Література

1. Цирель С.В. Предвидение и прогноз // Математика: – М.: Наука. – 2007. – 145 с.
2. Гордон Т.Н. Новый подход к методу Дельфи // Научно-техническое прогнозирование для промышленности и правительственных учреждений.-Москва: Прогресс, 2002.- С. 84-93.
3. Гневашева В.А. Прогнозування економіки: поняття і історія // Знання. –2005. – С. 141-144.
4. Антомонов Ю.Г., Красникова Л.И., Чораян О.Г. Методы математической биологии. Книга 5. «Информационные методы синтеза моделей биологических систем». – Киев: Вища школа, 2002. – 240 с.
5. Mc Zeod Douglas S. State modal system plans as technical issue documents - a new role // Transportation Research Record, № 1206, 2004.- P. 17-23.
6. Рахмангулов А.Н., Трофимов С.В., Корнилов С.Н. Управление транспортними системами. Теоретические основы: Учеб. пособие. – Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 2001. – С. 152-180.
7. Орлов А. И. Теория принятия решений. – М.: Экзамен, 2006. – 576 с.
8. Голицын Г.А. Динамическая теория поведения./В кн.: Механизмы и принципы целенаправленного поведения.- Москва: Наука, 1972. С. 5-33.

УДК 004.942

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАСОРЕНИЯ ОКОЛОЗЕМНЫХ ОРБИТ

И.А. Пилькевич
Доктор технических наук, доцент,
заведующий кафедрой
Кафедра мониторинга окружающей природной среды
Житомирский национальный агроэкологический университет
Контактный тел. (0412) 41-56 86

Розроблено метод практичного розрахунку швидкості та концентрації елементів у кожній точці простору в кожен момент часу як розв'язання рівнянь механіки у спеціально вибраній системі координат. Шляхом послідовного застосування спеціально доведених теорем обґрунтовані можливість та методика побудови спеціальних систем координат

Ключові слова: адаптована математична модель, об'ємно-розподілений об'єкт

Разработан метод практического расчета скорости и концентрации элементов в каждой точке пространства в заданный момент времени, основанный на решении уравнений механики, сформированных в специально выбранной системе координат. Путем последовательного использования специально доказанных теорем обоснована возможность и методика построения специальных систем координат

Ключевые слова: адаптированная математическая модель, объемно-распределенный объект

It develops the method of the elements speed and concentration practical calculation in every point of space in every moment of time as mechanics equations solution in the specific coordinate system. The specific coordinate systems building techniques and their possibility are substantiated by the sequential application way of the specifically proved theorems

Key words: decomposed mathematical model, body-distributed entity

1. Введение

Все возрастающая активность Человечества в космосе привела к образованию на околоземных орбитах большого количества так называемого „космического мусора”, представляющего собой различные объекты искусственного происхождения и их фрагменты, которые были некогда запущены в космос, а к настоящему времени оказались пассивными и не несущими более никакой полезной нагрузки по использованию, либо разрушились по различным причинам.

Среди имеющегося разнообразия объектов космического мусора следует выделить два класса объектов. К первому относятся большие объекты, которые могут наблюдаться с Земли современными радиолокационными или оптическими средствами, их характерный размер не менее 10 см [1]. Количество мусора, отслеживаемого наземными средствами непрерывно с начала космической эры возрастало, и в настоящее время составляет примерно 8700 объектов общей массой $2{,}3\cdot 10^6$ кг. Большинство таких объектов каталогизировано и отслеживается национальными средствами контроля воздушного и космического пространства. Количество их мало среди общего числа объектов космического мусора, однако их содержание на три порядка больше относительно содержания таких объектов в естественных метеорных потоках. Ко второму классу относятся объекты гораздо меньших размеров, ненаблюдаемые с Земли. Таких фрагментов значительно больше в околоземном космическом пространстве. Число таких фрагментов оценивается в 20000 (что составляет 0,5% от всего имеющегося количества техногенных фрагментов). Наличие большого числа мелких ненаблюдаемых фрагментов подтверждается, во-первых, наземными испытаниями по фрагментации и найденными функциями распределения фрагментов по размерам, а во-вторых, результатами статистического анализа характера повреждения поверхностей, долгое время экспонировавшихся на орбите [2].

