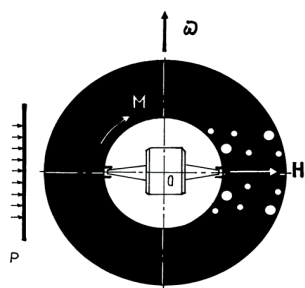


Рис. 1. Механизм воздействия акустической волны на пузырьки жидкости

Линейность задачи позволяет представить уравнения движения, к примеру, одного пузырька. в проекции на его главные центральные оси инерции в виде

$$m_{ii} \ddot{U}_i + Q_i = F_i, \quad i=1,2,\dots,6; \tag{1}$$

$$m_{ii} \ddot{U}_i + c_i U_i + Q_i = F_i; \tag{2}$$

$$m_{ii} \ddot{U}_i + b_i \dot{U}_i + Q_i = F_i, \tag{3}$$

где m_{ii} – масса пузырька (в случае углового движения – момент инерции); \ddot{U}_i - ускорение центра масс (линейное, либо угловое); F_i – сила, с которой распространяющаяся в жидкости волна воздействует на недеформируемую поверхность пузырька; Q_i – дополнительная сила взаимодействия пузырька со средой, обусловленная деформацией его поверхности. Если рассматривать угловое движение, то все силы надо заменить моментами.

Сила Q_i определяется выражением:

$$Q_i = \iint_S \bar{q}(k, y, t) \cdot \bar{\tau}_i(x, y) dS, \tag{4}$$

где \bar{q} - давление, вызванное смещением пузырька; $\bar{\tau}_i$ - единичный вектор соответствующей оси координат; x, y - координаты на поверхности пузырька; t – время; S – поверхность пузырька. Зависимость обобщенной силы Q_i от перемещения поверхности может быть выражена в явном виде, для чего достаточно представить перемещение поверхности пузырька в следующей форме –

$$\bar{W}(x, y, t) = \sum_k U_k(t) \bar{V}_k(x, y), \quad k=1,2, \tag{5}$$

где $\bar{V}_k(x, y)$ – достаточно полная система векторных функций, причем при $k = 1, \dots, 6$ эти функции совпадают с определенными выше $\bar{\tau}_i$, то есть соответствуют перемещениям поверхности в целом, а остальные ($k = 7, 8, \dots$) выражают деформации поверхности; $U_k(t)$ – обобщенная координата. Очевидно, что при отсутствии деформаций, $U_k = U_k^*$ при $k = 1, \dots, 6$ и $U_k = 0$ при $k = 7, 8, \dots$.

Если поверхность пузырька перемещается (или деформируется) таким образом, что обобщенная координата растет с единичной скоростью

$$\dot{U}_k|_{t=0} = 1; \quad U_k|_{t=0} = 0; \quad U_m|_{m \neq k} = 0,$$

тогда на поверхности пузырька, вообще говоря, возникнет давление с составляющими по всем направлениям $\bar{\tau}_i$. Соотношение (4) обозначит обобщенную силу $f_{ik}(t)$, соответствующую этим условиям.

В силу линейности задачи, обобщенная сила $Q_i(t)$, которая возникает при произвольном смещении поверхности, определяется равенством, непосредственно вытекающим из принципа суперпозиции -

$$Q_i(t) = \sum_k Q_{ik}(t) = \sum_k \int_0^t f_{ik}(t-\tau) \dot{U}_k(\tau) d\tau. \tag{6}$$

Здесь и далее предполагается, что $U_k|_{t \leq 0} = 0$, а \dot{U}_k , вообще говоря, включает импульсные функции. В частности, если $\lim_{t \rightarrow 0} U_k \neq 0$ при $t \rightarrow +0$.

Зависимость обобщенных сил F_i от параметров волны давления также может быть представлена функциями f_{ik} . Получить такую зависимость позволяет мысленное представление движения части жидкости, ограниченной поверхностью пузырька. Динамическое равновесие полученного таким образом «фиктивного» тела можно описать уравнениями, аналогичными выражениям (5.1 ... 5.3). Если при этом фиктивное тело

находится на месте изучаемого пузырька, а динамическое равновесие его рассматривается относительно выбранных выше осей, то составляющие внешнего воздействия на несмещаемую поверхность и функции f_{ik} для фиктивного тела будут теми же, что и для пузырька, поэтому уравнения имеют вид –

$$F_i = \sum_n m_{ni}^\phi \ddot{U}_n^\phi + \sum_k \int_0^t f_{ik}^\phi(t-\tau) \ddot{U}_k^\phi(\tau) d\tau; \quad (7)$$

$$F_i = \sum_n m_{ni}^\phi \ddot{U}_n^\phi + \sum_k \int_0^t f_{ik}^\phi(t-\tau) \ddot{U}_k^\phi(\tau) d\tau + c_n U_{*n}; \quad (8)$$

$$F_i = \sum_n m_{ni}^\phi \ddot{U}_n^\phi + \sum_k \int_0^t f_{ik}^\phi(t-\tau) \ddot{U}_k^\phi(\tau) d\tau + b_n \dot{U}_{*n}, \quad (9)$$

