

7. VISUM 11.0 Fundamentals [Text] / PTV AG, Karlsruhe, 2009. – 690 p.
8. Рэнкин, В. У. Автомобильные перевозки и организация дорожного движения [Текст] / В. У. Рэнкин, П. Клафи, С. И. Халберт др. – М.: Транспорт, 1981. – 592 с.
9. Доля, В. А. Пасажирські перевезення [Текст]: пудр. / В. К. Доля. – Харків.: Видавництво «Форт», 2011. – 504 с.
10. Гаврилов, Е. В. Основи теорії систем і управління. [Текст] / Е. В. Гаврилов, М. Ф. Дмитриченко, В. К. Доля, О. Т. Лановий, І. Е. Линник, В. П. Поліщук. – К.: Знання України, 2005. – 344 с.

*Побудовано математичні моделі конкурентних процесів в економіці з використанням відомих універсальних моделей, що описують поведінку контрагентів на ринку. На основі математичної моделі Лотки-Вольтерра і подальшого її розвитку створена математична модель "виробник-перекупник", побудована її модифікована версія, проведені дослідження моделей, у тому числі і мульти-агентних, за допомогою математичного пакета Mathcad. Виявлено нестабільність поведінки контрагентів*

*Ключові слова: математична модель, економіка, конкуренція, модифікація, модель Лотки-Вольтерра, виробник, перекупник, Mathcad, нестабільність*

*Построены математические модели конкурентных процессов в экономике с использованием известных универсальных моделей, описывающих поведение контрагентов на рынке. На основе математической модели Лотки-Вольтерра и дальнейшего её развития создана математическая модель "производитель-перекупщик", построена её модифицированная версия, проведены исследования моделей, в том числе и мульти-агентных, с помощью математического пакета Mathcad. Выявлены нестабильность поведения контрагентов*

*Ключевые слова: математическая модель, экономика, конкуренция, модификация, модель Лотки-Вольтерра, производитель, перекупщик, Mathcad, нестабильность*

УДК 28.17.19  
DOI: 10.15587/1729-4061.2014.27855

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНЫХ ПРОЦЕССОВ

**В. А. Аль-Рефаи**  
Аспирант\*

Email: wamralal@yahoo.com

**И. В. Наумейко**

Кандидат технических наук, доцент\*

Email: igor.naumejko@mail.ru

\*Кафедра прикладной математики

Харьковский национальный

университет радиозлектроники

пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61166

### 1. Введение

Экономические системы всегда считались очень сложными, динамика рынка – хаотической, поэтому исследования в данной области проводились в большинстве случаев на основе статистических данных прошедших лет. Построение экономических прогнозов и расчёт перспектив дальнейшего развития, в некоторой мере, являлись лишёнными научной основы предположениями, не имеющими никаких весомых оснований для рационального использования и претворения гипотез в жизнь. Математическое моделирование с использованием современных компьютерных технологий предоставляет возможность изучить характер той или иной экономической ситуации, перспективы, гипотезы, затрачивая на эксперименты гораздо меньшие временные и материальные ресурсы. Таким образом, математические и имитационные модели экономических процессов всегда были и остались актуальны, поскольку предоставляют возможность промоделировать за малое время то, что крайне сложно и долго испытывать в реальной жизни [1].

Общеизвестно, что важнейшим инструментом развития экономики является конкуренция. Также конкурентные процессы имеют место быть и в других областях, таких как биология, экология, психология, военное дело, логистика и большая часть проблем исследования операций и многокритериальной оптимизации процессов. Все эти области знаний и деятельности обслуживаются математическими моделями одного класса – уравнениями динамических систем. Базовыми в этом классе моделей являются логистические уравнения, а также их системы, которые впервые предложил и исследовал Вольтерра еще в начале XX века. Он положил начало исследованию, так называемых, "мягких" моделей, варианты которых предлагаются в настоящей работе для описания конкуренции за прибыль в системе "производитель-перекупщик" (часто называемый "оптовым покупателем").

### 2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Конкурентные процессы – одна из наиболее значимых областей в экономике. От развития конкуренции

и конкурентоспособности иногда зависит благополучие страны в целом. Применение экономико-математического моделирования для описания конкурентных процессов является наиболее рациональным из всех возможных методов исследований [2, 3].

