УДК 512.643.8:531.3

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ КОМПОЗИЦИИ МАТРИЦ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НЕ РАВНЫМ И ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ ВЕКТОРАМ

Досліджуються мультиплікативні композиції векторних матриць. Встановлюються комутативні, адитивно та мультиплікативно-обернені векторні матриці. Приводиться процедура матричного представлення мультиплікативних композицій двох і трьох векторів

Ключові слова: кватерніоні матриці, мультиплікативін композиції, таблиця множення, обернені матриці, транспонування, комутативність, ортогональність

Исследуются мультипликативные композиции векторных матриц. Определяются коммутативные, аддитивно и мультипликативно-обратные векторные матрицы. Приводится процедура матричного представления мультипликативных композиций двух и трех векторов

Ключевые слова: кватернионные матрицы, мультипликативные композиции, таблица умножения, обратные матрицы, транспонирование, коммутативность, ортогональность

Multiplicative compositions of vectorial matrices are analyzed. Commutative, additively inverse and multiplicative inverse matrices are found. It is shown the procedure of matrix representation of multiplicative compositions of two and three vectors

Key words: quaternionic matrices, multiplicative compositions, multiplication table, inverse matrices, transposition, commutativity, orthogonality

В.В. Кравец
Доктор технических наук, профессор
Кафедра специализированных компьютерных систем
Государственное высшее учебное заведение
«Украинский государственный химико-технологический университет»
пр. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, Украина, 49005
Контактный тел.: 067-726-07-72; (056) 748-07-06

Т.В. Кравец
Ассистент
Кафедра «Теоретическая механика»*
Контактный тел.: 067-921-10-67; (056) 713-58-03

А.В. Харченко
Аспирант
Кафедра «Прикладная математика»*
Контактный тел.: 050-321-14-60
*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В.Лазаряна
ул. Лазаряна, 2, г. Днепропетровск, Украина, 49010

Введение

Обоснование актуальности разработки элементов исчисления кватернионных матриц и сферы их применения приводились в [9, 10, 11], что является систематическим дополнением известных результатов [1, 4, 12, 14, 15, 16, 19]. Иллюстрацией эффективного использования этого математического аппарата служат работы [2, 3, 5, 6, 7, 8, 17, 18, 20, 22, 23, 24]. Водятся векторные матрицы как частный случай кватернионных матриц, исследуются их свойства и операции. Показывается, что математический аппарат векторных матриц по существу заменяет векторную алгебру и оказывается достаточным и удобным инструментом как в аналитических преобразованиях при построении математических моделей, так и в вычислительном эксперименте, хорошо адаптированном к компьютерным технологиям [19, 21].

Постановка задачи

Рассматриваются матрицы эквивалентные вектору и противоположному вектору как частный случай введенной в [10] совокупности четырех кватернионных матриц. Исследуются свойства, структура мультипликативных композиций векторных матриц. Определяются коммутативные, аддитивно и мультипликативно-обратные матрицы. К рассмотренным мультипликативным композициям применяются операции транспонирования – полного, внутреннего, внешнего. С помощью свойства ассоциативности матричного произведения определяются тождественные векторные зависимости. Для мультипликативных композиций двух и трех векторов находятся матричные формулы в виде удобном для применения компьютерных технологий. А также устанавливаются соответствующие тождества векторной алгебры.

Решение задачи

Вектор $\overline{x}=\overline{i}\,x_1+\overline{j}\,x_2+\overline{k}\,x_3$ и противоположный вектор $-\overline{x}=-\overline{i}\,x_1-\overline{j}\,x_2-\overline{k}\,x_3$ рассматриваются как частный случай кватерниона $a=1a_0+ia_1+ja_2+ka_3$ и сопряженного кватерниона $\overline{a}=1a_0-ia_1-ja_2-ka_3$ при равной нулю скалярной части $a_0=0$ [13]. Здесь полагается, что x_i ($i=1,2,3$) – координаты вектора в прямоугольной декартовой системе осей. Вектор записывается в виде x_0 - матрицы-столбца (4×1) или x_0^t - матрицы-строки (1×4):

$$x_0=\begin{Vmatrix}0\\x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix},\quad x_0^t=\begin{Vmatrix}0 & x_1 & x_2 & x_3\end{Vmatrix}.$$