где m_{ni}^ϕ - масса (статический момент или момент инерции фиктивного тела относительно выбранных осей); индекс « ϕ » обозначает принадлежность к фиктивному телу. Предполагается, что пузырек не отделен от жидкости. Это значит, что если он находится в реальной жидкости, то перемещения среды на его поверхности совпадают с его перемещениями. Если же пузырек находится в идеальной (без учета вязкости) жидкости, то это относится к нормальным перемещениям. Момент сил инерции представлен здесь суммой моментов, возникающих вследствие обобщенных перемещений U_n^ϕ как при $n = i$, так и при $n \neq i$, поскольку оси, относительно которых рассматривается динамическое равновесие фиктивного тела, вообще говоря, не являюся для него главными центральными осями инерции.

Фиктивное тело не вносит возмущений в распространяющуюся в жидкости волну. Поэтому, необходимые данные о его смещении (U_k^ϕ, U_n^ϕ) могут быть получены интегрированием соответствующим образом спроектированных смещений жидкости по поверхности и объему пузырька. Таким образом, уравнения (7 ... 9) можно рассматривать как равенства, определяющие силы F_i .

На основании соотношений (6), (7) уравнения (1 ... 3) движения пузырька могут быть записаны в виде интегро-дифференциальных соотношений:

$$m_{ii} \ddot{U}_{*i} + \sum_k \int_0^t f_{ik}(t-\tau) \ddot{U}_k(\tau) d\tau = \quad (10)$$

$$= \sum_n m_{ni}^\phi \ddot{U}_n^\phi + \sum_k \int_0^t f_{ik}^\phi(t-\tau) \ddot{U}_k^\phi(\tau) d\tau; \\ m_{ii} \ddot{U}_{*i} + \sum_k \int_0^t f_{ik}(t-\tau) \ddot{U}_k(\tau) d\tau + c_i U_{*i} = \quad (11)$$

$$= \sum_n m_{ni}^\phi \ddot{U}_n^\phi + \sum_k \int_0^t f_{ik}^\phi(t-\tau) \ddot{U}_k^\phi(\tau) d\tau + c_n U_{*n};$$

$$m_{ii} \ddot{U}_{*i} + \sum_k \int_0^t f_{ik}(t-\tau) \ddot{U}_k(\tau) d\tau + b_i \dot{U}_{*i} = \quad (12)$$

$$= \sum_n m_{ni}^\phi \ddot{U}_n^\phi + \sum_k \int_0^t f_{ik}^\phi(t-\tau) \ddot{U}_k^\phi(\tau) d\tau + b_n \dot{U}_{*n}.$$

Анализ уравнений (10 ... 12) позволяет сделать некоторые выводы об окончательных перемещениях пузырька. Преобразование Лапласа дает возможность привести эти выражения к виду -

$$m_{ii} p^2 U_{*i}^+ + \sum_k f_{ik}^+ p^2 U_k^+ = \sum_n m_{ni}^\phi p^2 U_n^{\phi+} + \sum_k f_{ik}^+ p^2 U_k^{\phi+}; \quad (13)$$

$$m_{ii} p^2 U_{*i}^+ + \sum_k f_{ik}^+ p^2 U_k^+ + c_i U_{*i}^+ = \quad (14)$$

$$= \sum_n m_{ni}^\phi p^2 U_n^{\phi+} + \sum_k f_{ik}^+ p^2 U_k^{\phi+} + c_n U_{*n}^+;$$

$$m_{ii} p^2 U_{*i}^+ + \sum_k f_{ik}^+ p^2 U_k^+ + b_i p U_{*i}^+ = \quad (15)$$

$$= \sum_n m_{ni}^\phi p^2 U_n^{\phi+} + \sum_k f_{ik}^+ p^2 U_k^{\phi+} + b_n p U_{*n}^+ ,$$