В отличие от метеорных потоков, пребывание которых в околоземном пространстве ограничено временем пролета, антропогенный космический мусор представляет значительно большую опасность, так как время его пребывания на орбите существенно дольше (фактически, весь период существования). Это повышает вероятность столкновения действующих космических аппаратов в частицами космического мусора на низких орбитах. Таким образом, для определения динамики засорения околоземных орбит мелкими частицами требуются дополнительные исследования.

2. Уравнение пространственно-скоростного распределения элементов в обобщенных координатах

2.1. Уравнение поля скоростей поступательного движения

При использовании обобщенных и в общем случае криволинейных координат поле скоростей (ПС) поступательного движения элементов $\vec{V}(t,x,y,z)$ и поле их пространственного распределения (ПП) $n(t,x,y,z)$ оказываются заданными на дифференцируемом многообразии. Поэтому, отвлекаясь от векторной природы $\vec{V}$, в качестве скорости будем использовать тензор с одной, например, ковариантной валентностью (что не существенно при заданном на многообразии метрическом тензоре g_{ij}).

Вычислим абсолютный дифференциал тензора V_i при смещении в близкую точку пространства-времени. Дифференциал выразится известной формулой [3]:

$$DV_i = dV_i - \Gamma^p_{ki} V_p dx^k, \qquad (1)$$

где dV_i – полный дифференциал;

Γ^p_{ki} – объект связности;

$x^k \in \{t,q^1,q^2,q^3\}$ – k -я координата ($k=0,1,2,3$) точки пространства-времени.

(Знаки $\sum$ по соглашению о суммировании Эйнштейна опускаются).

Обобщенными криволинейными координатами считаем только пространственные $\{q^1,q^2,q^3\}$, метрический тензор g_{ij} от времени t не зависит, поэтому $\Gamma^p_{ki}=0,\quad i,k=0,1,2,3$.

С учетом этого, разделим в (1) временную и пространственные координаты. Абсолютный дифференциал (1) примет вид:

$$DV_i = \frac{\partial V_i}{\partial t}dt + \frac{\partial V_i}{\partial q^j}dq^j - \Gamma^p_{ki}V_p dq^k. \qquad (2)$$

Ускорение элемента, то есть субстанциональную производную [4], получаем путем деления (2) на дифференциал времени:

$$\frac{DV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial q^j}V^j - \Gamma^p_{ki}V_p V^k. \qquad (3)$$

Это ускорение сообщается элементам полем внешних сил, в частности гравитационных. Полагаем это ускорение заданным в виде известного поля ко-вектора a_i. Выражая Γ^p_{ki} через метрический тензор и приводя компоненты скорости в (3) к единой (ковариантной) валентности, приходим к уравнению для поля $V_i\{t,q^1,q^2,q^3\}$ в обобщенных координатах:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial q^k}g^{km}V_m - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pk}}{\partial q^i}g^{pm}g^{kl}V_m V_l = a_i. \qquad (4)$$

2.2. Уравнение поля пространственной концентрации

Пусть n_q – количество элементов, приходящееся на область пространства R^3, ограниченного единичными интервалами обобщенных координат q^1,q^2,q^3. Выделим некоторую ограниченную замкнутой поверхностью область Q. Количество элементов в этой области равно

$$N = \oiiint\limits_{(Q)} n_q dq^1 dq^2 dq^3. \qquad (5)$$

Число элементов, покидающих эту область в единицу времени, то есть поток элементов через ограничивающую область согласно теореме Остроградского равен трехкратному интегралу от дивергенции векторного поля $n_q\vec{V}$, вычисленному по всей области Q:

$$\frac{dN}{dt} = \oiiint\limits_{(Q)} \left(\nabla_i n_q V^i\right) dq^1 dq^2 dq^3, \qquad (6)$$

где ∇_i означает i -ю компоненту набла-вектора $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial q^1},\frac{\partial}{\partial q^2},\frac{\partial}{\partial q^3}\right)^T$, а выражение $\nabla_i x^j$ – абсолютную производную одновалентного тензора x^j в координатах q^1,q^2,q^3.