Вектору сопоставляются квадратные матрицы вида:

$$X=E_1x_1+E_2x_2+E_3x_3,\ \text{или}\ {}^tX={}^tE_1x_1+{}^tE_2x_2+{}^tE_3x_3,$$

а противоположному вектору – матрицы:

$${}^tX^t={}^tE_1^tx_1+{}^tE_2^tx_2+{}^tE_3^tx_3,\ \text{или}\ X^t=E_1^tx_1+E_2^tx_2+E_3^tx_3,$$

или являющиеся частным случаем матриц, эквивалентных кватерниону $A,{}^tA$ и сопряженному кватерниону ${}^tA^t,A^t$ [11]. Используя принятые обозначения, приведем развернутую запись этих матриц:

$$X=\begin{Vmatrix}0 & x_1 & x_2 & x_3\\ -x_1 & 0 & -x_3 & x_2\\ -x_2 & x_3 & 0 & -x_1\\ -x_3 & -x_2 & x_1 & 0\end{Vmatrix};\ {}^tX=\begin{Vmatrix}0 & -x_1 & -x_2 & -x_3\\ x_1 & 0 & -x_3 & x_2\\ x_2 & x_3 & 0 & -x_1\\ x_3 & -x_2 & x_1 & 0\end{Vmatrix};$$

$${}^tX^t=\begin{Vmatrix}0 & -x_1 & -x_2 & -x_3\\ x_1 & 0 & x_3 & -x_2\\ x_2 & -x_3 & 0 & x_1\\ x_3 & x_2 & -x_1 & 0\end{Vmatrix};\ X^t=\begin{Vmatrix}0 & x_1 & x_2 & x_3\\ -x_1 & 0 & x_3 & -x_2\\ -x_2 & -x_3 & 0 & x_1\\ -x_3 & x_2 & -x_1 & 0\end{Vmatrix}.$$

Матрицы, эквивалентные вектору и противоположному вектору являются кососимметричными:

$${}^t(X)^t=-X,\quad {}^t\left({}^tX\right)^t=-{}^tX,$$
$${}^t\left({}^tX^t\right)^t=-{}^tX^t,\quad {}^t\left(X^t\right)^t=-X^t.$$

Откуда:

$$X=-{}^tX^t,\quad {}^tX=-X^t,$$

т.е. эти матрицы являются аддитивно-обратными:

$$X+{}^tX^t=0,\quad {}^tX+X^t=0.$$

При анализе мультипликативных композиций матриц, эквивалентных не равным $\overline{x}=\overline{i}\,x_1+\overline{j}\,x_2+\overline{k}\,x_3$, $\overline{y}=\overline{i}\,y_1+\overline{j}\,y_2+\overline{k}\,y_3$ и противоположным векторам $-\overline{x}=-\overline{i}\,x_1-\overline{j}\,x_2-\overline{k}\,x_3$, $-\overline{y}=-\overline{i}\,y_1-\overline{j}\,y_2-\overline{k}\,y_3$ воспользуемся свойствами базисных матриц [9, 10]. Например, результатом произведения матриц $X\odot{}^tY^t$ является матрица кватернионного типа [11]:

$$X\odot{}^tY^t=\begin{Vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}E_0 & {}^tE_3^t & E_2\\ E_3 & E_0 & {}^tE_1^t\\ {}^tE_2^t & E_1 & E_0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Vmatrix},$$

имеющая базис $E_i(i=1,2,3)$, если воспользоваться свойством аддитивной обратности базисных матриц, и содержащая диагональную $(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)E_0$ и кососимметричную составляющие $(x_3y_2-x_2y_3)E_1+(x_1y_3-x_3y_1)E_2+(x_2y_1-x_1y_2)E_3$. Вводя для этого произведения обозначение Z, в развернутой записи получим:

$$Z=\begin{Vmatrix}x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & -x_2y_3+x_3y_2 & x_1y_3-x_3y_1 & -x_1y_2+x_2y_1\\ x_2y_3-x_3y_2 & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & x_1y_2-x_2y_1 & x_1y_3-x_3y_1\\ -x_1y_3+x_3y_1 & -x_1y_2+x_2y_1 & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & x_2y_3-x_3y_2\\ x_1y_2-x_2y_1 & -x_1y_3+x_3y_1 & -x_2y_3+x_3y_2 & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\end{Vmatrix}$$