где смысл индекса «+» и параметра p определяется соотношением –

$$\int_0^\infty \Phi(t) \exp(-p t) dt = \Phi^+(p) .$$

Тогда:

$$U_{*i}(t) \rightarrow U_{*i}(p) \rightarrow U_{*i}^+; \quad U_{*i}(0)=0; \quad \dot{U}_{*i}(0)=0;$$

$$\ddot{U}_{*i}(t) \rightarrow p^2 U_{*i}^+; \quad f_{ik}(t) \rightarrow f_{ik}^+; \quad \ddot{U}_k(t) \rightarrow p^2 U_k^+;$$

$$\int_0^t f_{ik}(t-\tau) \ddot{U}_k(\tau) d\tau = f_{ik} \ddot{U}_k \rightarrow f_{ik}^+ p^2 U_k^+ \quad - \text{ в соответствии с}$$

теоремой Э.Бореля;

$$U_{*n}^\phi(t) \rightarrow U_{*n}^{\phi+};$$

$$\ddot{U}_{*n}^\phi(t) \rightarrow p^2 U_{*n}^{\phi+};$$

$$\int_0^t f_{ik}^\phi(t-\tau) \ddot{U}_k^\phi(\tau) d\tau \rightarrow f_{ik}^+ p^2 U_k^{\phi+}.$$

Чтобы из уравнений (13 ... 15) получить величины окончательных перемещений пузырька, достаточно воспользоваться формулой -

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \Phi_\infty = \lim_{p \rightarrow 0} \Phi^+(p), \quad (16)$$

справедливой, если предел (не обязательно ограниченный) в ее левой части существует и выполняется условие:

$$\left[\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) \exp(-pt) \right]_{p=0} = 0.$$

Влияние физико-механических свойств жидкостатического подвеса. В том случае, когда акустическая волна ограничена во времени или затухает, а жидкость безгранична, можно утверждать, что перемещения пузырьков будут удовлетворять указанным условиям. Действительно, излучение возмущающих волн при колебаниях пузырька в безграничной среде вызывает затухание колебаний. Поэтому, если они и будут иметь место, то с прекращением звукового воздействия будут затухать и, таким образом, перемещения в итоге также будут стремиться к пределу. Кроме того, ограничение внешнего воздействия исключает экспоненциальное увеличение перемещений пузырька при $t \rightarrow \infty$.

Характер взаимосвязи окончательных перемещений пузырьков от окончательных перемещений фиктивного тела, то есть жидкости в отсутствие пузырька, как следует из соотношений (13 ... 16), существенным образом зависит от поведения функции $[f_{ik}^+(p)]_{p \rightarrow 0}$ или, что то же самое, $[f_{ik}^\phi(t)]_{t \rightarrow \infty}$.

Если пузырьки ограниченных размеров, в зависимости от свойств поддерживающей поплавок жидкости (безграничной) можно следующим образом классифицировать функции f_{ik} .

Идеальная (без учета вязкости) взвешивающая жидкость. Пусть при $t > 0$ пузырек перемещается (или деформируется) в безграничной среде с единичной скоростью

$$\dot{U}_k = 1, \quad U_k|_{t(0)} = 0.$$

Тогда, по прошествии достаточно большого времени, когда обтекание установится, сжимаемость жидкости уже не будет влиять на поле скоростей в достаточно обширной окрестности пузырька и количество движения жидкости будет характеризоваться присоединенными массами m_{ik}^0 . Движение жидкости создается силами f_{ik} при $\dot{U}_k = 1$. Поэтому количество движения при $t \rightarrow \infty$ будет равно m_{ik}^0 , так как $m_{ik}^0 \dot{U}_k(t)|_{t \rightarrow \infty} = m_{ik}^0 \cdot 1 = m_{ik}^0$.

С учетом этого, имеем:

$$\frac{d}{dt} [m_{ik}^0 \dot{U}_k(t)]|_{t \rightarrow \infty} = f_{ik}(t)|_{t \rightarrow \infty};$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt} [m_{ik}^0 \dot{U}_k(t)]|_{t \rightarrow \infty} = \int_0^t f_{ik}(\tau) d\tau|_{t \rightarrow \infty};$$

$$m_{ik}^0 = \int_0^t f_{ik}(\tau) d\tau|_{t \rightarrow \infty}; \quad m_{ik}^0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f_{ik}(\tau) d\tau;$$

$$m_{ik}^0 = \int_0^{\infty} f_{ik}(\tau) d\tau.$$

Применим одностороннее преобразование Лапласа:

$$f_{ik}(t) \rightarrow f_{ik}^+(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f_{ik}(\tau) d\tau;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} f_{ik}^+(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp(-pt) f_{ik}(\tau) d\tau;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} f_{ik}^+(p) = \int_0^{\infty} f_{ik}(\tau) d\tau = m_{ik}^0. \tag{17}$$

Это значит, что в случае *идеальной*, без учета вязкости, жидкости функции f_{ik} интегрируемы, а применение соотношений (16) дает:

$$\lim_{p \rightarrow 0} f_{ik}^+(p) = \int_0^{\infty} f_{ik}(\tau) d\tau = m_{ik}^0. \tag{18}$$

Реальная (с учетом вязкости) *взвешивающая жидкость*. Равномерное движение в жидкости будет встречать сопротивление α_{ik} , поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{ik}(t) = \alpha_{ik}. \tag{19}$$

Можно утверждать, что $\alpha_{ik} > 0$. Кроме того, очевидно, что все величины сопротивления α_{ik} конечны.