Из очевидного равенства

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint\limits_{(Q)} n_q dq^1 dq^2 dq^3$$

и произвольности области Q приходим к уравнению для поля $n_q\{t,q^1,q^2,q^3\}$ в обобщенных координатах (аналог уравнения непрерывности) для разряженной сплошной среды, в которой давление отсутствует. Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial n_q}{\partial t} + \left(\nabla_i n_q\right)V^i + n_q\left(\nabla_i V^i\right) = 0\ , \tag{7}$$

где $\nabla_i n_q = {\partial n_q}/{\partial q^i}$ – градиент концентрации n_q, а дивергенция $\nabla_i V^i$ выражается через метрический тензор с помощью известных формул абсолютного дифференцирования [3]:

$$\nabla_k V^i = \frac{\partial V^i}{\partial q^k} + \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial q^p} + \frac{\partial g_{mp}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kp}}{\partial q^m}\right)V^p\ . \tag{8}$$

3. Решение уравнений распределения элементов в объемно-распределенном объекте

3.1. Общее решение уравнений

Класс возможных полей $n(t,\vec{r})$ и $\vec{V}(t,\vec{r})$ для изучаемого объемно-распределенного объекта ограничен общими решениями уравнений (4), (7). Определим этот класс. Простое аналитическое решение этих уравнений удается получить в специально выбранной системе координат, в которой вектор поля скоростей $\vec{V}$ в каждой точке пространства касателен к координатным линиям. Тогда в локальном репере каждой точки компоненты тензора V^i равны нулю кроме одной $\left(V^1 = V,\ \ V^2 = V^3 = 0\right)$, и система уравнений (4) заменяется одним уравнением для первой компоненты поля V^1. Для простейшего объемно-распределенного объекта, формируемого разлетом элементов из одной точки пространства в различных направлениях в центральном поле тяготения Земли, такая специальная система координат (ССК) всегда существует и алгоритм пересчета координат из нее в геоцентрическую (как и обратно) практических трудностей не представляет.

Пренебрежем неоднородностью гравитационного поля в пределах объема, занимаемого объектом. Расчеты показывают, что неоднородность поля на околоземных орбитах с „размахом" объекта по высоте до 300 км при высоте центра объекта над поверхностью Земли 1100 км составляет всего около 4% [5].

Система (4) в ССК выражается одним квазилинейным уравнением 1-го порядка

$$\frac{\partial V^1}{\partial t} + V^1\frac{\partial V^1}{\partial q^1} - g^{i1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial q^1}\right)\left(V^1\right)^2 = 0 \tag{9}$$

относительно $V^1\left(t,q^1,q^2,q^3\right)$. Решение уравнения (9) общеизвестным путем [6] приводит к общему интегралу:

$$\begin{aligned} &\Phi\left(bt + \frac{1}{V^1}, V_1 e^{bq^1}\right) = 0; \\ &V^2 = V^3 \equiv 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где введено обозначение $b(\bar{q}) = -g^{i1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{i1}}{\partial q^1}\right)$; $\Phi(x,y)$ – произвольная непрерывная по каждому аргументу функция.

При некоторых довольно общих ограничениях на $\Phi(x,y)$ теорема о неявной функции позволяет разрешить (10) относительно второго аргумента функции Φ:

$$V^1 e^{bq^1} = f\left(bt + \frac{1}{V^1}\right), \tag{11}$$

где f – некоторая функция.