Учитывая аддитивную обратность векторных матриц $X+{}^tX^t=0$, $Y+{}^tY^t=0$, устанавливаем ${}^tX^t\odot Y=Z$, а также $X\odot Y=-Z$, ${}^tX^t\odot{}^tY^t=-Z$. Выполнив над исходным произведением операцию внешнего транспонирования ${}^t\left(X\odot{}^tY^t\right)={}^tZ$, находим ${}^tX\odot Y^t={}^tZ$ [11] Откуда, используя аддитивную обратность векторных матриц, получим $X^t\odot{}^tY={}^tZ$, а также ${}^tX\odot{}^tY=-{}^tZ$, $X^t\odot Y^t=-{}^tZ$.

Производя над исходным произведением операции полного и внутреннего транспонирования: ${}^t\left(X\odot{}^tY^t\right)^t={}^tZ^t$, $\left(X\odot{}^tY^t\right)^t=Z^t$, находим $Y\odot{}^tX^t={}^tZ^t$, ${}^tY\odot X^t=Z^t$ [11]. Откуда в силу аддитивной обратности векторных матриц следует ${}^tY^t\odot X={}^tZ^t$, $Y^t\odot{}^tX=Z^t$, а также ${}^tY^t\odot{}^tX^t=-{}^tZ^t$, $Y\odot X=-{}^tZ^t$, $Y^t\odot X^t=-Z^t$, ${}^tY\odot{}^tX=-Z^t$.

В силу свойств базисных матриц [9, 11] результат произведения векторных матриц $X\odot{}^tY$ по структуре не является кватернионным, так как не может быть отнесен ни к базису $E_i(i=1,2,3)$, ни к базису ${}^tE_i(i=1,2,3)$. Вводя для этого произведения $X\odot{}^tY$ обозначение J, в развернутой записи получим:

$$J=\begin{Vmatrix}x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & x_2y_3-x_3y_2 & -x_1y_3+x_3y_1 & x_1y_2-x_2y_1\\ x_2y_3-x_3y_2 & x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3 & x_1y_2+x_2y_1 & x_1y_3+x_3y_1\\ -x_1y_3+x_3y_1 & x_1y_2+x_2y_1 & -x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3 & x_2y_3+x_3y_2\\ x_1y_2-x_2y_1 & x_1y_3+x_3y_1 & x_2y_3+x_3y_2 & -x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3\end{Vmatrix}.$$

Из аддитивной обратности перемножаемых здесь матриц следует ${}^tX^t \odot Y^t = J$, а также ${}^tX^t \odot {}^tY = -J$, $X \odot Y^t = -J$. Из коммутативности базисных матриц E_i и ${}^tE_i\,(i=1,2,3)$ имеем $X \odot {}^tY = {}^tY \odot X$ [11]. Откуда получаем ${}^tY \odot X = J$ и далее, в силу аддитивной обратности векторных матриц, находим $Y^t \odot {}^tX^t = J$, а также $Y^t \odot X = -J$, ${}^tY \odot {}^tX^t = -J$.