В соответствии с формулой (16)

$$\lim_{p \rightarrow 0} p f_{ik}^+ = \alpha_{ik}. \tag{20}$$

Так как

$$\dot{U}_{*i} |_{t \rightarrow \infty} = \text{const},$$

то

$$\ddot{U}_{*i} |_{t \rightarrow \infty} = 0.$$

При установившемся перемещении пузырьков, то есть при $t \rightarrow \infty$, силы f_{ik} уравновешиваются силами сопротивления α_{ik} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{ik} = \alpha_{ik} \quad (\alpha_{ik} > 0, \quad \alpha_{ik} < M_{\text{огранич}}).$$

Выполненные предварительные преобразования позволяют оценить пределы, то есть при условии $p \rightarrow 0$, соотношения, которые вытекают из выражений (13 ... 15), и дают возможность вычислить окончательные перемещения пузырьков. Умножим все члены системы уравнений (13 ... 15) на величину p^q (здесь $q = -1, 0$ соответствуют рассмотренным выше двум случаям состояния взвешивающей гироузел жидкости) и устремим величину p к нулю. Тогда предельные соотношения будут иметь вид:

идеальная жидкость

$$m_{ii} U_{i\infty} + \sum_{k=1}^6 m_{ik}^0 U_{k\infty} + [m_{ii} (U_{*i\infty} - U_{i\infty})] + \left[\sum_{k=7}^{\infty} m_{ik}^0 U_{k\infty} \right] = \sum_n m_{ni}^{\Phi} U_{n\infty}^{\Phi} + \sum_{k=1}^6 m_{ik}^0 U_{k\infty}^{\Phi} + \left[\sum_n m_{ni}^{\Phi} (U_{*n\infty}^{\Phi} - U_{n\infty}^{\Phi}) \right] + \left[\sum_{k=7}^{\infty} m_{ik}^0 U_{k\infty}^{\Phi} \right]; \tag{21}$$

реальная жидкость

$$\sum_{k=1}^6 \alpha_{ik} U_{k\infty} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \alpha_{ik} U_{k\infty} \right] = \sum_{k=1}^6 \alpha_{ik} U_{k\infty}^{\Phi} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \alpha_{ik} U_{k\infty}^{\Phi} \right]; \tag{22}$$

идеальная жидкость

незатухающие колебания пузырька (предельные перемещения отсутствуют);

реальная жидкость

незатухающие колебания пузырька (предельные перемещения отсутствуют);

идеальная жидкость

незатухающие колебания пузырька (предельные перемещение отсутствуют);

реальная жидкость

$$\sum_{k=1}^6 \alpha_{ik} U_{k\infty} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \alpha_{ik} U_{k\infty} \right] + b_i U_{k\infty} = \sum_{k=1}^6 \alpha_{ik} U_{k\infty}^{\Phi} + \left[\sum_{k=7}^{\infty} \alpha_{ik} U_{k\infty}^{\Phi} \right] + b_n U_{k\infty}^{\Phi}. \tag{23}$$

В квадратных скобках указаны остаточные деформации поверхности пузырька (левая часть уравнений) и фиктивного тела (правая часть уравнений).

Анализ показывает, что упругие деформации не влияют на величину окончательного перемещения пузырька, так как величины m_{ii} , m_{ik}^0 , α_{ik} ограничены, а остаточные деформации равны нулю, вследствие чего равны нулю и члены, им соответствующие.

Если функции f_{ik} не интегрируемы (в случае реальной жидкости), масса пузырька и деформации его поверхности не влияют на предельные перемещения. Этот вывод следует из выражений (21 ... 23) не содержащих обобщенные массы пузырьков.

В том случае, когда деформации обоих тел упругие, главные центральные оси, а также их массы (моменты инерции) соответственно совпадают и окончательные

перемещения пузырька и фиктивного тела (жидкости в отсутствие пузырька) равны между собой. Деформации фиктивного тела будут упругими, например, в случае плоской акустической волны, когда все частицы жидкости перемещаются на одно и то же расстояние.

Отсутствие предельного перемещения при линейно-упругом и вязко-упругом подвесе гидроузла означает наличие незатухающих колебаний.