Рассматриваемый способ формирования объемно-распределенного объекта предполагает сосредоточение всей „субстанции" в начальный момент времени $(t=0)$ в одной точке пространства $\left(q^1 = 0\right)$. Используя эти начальные условия, из (11) легко получаем $f(x) = {1}/{x}$, и искомое поле скоростей в ССК имеет вид:

$$\begin{aligned} &V^1(t,\bar{q}) = \frac{e^{b(\bar{q})q^1} - 1}{b(\bar{q})t}; \\ &V^2(t,\bar{q}) = V^3(t,\bar{q}) \equiv 0, \end{aligned} \tag{12}$$

где $b(\bar{q})$ соответствует введенному обозначению.

При описании объектов ограниченной протяженности (в десятки километров) удобно экспоненту в числителе (12) разложить в ряд, ограничиваясь линейным членом и квадратичным, которым главным образом учитывается нелинейность. Приближенные формулы для поля скоростей имеют вид:

$$\begin{aligned} &V^1(t,\bar{q}) \approx \frac{q^1}{t}\left(1 + \frac{1}{2}bq^1\right); \\ &V^2(t,\bar{q}) = V^3(t,\bar{q}) \equiv 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Уравнение (7) для поля пространственной концентрации в ССК имеет вид:

$$\frac{\partial n_q}{\partial t} + V^1\frac{\partial n_q}{\partial q^1} + n_q\left(\frac{\partial V^1}{\partial q^1} + {}^{\ 1}_{11}V^1\right) = 0\ . \tag{14}$$

Его общий интеграл выражается конечным уравнением

$$\Phi\left(\frac{1}{t}e^{\int\frac{dq^1}{V_0^1}}, n_q V_0^1 e^{\int {}^{\ 1}_{11}dq^1}, q^2, q^3\right) = 0\ , \tag{15}$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция.

Концентрация $n_q = \frac{\partial^3 N}{\partial q^1 \partial q^2 \partial q^3}$ отнесена к обобщенным координатам. Для получения концентрации $n_x = \frac{\partial^3 N}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3}$, отнесенной к физическим декартовым координатам, означающей количество элементов, приходящихся на единицу объема м^3, следует учесть преобразование „объемов" с помощью якобиана

$$\mathfrak{I} = \left|\frac{D\left(x^1,x,^2 x^3\right)}{D\left(q^1,q^2,q^3\right)}\right|.$$

Используя теорему о неявной функции (функция Φ, полагаем, теореме удовлетворяет) для выражения n_q из (15) и якобиана $\mathfrak{I}$, получаем формулу для поля пространственной концентрации элементов в виде:

$$n_x\left(t,q^1,q^2,q^3\right) = \frac{1}{V^1 t\mathfrak{I}}e^{-\int {}^{\ 1}_{11}dq^1} f\left(\frac{1}{t}e^{\int\frac{dq^1}{V^1 t}}, q^2, q^3\right), \tag{16}$$

где f – некоторая функция.

Чтобы полностью использовать возможности специального выбора системы координат q^i упростим (16) с помощью соотношений:

$$-\int {}^{1}_{11} dq^1 = \int \frac{dq^1}{V^1 t}; \qquad (17)$$

$$e^{\int \frac{dq^1}{\upsilon t}} = q^1. \qquad (18)$$

Эти соотношения следуют из постоянства $V^1 - \text{const}$ вдоль траектории в объекте, что является свойством ССК как „сферического" преобразования системы координат, в которой траектории являются геодезическими. Действительно, из постоянства V^1 вдоль траектории следует $q^1 = V^1 t$, с другой стороны $dV^1 = - {}^{1}_{11} V^1 dq^1$ $\left(V^2 = V^3 = 0\right)$, следует (17), (18).