Аналогичный анализ проводится для произведения векторных матриц вида $Y \odot {}^tX$, для которых вводится обозначение I и приводится развернутая запись:

$$I = \begin{Vmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & -x_2y_3 + x_3y_2 & x_1y_3 - x_3y_1 & -x_1y_2 + x_2y_1 \\ -x_2y_3 + x_3y_2 & x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 & x_1y_2 + x_2y_1 & x_1y_3 + x_3y_1 \\ x_1y_3 - x_3y_1 & x_1y_2 + x_2y_1 & -x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 & x_2y_3 + x_3y_2 \\ -x_1y_2 + x_2y_1 & x_1y_3 + x_3y_1 & x_2y_3 + x_3y_2 & -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 \end{Vmatrix}.$$

Из свойства аддитивной обратности векторных матриц устанавливаем:

$${}^tY^t \odot X^t = I, \quad Y \odot X^t = -I, \quad {}^tY^t \odot X = -I.$$

Из коммутативности произведения $Y \odot {}^tX = {}^tX \odot Y$, следует ${}^tX \odot Y = I$ и далее, используя аддитивную обратность векторных матриц, получим $X^t \odot {}^tY^t = I$, ${}^tX \odot {}^tY^t = -I$, $X^t \odot Y = -I$.

Приведенные здесь результаты мультипликативных композиций матриц, эквивалентных не равным и противоположным векторам, систематизируются с помощью таблиц умножения (табл. 1.)

Таблица 1

Таблицы умножения векторных матриц

$\odot$	${}^tY^t$	Y	Y^t	${}^tY$
X	Z	$-Z$	$-J$	J
${}^tX^t$	$-Z$	Z	J	$-J$
${}^tX$	$-I$	I	${}^tZ$	$-{}^tZ$
X^t	$-I$	I	$-{}^tZ$	${}^tZ$

$\odot$	${}^tX^t$	X	X^t	${}^tX$
Y	${}^tZ^t$	$-{}^tZ^t$	$-I$	I
${}^tY^t$	$-{}^tZ^t$	${}^tZ^t$	$-I$	I
${}^tY$	$-J$	J	Z^t	$-Z^t$
Y^t	J	$-J$	$-Z^t$	Z^t

Из анализа приведенных таблиц умножения следует, что мультипликативные композиции векторных матриц сводятся к трем отличающимся результирующим матрицам Z, J, I, одна из которых Z по структуре является кватернионной, а остальные всевозможные произведения векторных матриц следуют из приведенных трех в результате операций транспонирования, свойств коммутативности и аддитивной обратности.

В частности, мультипликативные композиции матриц, эквивалентных равным и противоположным векторам устанавливаются из полученных результатов. Так, пологая $x_i = y_i$, из приведенных формул следует:

$$X \odot {}^tX^t = x^2E_0 \quad {}^tX \odot X^t = x^2E_0,$$
$${}^tX^t \odot X = x^2E_0, \quad X^t \odot {}^tX = x^2E_0,$$

а также

$$X \odot X = -x^2E_0, \quad {}^tX \odot {}^tX = -x^2E_0,$$
$${}^tX^t \odot {}^tX^t = -x^2E_0, \quad X^t \odot X^t = -x^2E_0,$$

где $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Откуда находятся обратные векторные матрицы:

$$(X)^{-1} = \frac{1}{x^2}\,{}^tX^t, \quad ({}^tX)^{-1} = \frac{1}{x^2}X^t,$$
$$({}^tX^t)^{-1} = \frac{1}{x^2}X, \quad (X^t)^{-1} = \frac{1}{x^2}\,{}^tX,$$

или

$$(X)^{-1} = -\frac{1}{x^2}X, \quad ({}^tX)^{-1} = -\frac{1}{x^2}\,{}^tX.$$

Для произведения векторных матриц $X \odot {}^tX$ вводится обозначение V. Результирующая матрица V в развернутой записи принимает вид:

$$V = \begin{Vmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 0 & 2x_1x_2 & -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 & 2x_2x_3 \\ 0 & 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{Vmatrix}.$$

Учитывая аддитивную обратность матриц, получим ${}^tX^t \odot X^t = V$, а также $X \odot X^t = -V$, ${}^tX^t \odot {}^tX = -V$. Используя свойство коммутативности при умножении векторных матриц $X \odot {}^tX = {}^tX \odot X$, находим ${}^tX \odot X = V$ и далее, из аддитивной обратности матриц, следует ${}^tX \odot {}^tX^t = -V$, $X^t \odot {}^tX^t = V$, $X^t \odot X = -V$. Полученные результаты мультипликативных композиций матриц, эквивалентных равным и противоположным векторам удобно представить таблицей умножения (табл. 2)