Пусть в жидкости, вследствие либо ударных, либо тепловых (или тех и других одновременно), возникли пузырьки газа (рис. 2).

Проанализируем природу возникновения момента гидростатических сил, обусловленных движением пузырьков.

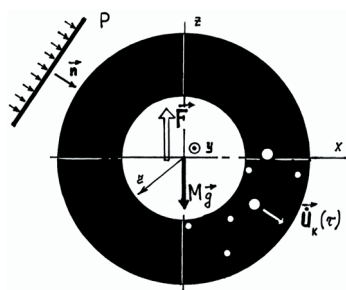


Рис. 2. Природа возникновения возмущающего момента при перемещении пузырьков газа в гидростатическом подвесе

В исходном состоянии силы веса гидроузла $M\vec{g}$ и архимедова сила \vec{F} направлены по одной прямой в противоположные стороны, так что имеет место равенство

$$\vec{F} = -M\vec{g}.$$

Образование пузырьков, естественно, приведет к параллельному смещению вектора \vec{F} и возникновению возмущающего момента относительно выходной оси Oy . Величина этого момента определится соотношением

$$M^a = x_A F_z = \frac{m_k}{m_{ж}} \left[r + \int_0^t \dot{U}_k(\tau) d\tau \right] \sin(\hat{n}, x) F = \frac{m_k M^0}{m_{ж}} g \left[r + \int_0^t \dot{U}_k(\tau) d\tau \right] \sin(\hat{n}, x), \quad (24)$$

где $F = M^0 g$; $m_k, M^0, m_{ж}$ - соответственно массы k -го пузырька в фиксированной плоскости шпангоута ДУСУ, вытесненной поплавком жидкости и жидкофазной части подвеса; g - ускорение свободного падения; $m_k r$ - статический момент массы пузырька.

Если пузырек не перемещается ($\dot{U}_k(\tau) = 0$), то выражение (24) упрощается -

$$M^a = \frac{m_k M^0}{m_{ж}} g r \sin(\hat{n}, x). \quad (25)$$

Здесь предполагается, что радиус пузырька r_0 намного меньше радиуса поплавка, то есть

$$r_0 \ll r.$$

Если в плоскости шпангоута находится n пузырьков, формула (24) приобретает вид -

$$M^a = \frac{M^0}{m_{ж}} g \sum_{k=1}^n \left[m_k r + m_k \int_0^t \dot{U}_k(\tau) d\tau \right] \sin(\hat{n}, x) \quad (26)$$

Предположим, что пузырьки газа собираются в m плоскостях шпангоутов (рис. 5.3). Тогда в окончательном виде получаем:

$$M^a = \frac{M^0}{m_{ж}} g \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \left[m_k r \sin(\hat{n}, x) + m_l r \sin(\hat{n}, x) + m_k \int_0^t \dot{U}_k(\tau) \sin(\hat{n}, x) d\tau + m_l \int_0^t \dot{U}_l(\tau) \sin(\hat{n}, x) d\tau \right]. \quad (27)$$

Если учитывать радиус пузырька, считая его достаточно большим, тогда можно уточнить формулу (27):

$$M^a = \frac{M^0}{m_{ж}} g \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \left[m_k (r + r_{0k}) \sin(\hat{n}, x) + m_l (r + r_{0l}) \sin(\hat{n}, x) + m_k \int_0^t \dot{U}_k(\tau) \sin(\hat{n}, x) d\tau + m_l \int_0^t \dot{U}_l(\tau) \sin(\hat{n}, x) d\tau \right]. \quad (28)$$

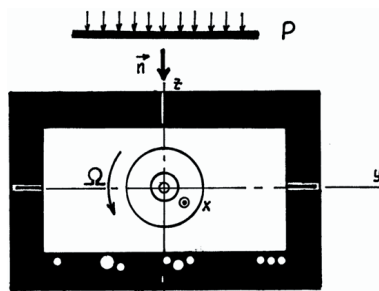


Рис. 3. Расположение пузырьков газа в плоскостях шпангоута ДУСУ

Как уже было сказано, акустическое излучение достигает максимальных значений во время старта РН. С увеличением высоты полета, то есть при движении ракеты в области пониженного давления, эта величина существенно понижается. Поэтому можно принять полный импульс акустического давления конечным по величине. В этом случае, образовавшиеся пузырьки газа пройдут на фиксированную величину и остановятся с прекращением действия акустического излучения.