После замены $V^1 = {q^1}/{t}$ с помощью (17) и (18) из (16) имеем:

$$n_x\left(t, q^1, q^2, q^3\right) = \frac{1}{\Im} f\left(\frac{q^1}{t}, q^2, q^3\right) = \frac{1}{\Im t} n_V\left(\upsilon, q^2, q^3\right). \qquad (21)$$

3.2. Частные случаи решения уравнений

Для моделирования пространственно-скоростного распределения необходимо задать функцию $f(\alpha, \beta, \gamma)$ определяющую согласно (21) в специальной системе координат распределение элементов по пространству в каждый момент времени t. Практическое задание f должно опираться на физический смысл этой функции. Он становится ясен, если получить выражение для поля пространственной концентрации применительно к простейшему объекту: сформированного по-прежнему путем единовременного разлета из одной точки космического пространства во всех направлениях, но размеры которого малы настолько, что траектории элементов в пределах объекта можно считать прямолинейными. Тогда в качестве ССК выступает обычная сферическая система координат $q^1 = r, q^2 = \varphi, q^3 = \theta$ с началом в центре объекта. Зададимся функцией распределения по скоростям в заданном направлении $n_V(\upsilon, \varphi, \theta)$, где υ – модуль скорости поступательного движения в направлении, задаваемом углами φ, θ. Используя якобиан преобразования декартовых координат в сферические $\Im = r^2 \cos\theta$, легко получим связь поля пространственной концентрации на момент времени t с функцией распределения по скоростям. Она выражается формулой:

$$n_x\left(t, r, \varphi, \theta\right) = \frac{n_V\left(\upsilon, \varphi, \theta\right)}{r^2 t \cos\theta}. \qquad (22)$$

С другой стороны, $V^1 = {q^1}/{t}$, а в ССК V^1 совпадает с модулем скорости (так как $V^2 = V^3 \equiv 0$), то есть $V^1 = \upsilon$. Сравнение (21) и (22) проясняет смысл произвольной функции f. Она определяет распределение элементов по скоростям из количества элементов, которые приходятся на единичные интервалы по второй (q^2) и третьей (q^3) осям обобщенных координатах.

Объясним вышеизложенное на простейших примерах.

Пример 1: сферический объект ограниченной длины с равномерной пространственной концентрацией элементов.

Специальной СК является „обычная" сферическая с координатами r, φ, θ. Компоненты метрического тензора для сферических координат $g_{11} = 1, g_{i1} = 0, i \neq 1$ и

$$V^1 e^{вq^1} = f\left(вt + \frac{1}{V^1}\right)$$

$в \equiv 0$. Поэтому поле скоростей тривиальное:

$$V^1 = \upsilon = \frac{r}{t}. \qquad (23)$$

Пространственная концентрация n_x в границах объекта от координат не зависит (в силу предложенной однородности поля n_x). Зависимость от времени поля n_x получаем из интегрального уравнения:

$$\oint n_x dV = N - \text{const}, \qquad (24)$$

означающего фиксированное суммарное количество элементов в объекте в любой момент времени (интегрирование ведется по объему, занимаемому объектом). Расчеты дают поле:

$$n_x\left(t, r, \varphi, \theta\right) = \begin{cases} \dfrac{N}{\frac{4}{3}\pi\left(V_o t\right)^3}, & 0 < r \le V_0 t; \\ 0, & r > V_o t, \end{cases} \qquad (25)$$

где V_0 – максимальная скорость элементов в объемно-распределенном объекте.

Подстановкой (25) в (22) получаем распределение по скоростям, которое обеспечивает равномерную пространственную концентрацию элементов в любой момент времени. Оказывается, что для этого необходимо, чтобы количество элементов, которое разлеталось с заданными скоростями, росло пропорционально квадрату скорости.

Пример 2: сферический объект ограниченной длины с равномерным распределением по скорости, то есть ${\partial n_V}/{\partial V_r} = 0$ в пределах области определения функции n_V.