Таблица 2

Таблица умножения равных векторных матриц

$\odot$	${}^tX^t$	X	X^t	${}^tX$
X	x^2E_0	$-x^2E_0$	$-V$	V
${}^tX^t$	$-x^2E_0$	x^2E_0	V	$-V$
${}^tX$	$-V$	V	x^2E_0	$-x^2E_0$
X^t	V	$-V$	$-x^2E_0$	x^2E_0

Откуда видно, что результатом всевозможных произведений равных и противоположных векторных матриц являются две различные матрицы, одна из которых x^2E_0 является диагональной, а вторая V обладает симметрией относительно диагонали. Эти произведения связаны коммутативностью, аддитивной обратностью и операциями транспонирования.

Из анализа итоговых таблиц умножения векторных матриц, следует возможность свернуть их к компактной записи:

$\odot$	$Y \quad Y^t$	$\odot$	$X \quad X^t$
X X^t	$-Z \quad -J$ $-I \quad -{}^tZ$	Y Y^t	$-{}^tZ^t \quad -I$ $-J \quad -Z^t$

$\odot$	$X \quad X^t$
X X^t	$-x^2E_0 \quad -V$ $-V \quad -x^2E_0$

ограничиваясь рассмотрением векторных матриц, соответствующих базису E_i и $E_i^t(i=1,2,3)$.

Используя эти две векторные матрицы, определяемые базисом E_i и $E_i^t(i=1,2,3)$, представим в матричной форме мультипликативные композиции векторной алгебры, содержащие скалярные и векторные произведения двух $\bar{a},\bar{b}$ и трех $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ векторов. Этим векторам

$$\bar{a}=\bar{i}\,a_1+\bar{j}\,a_2+\bar{k}\,a_3,$$

$$\bar{b}=\bar{i}\,b_1+\bar{j}\,b_2+\bar{k}\,b_3,$$

$$\bar{c}=\bar{i}\,c_1+\bar{j}\,c_2+\bar{k}\,c_3$$

сопоставляются векторные матрицы A_0,B_0,C_0, а противоположным векторам – матрицы A_0^t,B_0^t,C_0^t. Векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ записываются в виде матриц-столбцов:

$$a_0=\begin{Vmatrix}0\\a_1\\a_2\\a_3\end{Vmatrix},\quad b_0=\begin{Vmatrix}0\\b_1\\b_2\\b_3\end{Vmatrix},\quad c_0=\begin{Vmatrix}0\\c_1\\c_2\\c_3\end{Vmatrix}.$$

Непосредственно устанавливаем:

$$A_0\cdot b_0=\begin{Vmatrix}\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\begin{matrix}a_2b_3-a_3b_2\\-a_1b_3+a_3b_1\\a_1b_2-a_2b_1\end{matrix}}\end{Vmatrix},\quad A_0^t\cdot b_0=\begin{Vmatrix}\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\begin{matrix}-a_2b_3+a_3b_2\\a_1b_3-a_3b_1\\-a_1b_2+a_2b_1\end{matrix}}\end{Vmatrix}.$$

Здесь выделены блоки, сопоставляемые скалярному

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

и векторному произведениям векторов:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{i}\left(a_2b_3-a_3b_2\right)+\bar{j}\left(a_3b_1-a_1b_3\right)+\bar{k}\left(a_1b_2-a_2b_1\right).$$

Полученное соответствие представим следующей символической записью:

$$A_0\cdot b_0\to\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\bar{a}\times\bar{b}}\end{Vmatrix},\quad A_0^t\cdot b_0\to\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)}\end{Vmatrix}.$$

В результате сложения рассматриваемых матричных произведений определяется матричное представление скалярного произведения векторов:

$$A_0\cdot b_0+A_0^t\cdot b_0\to2\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{0}\end{Vmatrix},$$

а матричное представление векторного произведения векторов находится при их вычитании:

$$A_0\cdot b_0-A_0^t\cdot b_0\to2\begin{Vmatrix}\dfrac{0}{\bar{a}\times\bar{b}}\end{Vmatrix},$$