Для определения закона движения $U(t)$ пузырьков газа с учетом только трения о жидкость воспользуемся интегро-дифференциальным соотношением (10 ... 12):

$$m_k \ddot{U}_k(t) + \int_0^t [m_{k0} \delta_1(t-\tau) + \alpha] \ddot{U}_k(\tau) d\tau = m_k^0 [\delta_1(t) - \delta_1(t-1)] + \int_0^t [m_{k0} \delta_1(t-\tau) + \alpha] [\delta_1(\tau) - \delta_1(\tau-1)] d\tau, \quad (29)$$

где m_k^0 - масса вытесненной пузырьком жидкости; m_{k0} - присоединенные массы; α - коэффициент вязкого сопротивления при движении пузырька; $\delta_1(t)$ - дельта-функция Дирака.

Применим одностороннее преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях. В результате выражение (29) записываем в операторной форме:

$$(m_k + m_{k0}) p^2 U_k(p) + \alpha p U_k(p) = (m_k^0 + m_{k0}) (1 - e^{-p}) + \alpha \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p} \right).$$

Или так –

$$p[(m_k + m_{k0})p + \alpha] U_k(p) = (1 - e^{-p}) \left(m_k^0 + m_{k0} + \alpha \frac{1}{p} \right).$$

Откуда находим:

$$\begin{aligned} U_k(p) &= \frac{(1 - e^{-p}) \left(m_k^0 + m_{k0} + \frac{\alpha}{p} \right)}{p[(m_k + m_{k0})p + \alpha]} = \\ &= \frac{(1 - e^{-p}) [(m_k^0 + m_{k0})p + \alpha]}{p^2 [(m_k + m_{k0})p + \alpha]} = \\ &= \frac{(m_k^0 + m_{k0})p + \alpha}{p^2 [(m_k + m_{k0})p + \alpha]} - \frac{[(m_k^0 + m_{k0})p + \alpha] e^{-p}}{p^2 [(m_k + m_{k0})p + \alpha]}. \end{aligned}$$

Представим первую дробь в виде –

$$\frac{(m_k^0 + m_{k0})p + \alpha}{p^2 [(m_k + m_{k0})p + \alpha]} = \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p} + \frac{a_3}{(m_k + m_{k0})p + \alpha}.$$

Тогда

$$(m_k^0 + m_{k0})p + \alpha = a_1 [(m_k + m_{k0})p + \alpha] + a_2 p [(m_k + m_{k0})p + \alpha] + a_3 p^2.$$

Это соотношение позволяет установить значения величин a_1 , a_2 и a_3 :

$$\begin{aligned} p=0 & \left| \begin{aligned} a_1 &= 1; \\ 0 &= a_2(m_k + m_{k0}) + a_3; \\ p & \left| \begin{aligned} m_k^0 + m_{k0} &= m_k + m_{k0} + \alpha a_2; \\ a_2 &= \frac{1}{\alpha}(m_k^0 - m_{k0}); \\ a_3 &= \frac{(m_k - m_k^0)(m_k + m_{k0})}{\alpha} \end{aligned} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

А с учетом найденных значений величин a_i перемещение пузырька в операторной форме примет вид –

$$M^a = \frac{M^0}{m_{ж}} g \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n [(m_k + m_l) r \sin(\hat{n}, x) + \left(m_k \frac{m_k^0 + m_{k0}}{m_k + m_{k0}} U_{k\infty} + m_l \frac{m_l^0 + m_{l0}}{m_l + m_{l0}} U_{l\infty} \right) \sin(\hat{n}, x)]. \quad (34)$$

$$\begin{aligned} U_k(p) &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \cdot \frac{m_k - m_k^0}{\alpha} + \frac{m_k - m_k^0}{\alpha} \times \\ &\times \frac{1}{p + \frac{\alpha}{m_k + m_{k0}}} - \\ &- e^{-p} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \cdot \frac{m_k - m_k^0}{\alpha} + \frac{m_k - m_k^0}{\alpha} \cdot \frac{1}{p + \frac{\alpha}{m_k + m_{k0}}} \right). \end{aligned}$$

Введя обозначение $v_1 = \frac{\alpha}{m_k + m_{k0}}$ и переходя к оригиналу, получаем закон движения пузырька:

$$\begin{aligned} U_k(t) &= \left[t - \frac{1}{\alpha} (m_k - m_k^0) (1 - e^{-v_1 t}) \right] \delta_0(t) - \\ &- \left[t - 1 - \frac{1}{\alpha} (m_k - m_k^0) (1 - e^{-v_1(t-1)}) \right] \delta_0(t-1). \quad (30) \end{aligned}$$