Функция распределения n_V пропорциональна $\cos\theta$, так как в такой зависимости от θ находится элементарный метрический объем $dxdydz = r^2 \cos\theta dr d\theta d\varphi$. То есть множитель $\cos\theta$ для концентрации по сферическим координатам обеспечивает постоянство концентрации по декартовым координатам в любой точке пространства, занимаемого объектом.

Аналогичным путем приходим к полю пространственной концентрации элементов

$$n_x\left(t, r, \varphi, \theta\right) = \begin{cases} \dfrac{N}{4\pi V_0 r^2 t}, & 0 < r \le V_0 t; \\ 0, & r > V_o t, \end{cases} \qquad (26)$$

которая изменяется обратно пропорционально времени и в любой момент времени обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра объекта при условии, если обеспечено равномерное распределение по скоростям вплоть до V_0.

Таким образом, практический способ моделирования меняющейся во времени пространственной концентрации элементов и ожидаемой соответствующей этой концентрации и полю скоростей состоит в определении распределения элементов по скоростям в каждом угловом направлении, расчете поля пространственной концентрации (21) с последующим расчетом поля скоростей (12) или (13). Указанные шаги проделываются в специальной системе координат, являющейся „сферическим" преобразованием эллипсоидальной системы координат.

4. Специальная система координат. Существование и построение

4.1. Теорема существования

Пусть задано поле скоростей поступательного движения из начала координат $\eta^1=\eta^2=\eta^3=0\ /\ t=0$ в некоторой области D_x трехмерного многообразия R^3 в виде поля тензора $V^i\left(t,\eta^1,\eta^2,\eta^3\right)$, а система координат η^i на многообразии такова, что траектории движения являются геодезическими в ней. Такая система координат всегда существует [3].

Пусть, далее, задано отображение области $D_\eta \in R^3$ на область $D_q \in R^3$ с помощью системы невырожденных преобразований:

$$\begin{aligned}&\eta^1=q^1\cos q^2\cos q^3;\\&\eta^2=q^1\sin q^2\cos q^3;\\&\eta^3=q^1\sin q^3.\end{aligned}\tag{27}$$

Справедлива следующая

Теорема. В системе координат q^1,q^2,q^3 поле $V^i\left(q^1,q^2,q^3\right)$ всюду в области D_q имеет компоненты:

$$\begin{aligned}&V^{1'}=\upsilon\left(q^1,q^2,q^3\right);\\&V^{2'}=0;\\&V^{3'}=0,\end{aligned}\tag{28}$$

где υ – некоторая функция, которая не равная в D_q нулю тождественно.

Лемма. Во всей области определения поля $V^i\left(t,x^1,x^2,x^3\right)$ в любой момент времени t имеет место соотношение

$$\frac{\eta^1}{V^1}=\frac{\eta^2}{V^2}=\frac{\eta^3}{V^3}.\tag{29}$$

Доказательство. Система координат η^i такова, что траектории в ней являются геодезическими. Поэтому V^i вдоль траекторий не меняется и

$$\eta^i=\int V^i dt=V^i t+\xi_0^i,\tag{30}$$

где интеграл берется по траектории. По условию поле $V^i\left(t,\eta^1,\eta^2,\eta^3\right)$ таково, что при $t=0$ $\eta^1=\eta^2=\eta^3=0$, откуда

$$\xi_0^i=0,\quad i=1=2=3.\tag{31}$$

Из (30) и (31) следует (29). **Лемма доказана.**

Доказательство теоремы.

С помощью соотношений (29) и системы преобразований (27), выразим компоненты V^2 и V^3 через V^1.