то есть

$$\left(A_0+A_0^t\right)b_0\to2\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{0}\end{Vmatrix},\quad\left(A_0-A_0^t\right)b_0\to2\begin{Vmatrix}\dfrac{0}{\bar{a}\times\bar{b}}\end{Vmatrix}.$$

Образуем мультипликативные композиции векторных матриц, сопоставляемых трем векторам $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. и определим матричное представление смешанного и двойного векторного произведений:

$$A_0\cdot B_0\cdot c_0,\quad A_0\cdot B_0^t\cdot c_0,\quad A_0^t\cdot B_0\cdot c_0,\quad A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0$$

Свойство ассоциативности умножения матриц определяет две возможные последовательности перемножения этих матриц:

$$A_0\cdot B_0\cdot c_0=A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)=\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0,$$

$$A_0\cdot B_0^t\cdot c_0=A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)=\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0,$$

$$A_0^t\cdot B_0\cdot c_0=A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)=\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0,$$

$$A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0=A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)=\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0.$$

каждой из которых соответствуют ниже приводимые векторные композиции:

$$A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)\to\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}{-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)+\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}\end{Vmatrix},$$

$$A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\to\begin{Vmatrix}\dfrac{-\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}{-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}\end{Vmatrix},$$

$$A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)\to\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}{-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}\end{Vmatrix},$$

$$A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\to\begin{Vmatrix}\dfrac{-\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}{-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)+\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}\end{Vmatrix}.$$

а также

$$\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0\to\left\|\frac{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}}{-\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}}\right\|,$$

$$\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}}{\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{c}-2\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\bar{b}+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}}\right\|,$$

$$\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0\to\left\|\frac{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}}{\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{c}-2\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\bar{b}+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}}\right\|,$$

$$\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}}{-\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}}\right\|.$$

Из полученных соответствий составляются алгебраические суммы с целью выделения искомых векторных выражений той или иной структуры.

Так, из первой совокупности соответствий следует:

$$A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)-A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)-A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)+A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\to 4\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}\right\|,$$

$$A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)-A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)+A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)-A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\to 4\left\|\frac{\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}{0}\right\|,$$

$$A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)+A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)-A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)-A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\to 4\left\|\frac{0}{0}\right\|,$$

$$A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)+A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)+A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)+A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\to 4\left\|\frac{0}{-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)}\right\|.$$

Используя вторую совокупность, получим:

$$\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0-\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0-\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0+\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0\to 4\left\|\frac{0}{\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{c}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)}\right\|,$$

$$\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0-\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0+\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0-\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0\to 4\left\|\frac{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}}{0}\right\|,$$

$$\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0+\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0-\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0-\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0\to 4\left\|\frac{0}{0}\right\|,$$

$$\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0+\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0+\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0+\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0\to 4\left\|\frac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}-\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)}\right\|.$$

Используя свойство ассоциативности умножения матриц, рассмотренные суммы произведений матриц преобразуются в произведения сумм вида:

$$A_0\cdot B_0\cdot c_0-A_0\cdot B_0^t\cdot c_0-A_0^t\cdot B_0\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0=\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0,$$
$$A_0\cdot B_0\cdot c_0-A_0\cdot B_0^t\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0\cdot c_0-A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0=\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0,$$
$$A_0\cdot B_0\cdot c_0+A_0\cdot B_0^t\cdot c_0-A_0^t\cdot B_0\cdot c_0-A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0=\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0,$$
$$A_0\cdot B_0\cdot c_0+A_0\cdot B_0^t\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0=\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0.$$

Откуда устанавливается компактная матричная запись, представляющая искомые векторные операции над тремя векторами:

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0\to 4\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}\right\|,$$

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0\to 4\left\|\frac{\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}{0}\right\|,$$

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0\to 4\left\|\frac{0}{0}\right\|,$$

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0\to 4\left\|\frac{0}{-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)}\right\|.$$

а также

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0\to 4\left\|\frac{0}{\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{c}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)}\right\|,$$

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0\to 4\left\|\frac{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}}{0}\right\|,$$