Если сомножители $(1 - e^{-v_1 t})$ и $(1 - e^{-v_1(t-1)})$ представить в виде разложения в ряд при $t \geq 1$, получим –

$$\dot{\beta}_{уст} = \frac{0}{b m_{ж}} g \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \left[(m_k + m_l) r + \left(m_k \frac{m_k^0 + m_{k0}}{m_k + m_{k0}} U_{k\infty} + m_l \frac{m_l^0 + m_{l0}}{m_l + m_{l0}} U_{l\infty} \right) \right] \sin(\hat{n}, x). \quad (37)$$

$$\begin{aligned} U_k(t) &= \frac{m_k^0 + m_{k0}}{m_k + m_{k0}} + \\ &+ \frac{m_k - m_k^0}{m_k + m_{k0}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} v_1^n \frac{t^{n+1} - (t-1)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \geq 1. \quad (31) \end{aligned}$$

В том случае, когда вязкое сопротивление незначительное по величине, а время T достаточно большое ($v_1 T \ll 1$), за период времени $1 \leq t \leq T$ перемещение пузырька определяется только первым слагаемым.

Проведем оценку величины предельного перемещения пузырька. Для этого в выражении (31) достаточно положить $t \rightarrow \infty$. Тогда получаем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_k(t) = \frac{m_k^0 + m_{k0}}{m_k + m_{k0}}, \quad \text{если } v_1 T \ll 1. \quad (32)$$

Приведенные соотношения получены для одного пузырька. Обобщим эти результаты на произвольное их количество.

Наибольший интерес, как правило, представляют значения установившегося сдвига нуля (у датчика угловой скорости) или дрейфа нуля (у интегрирующего гироскопа). Поэтому вначале проведем их качественную оценку.

Пусть по прошествии фиксированного времени действие акустического излучения прекратилось. Тогда, если пузырьки находятся в плоскости одного шанпоугта, возмущающий момент M^a будет определяться формулой –

$$M^a = \frac{M^0}{m_{ж}} g \sum_{k=1}^n \left[m_k r + m_k \frac{m_k^0 + m_{k0}}{m_k + m_{k0}} U_{k\infty} \right] \sin(\hat{n}, x), \quad (33)$$

если пузырьки размещены в нескольких плоскостях, тогда формула усложняется:

Очевидно, что когда пузырьки газа останутся на поверхности поплавок, возмущающий момент M^a будет определяться формулой –

$$M^a = \frac{M^0}{m_{ж}} g \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n (m_k + m_l) r \sin(\hat{n}, x). \quad (35)$$

Полученные соотношения позволяют установить величину систематической составляющей сдвига нуля дифференцирующего гироскопа –

$$\beta_{уст} = \frac{0}{c_1 m_{ж}} g \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \left[\begin{aligned} &(m_k + m_l) r \sin(\hat{n}, x) + \\ &+ \left(m_k \frac{m_k^0 + m_{k0}}{m_k + m_{k0}} U_{k\infty} + m_l \frac{m_l^0 + m_{l0}}{m_l + m_{l0}} U_{l\infty} \right) \sin(\hat{n}, x) \end{aligned} \right], \quad (36)$$

а также систематическую составляющую дрейфа нуля интегрирующего гироскопа –

Чтобы качественно и количественно оценить влияние движения образовавшихся пузырьков газа на показания прибора, например, интегрирующего гироскопа, достаточно воспользоваться уравнениями:

$$\begin{aligned}
 & B\ddot{\beta} + R[(\omega_z^2 - \omega_x^2)\sin\beta\cos\beta - \omega_x\omega_z\cos 2\beta] + \\
 & + H(\omega_x\sin\beta + \omega_z\cos\beta) + B\dot{\omega}_y + b\dot{\beta} + M + \frac{M^0}{m_{ж}} \times \\
 & \times g \sum_{l=1}^m \sum_{n=1}^n [(m_k + m_l)r + m_k U_k(t) + m_l U_l(t)] \sin(\hat{n}, x) = 0,
 \end{aligned} \tag{38}$$

где $B=I_0+I_y$; $R=I_0+I_z-I_x$; I_x, I_y, I_z – моменты инерции поплавка; I, I_0 – полярный и экваториальный моменты инерции ротора; H – кинетический момент гироскопа; β – угол поворота поплавка вокруг выходной оси Oy ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости движения корпуса ракеты-носителя относительно центра масс; M – прочие моменты-помехи (дебаланса, трения, тяжести токоподводов и др.).