Получим:

$$\begin{aligned}&V^2=V^1\operatorname{tg}q^2;\\&V^3=V^1\frac{\operatorname{tg}q^3}{\cos q^2}.\end{aligned}\tag{32}$$

Закон преобразования контравариантных координат V^i при изменении системы координат общеизвестен [3]:

$$V^{i'}=\frac{\partial x^i}{\partial q^{i'}}V^i.\tag{33}$$

В матричной форме компоненты $V^{i'}$ в новой системе координат q^1,q^2,q^3 с использованием (28) и (32) согласно формуле (33) выражаются произведением

$$\begin{pmatrix}V^{1'}\\V^{2'}\\V^{3'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos q^2\cos q^3 & \sin q^2\cos q^3 & \sin q^3\\-q^1\sin q^2\cos q^3 & q^1\cos q^2\cos q^3 & 0\\-q^1\cos q^2\sin q^3 & -q^1\sin q^2\sin q^3 & q^1\cos q^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\operatorname{tg}q^2\\\dfrac{\operatorname{tg}q^3}{\cos q^2}\end{pmatrix}V^1.\tag{34}$$

Перемножив матрицы в (34), путем непосредственного вычисления, получаем

$$V^{1'}=V^1\left(\cos q^2\cos q^3+\sin q^2\cos q^3\operatorname{tg}q^2+\frac{\sin q^3}{\cos q^2}\operatorname{tg}q^3\right)=$$
$$=\upsilon\left(q^1,q^2,q^3\right)\neq 0;\ \ V^{2'}=V^{3'}=0.$$

Теорема доказана.

4.2. Построение специальной системы координат

Доказанная теорема дает практический способ построения специальной системы координат такой, что все компоненты вектора скорости поступательного движения в объемно-распределенном объекте всюду равны нулю кроме первой при условии простейшего способа формирования объекта в космосе – путем единовременного разлета элементов во всех направлениях из одной точки пространства.

Будем полагать, что элементы в околоземном космическом пространстве движутся по кеплеровским (эллиптическим) траекториям (расчеты и экспериментальные данные показывают [7], что отклонения реальных траекторий от кеплеровских по траекторным параметрам лежат в пределах единиц процентов). Тогда в качестве системы координат η^1, η^2, η^3 с геодезическими линиями траекторий следует использовать эллипсоидальную систему координат, связанную с геоцентрической декартовой x^1, x^2, x^3 системой преобразований

$$\begin{aligned}&x^1=-\left(\eta^2+a_0\right)K\sin\omega\left(\eta^1+t\right)\cos\omega\left(\eta^3+t\right);\\&x^2=\left(\eta^2+a_0\right)\cos\omega\left(\eta^1+t\right)\cos\omega\left(\eta^3+t\right)+a_0\varepsilon;\\&x^3=\left(\eta^2+a_0\right)K\sin\omega\left(\eta^3+t\right),\end{aligned}\tag{35}$$

где a_0, K, ε – большая полуось, коэффициент эллиптичности и эксцентриситет эллипса траектории центра объемно-распределенного объекта соответственно.

Для моделирования пространственно-скоростного распределения элементов в объемно-распределенном объекте с использованием полученных формул для специальной системы координат необходимо располагать возможностью пересчета из требуемой системы координат в ССК как координат точек пространства, так и компонентов вектора скорости поступательного движения. Пересчет координат из декартовой геоцентрической x^1, x^2, x^3 в ССК q^1,q^2,q^3 и обратно осуществляется последовательным применением преобразований (35),(27). Тензорный закон преобразования компонентов скорости V^i при преобразовании координат (33) общеизвестен. Преобразование компонентов векторов при преобразовании координат осуществляется по тензорному закону [8], то есть линейно, причем матрицей линейного преобразования является матрица Якоби.

Выводы и практические рекомендации

1. Описание объемно-распределенных объектов искусственного происхождения в частности, облаков космического мусора, в околоземном пространстве в виде механической сплошной среды позволяет использовать при изучении механических и геометрических свойств объекта удобный математический аппарат дифференциального вычисления.