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0\to 4\left\|\frac{0}{0}\right\|,$$

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0\to 4\left\|\frac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}-\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)}\right\|.$$

Апробация результатов

В развернутой записи полученные соответствия имеют вид:

$$\begin{Vmatrix}0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & 0 & 0 & 0\\ -a_2 & 0 & 0 & 0\\ -a_3 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0\\ b_1\\ b_2\\ b_3\end{Vmatrix}\to\left\|\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{0}\right\|,$$

$$\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_3 & a_2\\ 0 & a_3 & 0 & -a_1\\ 0 & -a_2 & a_1 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0\\ b_1\\ b_2\\ b_3\end{Vmatrix}\to\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\bar{b}}\right\|.$$

В частности, уменьшив размерность перемножаемых матриц, приходим к известным формулам [15, 19]:

$$\begin{Vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{Vmatrix}\to\bar{a}\cdot\bar{b},$$

$$\begin{Vmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{Vmatrix}\to\bar{a}\times\bar{b}.$$

Сопоставляя полученные здесь результаты, приходим к заключению, что равным матричным выражениям соответствуют тождественные векторные выражения, приравнивание которых приводит к следующим известным тождествам векторной алгебры [13]:

$$\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right),$$

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}=\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right),$$

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}.$$

Согласно полученным результатам, формуле двойного векторного произведения $\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)$ соответствует матричный аналог вида:

$$\left(A_0-A_0^t\right)\cdot\left(B_0-B_0^t\right)\cdot c_0=$$

$$=\left(C_0+C_0^t\right)\cdot\left(A_0+A_0^t\right)\cdot b_0-\left(B_0-B_0^t\right)\cdot\left(A_0+A_0^t\right)\cdot c_0$$

или в развернутой записи:

$$\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\0&0&-a_3&a_2\\0&a_3&0&-a_1\\0&-a_2&a_1&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\0&0&-b_3&b_2\\0&b_3&0&-b_1\\0&-b_2&b_1&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0\\c_1\\c_2\\c_3\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}0&c_1&c_2&c_3\\-c_1&0&0&0\\-c_2&0&0&0\\-c_3&0&0&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&a_1&a_2&a_3\\-a_1&0&0&0\\-a_2&0&0&0\\-a_3&0&0&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0\\b_1\\b_2\\b_3\end{Vmatrix}-$$

$$-\begin{Vmatrix}0&b_1&b_2&b_3\\-b_1&0&0&0\\-b_2&0&0&0\\-b_3&0&0&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&a_1&a_2&a_3\\-a_1&0&0&0\\-a_2&0&0&0\\-a_3&0&0&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0\\c_1\\c_2\\c_3\end{Vmatrix}$$

Откуда, понижая размерность матриц, получим матричное тождество [15]:

$$\begin{Vmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&-b_3&b_2\\b_3&0&-b_1\\-b_2&b_1&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a_1&a_2&a_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a_1&a_2&a_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{Vmatrix}.$$

Известно, что векторно-скалярное произведение векторов выражается определителем третьего порядка [13]:

$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

С другой стороны, смешанному произведению векторов соответствует установленная матричная форма:

$$\frac{1}{4}\left(A_0+A_0^t\right)\cdot\left(B_0-B_0^t\right)\cdot c_0\rightarrow\begin{Vmatrix}\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\\0\end{Vmatrix}$$

или в развернутой записи:

$$\begin{Vmatrix}0&a_1&a_2&a_3\\-a_1&0&0&0\\-a_2&0&0&0\\-a_3&0&0&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\0&0&-b_3&b_2\\0&b_3&0&-b_1\\0&-b_2&b_1&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0\\c_1\\c_2\\c_3\end{Vmatrix}\rightarrow\begin{Vmatrix}\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\\0\end{Vmatrix},$$

откуда, переходя к матрицам меньшей размерности, нетрудно получить матричную формулу для вычисления определителя третьего порядка:

$$\begin{Vmatrix}a_1&a_2&a_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&-b_3&b_2\\b_3&0&-b_1\\-b_2&b_1&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{Vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

Выводы

Исследованы свойства и структура мультипликативных композиций векторных матриц. Установлены коммутативные, аддитивно и мультипликативно-обратные векторные матрицы. Проведен анализ таблиц умножения векторных матриц и определены три вида результирующих матриц, одна из которых имеет кватернионную структуру. Мультипликативные композиции векторной алгебры, содержащие скалярное и векторное произведения, представлены в виде умножений алгебраических сумм двух векторных матриц, соответствующих базису E_i и $E_i^t\left(i=1,2,3\right)$. На основе свойства ассоциативности умножения матриц получены тождества векторной алгебры, которые служат цели апробации результатов.