Ограничиваясь рамками прецессионной теории, уравнения (38) можно записать в укороченном виде:

$$\begin{aligned}
 & b\dot{\beta} = -H\omega_z\cos\beta - H\omega_x\sin\beta - B\dot{\omega}_y + \\
 & + M + \frac{M^0}{m_{ж}} g \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ (m_k + m_l)r + \right. \\
 & + m_k \left[t - \frac{1}{\alpha}(m_k - m_k^0)(1 - e^{-v_1 t}) \right] \delta_0(t) - m_k \left[t - 1 - \frac{1}{\alpha}(m_k - m_k^0)(1 - e^{-v_1(t-1)}) \right] \cdot \\
 & \delta_0(t-1) + m_l \left[t - \frac{1}{\alpha}(m_l - m_l^0)(1 - e^{-v_1 t}) \right] \delta_0(t) - \\
 & \left. - m_l \left[t - 1 - \frac{1}{\alpha}(m_l - m_l^0)(1 - e^{-v_1(t-1)}) \right] \delta_0(t-1) \right\} \sin(\hat{n}, x).
 \end{aligned} \tag{39}$$

Откуда несложно определить угол поворота подвижной части прибора:

$$\begin{aligned}
 \beta = & - \int_0^t \frac{H\omega_z\cos\beta}{b} d\tau - \int_0^t \frac{H\omega_x\sin\beta}{b} d\tau + \\
 & + \int_0^t \frac{B\dot{\omega}_y}{b} d\tau + \int_0^t \frac{M}{b} d\tau + \frac{M^0}{m_{ж}} g \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ (m_k + m_l) \times \right. \\
 & \times r + m_k \left[\tau - \frac{1}{\alpha}(m_k - m_k^0)(1 - e^{-v_1 \tau}) \right] \delta_0(\tau) - \\
 & - m_k \left[\tau - 1 - \frac{1}{\alpha}(m_k - m_k^0)(1 - e^{-v_1(\tau-1)}) \right] \times \\
 & \times \delta_0(\tau-1) + m_l \left[\tau - \frac{1}{\alpha}(m_l - m_l^0)(1 - e^{-v_1 \tau}) \right] \delta_0(\tau) - \\
 & - m_l \left[\tau - 1 - \frac{1}{\alpha}(m_l - m_l^0)(1 - e^{-v_1(\tau-1)}) \right] \times \\
 & \times \delta_0(\tau-1) \left. \right\} \sin(\hat{n}, x) d\tau.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Выводы по результатам проведенных исследований и перспективы для дальнейшего изучения явления.

Смысл первых четырех слагаемых в правой части изучаемого соотношения (40) известен:

$\frac{H\omega_z\cos\beta}{b}$ – полезный сигнал, пропорциональный измеряемой угловой скорости РН ω_z ;

$\frac{H\omega_x\sin\beta}{b}$ – методическая погрешность прибора, обусловленная влиянием перекрестной угловой скорости ω_x ;

$\frac{B\dot{\omega}_y}{b}$ – погрешность, вызванная влиянием углового ускорения $\dot{\omega}_y$ ракеты-носителя;

$\frac{M}{b}$ – погрешность, обусловленная влиянием прочих моментов-помех.

Последнее слагаемое в правой части выражения (40) есть продукт осмысления природы влияния движущихся в жидкофазном подвесе гироскопа образовавшихся пузырьков газа на погрешность измерений. Конечно, некоторые упрощения расчетной модели не позволили учесть все особенности явления, однако даже в такой, линейной, постановке позволяют сделать вполне определенные выводы о количественной и качественной структуре этой погрешности прибора и синтезировать эффективные средства и меры борьбы с ней.

3. Выводы

Построенные расчетные модели создают необходимые предпосылки для количественного и качественного анализа колебательных процессов в жидкостатическом подвесе гироскопа. Открывают возможности изучения природы явления на виртуальных моделях.

Создана необходимая научная основа для объяснения структуры таких неизбежных проявлений дифракционных процессов как возникновение зон каустики, волнового совпадения и др.

Литература

1. Карачун В.В. Линейно-упругий поплавковый подвес гироскопа [Текст]: монография / В.В. Карачун, В.Н. Мельник, О.Я. Ковалец; под общ. ред. В.В. Карачуна; МОН Украины.- К.: «Корнейчук», 2009. – 240 с.
2. Кладун Е.А. Упругое воздействие акустической волны с круглой пластиной [Текст] // *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. – 2008. -№1(48). – С.17-23.
3. Ізоляція імпедансних систем приладів [Текст]: монографія / В.М. Мельник, М.С. Тривайло, В.В. Карачун, О.Я. Ковалець. –К.: «Корнійчук», 2009. – 104 с.
4. Ковалець О.Я. Влияние дифракционных явлений на погрешность систем коррекции гирогоризонта [Текст] // *Вісник НТУУ «КПІ»: Серія ПРИЛАДОБУДУВАННЯ*. – 2009. – Вип..38. – С.10-16.
5. About the Influence if Acoustic Influences to the Equipment of Space Apparatus Complex [Текст]: Proceeding of fourth Ukraine-Russia-China simpoziium on space science and technology / - Ukraine, September 12-17, 1996. –P.720.