Удобство аппарата состоит в возможности получения основных механико-геометрических свойств объекта преимущественно аналитическим путем: законов распределения элементов (осколков) в пространстве с течением времени и законов распределения их скоростей в пространстве с течением времени. Эти законы описываются зависящими от времени полем скоростей поступательного движения и полем концентрации элементов (осколков) в каждой точке пространства. Аналитическое описание закономерностей динамики формирования и движения объекта является теоретической базой для изучения их механических свойств и изменения во времени геометрических структур. Уравнениями, описывающими закономерности изменения этих полей во времени в специальной криволинейной системе координат, являются векторное уравнение поля скоростей поступательного движения в объекте и скалярное уравнение связи поля скоростей и поля пространственной концентрации элементов в объекте (векторное уравнение понимается как система уравнений).

2. Поле скоростей поступательного движения элементов (осколков) и поле их пространственной концентрации в каждый момент времени являются решениями упомянутых уравнений, для получения которых в аналитическом виде целесообразно использовать специальные системы координат, в которых векторное уравнение поля скоростей приобретает скалярную форму относительно одной компоненты вектора скорости при тождественном равенстве нулю остальных. Если ограничиться рассмотрением простейшего типа объектов, образованных их формированием путем разлета элементов (осколков) из единой точки пространства во всех направлениях с общим моментом начала движения, то такая специальная система координат всегда существует.

3. Для объектов „элементарного" типа (при единовременном их формировании путем разлета элементов (осколков) во всех направлениях из единого центра) и их суперпозиции во всевозможных комбинациях в специальной системе координат аналитические решения уравнений поля скоростей, а также связи поля скоростей и поля пространственной концентрации всегда существуют.

4. Для сферически симметричного объемно-распределенного объекта равномерное распределение элементов по скоростям приводит в каждый фиксированный момент времени к убыванию пространственной концентрации по мере удаления от центра объекта обратно пропорционально квадрату этого расстояния, а в каждой точке пространства – к убыванию во времени ему обратно пропорционально.

Равномерного распределения элементов по пространству можно достичь лишь таким способом формирования объемно-распределенного объекта, когда во всех направлениях обеспечивается большее число элементов с большими скоростями разлета, причем пропорционально квадрату скорости разлета.

5. Методика построения сферической системы координат предполагает последовательное выполнение трех операций:

а) описание трех траекторий, расходящихся из начала координат во взаимно ортогональных направлениях;

б) выбор системы координат x^1,x^2,x^3 , для которой описанные траектории являются координатными линиями;

в) переход в новую систему координат q^1,q^2,q^3 с помощью системы (27). Система координат q^1,q^2,q^3 является сферической в метрике, траектории движения в которой являются геодезическими.

Литература

1. Литвиненко Л.Н. Современное состояние проблемы космического мусора / Л.Н.Литвиненко // Проблемы управления и информатики, 2003. – №3. – С. 117-119.
2. Современные глобальные изменения природной среды: в 2 т. / [отв. ред. Касимов Н.С., Клиге Р.К.]. – М.: Научный мир, 2006. – Т.2. – 2006. – 776 с.
3. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К.Рашевский. –М.: Наука, 1967. – 340 с.
4. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: [уч. пособие в 10 т.]. Т.6. Гидродинамика / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. – 3-е изд. перераб. – М.: Наука. Гл.ред.физ.мат.лит., 1986. – 736 с.
5. Пилькевич И.А. Моделирование облаков техногенного происхождения в околоземном космическом пространстве: монография / И.А.Пилькевич. – К.: Наукова думка, 2006. – 112 с.
6. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э.Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
7. Манойлов В.П. Дистанційне зондування Землі із космосу: науково-технічні основи формування й обробки видової інформації: монографія / В.П.Манойлов, В.В.Омельчук, В.В.Опанюк. – Житомир: ЖДТУ, 2008. – 384 с.
8. Анго А. Математика для электро и радиоинженеров / А.Анго; [пер. с франц. под ред. К.С.Шифрина]. – М.: Наука. Гл.ред.физ.мат.лит., 1965. – 779 с.