Литература

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
2. Икес Б.П. Новый метод выполнения численных расчетов, связанных с работой системы управления ориентацией, основанный на использовании кватернионов / Б.П. Икес // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – 8. №1. – с. 13-19.
3. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1976. – 670 с.
4. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики / Н.А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – т. 1. – 480с.; т. 2. – 544с.
5. Кравець Т.В. Представлення кватерніонними матрицями послідовності скінчених поворотів твердого тіла у просторі // Автоматика-2000. Міжнародна конференція з автоматичного управління: Праці у 7-ми томах. – т.2. – Львів: Державний НДІ Інформаційної інфраструктури, 2000. – с.140-145.

6. Кравец В.В. Описание кинематики и нелинейной динамики ассиметричного твердого тела кватернионными матрицами. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Прикладная механика. – 2009. – Том 45. – №2 – с.133-143.
7. Кравец В.В. Кватернионные матрицы в нелинейной динамике скоростных транспортных систем / В.В. Кравец, В.В. Кравец, Т.В. Кравец // Вісник ДНУЗТ. – 2009. – Вип. 30. – с. 155-160.
8. Кравец В.В. Алгоритм вычисления матрицы инерции колесной пары при учете погрешностей изготовления и монтажа. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Збірник наукових праць Державного економіко-технологічного університету транспорту: Серія „Транспортні системи і технології ”. – Вип. 13. – К.: ДЕТУТ, 2008. – 288с.
9. Кравец В.В. Составление группы мономиальных (1, 0, -1) – матриц четвертого порядка. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 3/3 (39) – с.15-27.
10. Кравец В.В. Установление базиса кватернионных матриц. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 5/4 (41) – с.18-23.
11. Кравец В.В. Мультипликативные композиции матриц, эквивалентных равным и сопряженным кватернионам. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 6/4 (42) – с.20-26.
12. Коренев Г.В. Тензорное исчисление. / Г.В. Корнев – М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 240с.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832с.
14. Кузечева З.А. Векторы, алгебры, пространства. / З.А. Кузечева – М.: Знание, сер. «Математика и кибернетика». – 1970. – с. 11-64.
15. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье – М.: Физматгиз, 1961. – 824с.
16. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 400с.
17. Мэйо Р.А. Переходная матрица для вычисления относительных кватернионов / Р.А. Мэйо // Ракетная техника и космонавтика. – 1979. – 17 №3. – с. 184-189.
18. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. / С.М. Онищенко – Киев: Наук. думка, 1983. – 208 с.
19. Павловский М.А. Теоретична механіка: підручник. / М.А. Павловский – К.: Техніка, 2002. – 512с.
20. Плотников П.К. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела. / П.К. Плотников, Ю.Н. Челноков – Сб. научно-методич. статей по теоретической механике, 1981, вып. 11, с. 122-129
21. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера / В.П. Сигорский – Киев.: Техника, 1977. – 768с.
22. Kravets V.V. Evaluating the Dynamic Load on a High-Speed Railroad Car / V.V. Kravets // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41. №3. – p. 324-329.
23. Kravets V.V. On the Nonlinear Dynamics of Elastically Interacting Asymmetric Rigid Bodies / V.V. Kravets, T.V. Kravets // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42. №1. – p. 110-114.
24. Kravets V.V. Evaluation of the Centrifugal, Coriolis, and Gyroscopic Forces on a Railroad Vehicle Moving at High Speed / V.V. Kravets, T.V. Kravets // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44. №1. – p. 101-109