Существует множество универсальных математических моделей [4–6], успешно применяющихся в разных отраслях науки, однако, точно описывающих конкурентные процессы современной рыночной экономики практически нет [7, 8]. Базовые модели [9–12] были разработаны достаточно давно и не всегда верно описывают динамику современных конкурентных отношений. Для перспектив развития экономики необходимы инновационные решения [13]. Изучение существующих математических моделей даёт возможность найти оптимальные пути для построения новых модификаций исходных моделей, подходящих к данной ситуации развития конкуренции и экономики в целом.

С помощью специализированного программного обеспечения можно разработать и исследовать новую модель, на изучение экономической пригодности которой в реальной жизни уйдут годы. На исследование математической модели теоретическим способом, без использования вычислительной техники, требуется настолько большой временной интервал, что само исследование перестаёт быть рациональным.

В результате направленных действий для проведения исследований и использования всех современных достижений формируются широкие перспективы поиска, изучения и применения новых решений для экономических задач в такой важной области экономики как моделирование конкурентных отношений [14].

---

### 3. Цель и задача исследования

---

Объект исследования – математические модели конкурентных процессов в экономике, являющиеся обобщением моделей типа "Лотки-Вольтерра".

Методы исследования – использование известных универсальных моделей, описывающих поведение контрагентов на рынке, их анализ, использование математических пакетов, построение графиков зависимостей.

Цель работы – построение и исследование модифицированной модели на основе математической модели Лотки-Вольтерра, дальнейшее её развитие, создание программного продукта для моделирования и обработки экономической информации;

Задача исследования – выявить нестабильности конкурентных процессов и возможности их стабилизации в системах "производитель-перекупщик", в том числе и мульти-агентного типа.

---

### 4. Анализ и решение уравнений динамики как метод исследования моделей конкуренции в системах "производитель-перекупщик"

---

#### 4. 1. Современное состояние вопросов математического моделирования конкурентных процессов

В зависимости от соотношения между количеством производителей и количеством потребителей различают следующие виды конкурентных структур:

- большое количество самостоятельных производителей некоторого однородного товара и масса обособленных потребителей данного товара. Ни один из потребителей не приобретает какую-либо существенную долю общего спроса. Данная структура рынка называется полиполией и порождает, так называемую, совершенную конкуренцию. Она скорее является идеализированной системой, практически не встречающейся в реальной жизни, но, тем не менее, данное понятие необходимо хотя бы для теоретических исследований;

- огромное число обособленных потребителей и малое количество производителей, каждый из которых может удовлетворить значительную долю общего спроса. Такая структура называется олигополией, и порождает, так называемую, несовершенную конкуренцию. В случае, когда рынок представлен относительно большим числом производителей, предлагающих гетерогенную (разнородную) продукцию, то говорят о монополистической конкуренции;

- единственный потребитель товара и множество самостоятельных производителей. Данная структура порождает особый тип несовершенной конкуренции, называемый монополией (монополия спроса);

- единственный производитель и множество потребителей. Данная структура является монополией. Её можно встретить только в некоторых очень ограниченных отраслях экономики, которые контролируются государством, или в новых ещё не подвергнутых конкуренции областях, инновационных решениях, где производители получают сверхприбыли;

- структура взаимосвязей, где единственному потребителю противопоставляется единственный производитель (двусторонняя монополия), вообще не является конкурентной, но также не является и рыночной [3].

Сложность экономических систем превышает порог, до которого строится точная математическая теория. Поэтому неудивительно, что сколько-нибудь универсальных методов построения математических моделей в экономике не существует. Можно говорить лишь о некоторых общих принципах и требованиях к таким моделям. Основные из них:

- адекватность (соответствие модели своему оригиналу);

- объективность (соответствие научных выводов реальным условиям);

- простота (не засоренность модели второстепенными факторами);

- чувствительность (способность модели реагировать изменению начальных параметров);

- устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи);

- универсальность (широта области применения) [14].

Формализация экономической задачи проводится наряду с принятием некоторых предварительных условий, предположений, ограничений. Стремление к простоте модели продиктовано ограниченными возможностями вычислительной техники и экономии временных ресурсов при исследовании модели. Практическое значение модель приобретает тогда, когда ее изучение имеющимися средствами более доступно, чем изучение самого объекта. Требования чувствительности и устойчивости являются отражением объ-

ективных характеристик экономических процессов. Одна и та же математическая модель может применяться для исследования экономических задач различного содержания. Это свойство и называется универсальностью [14].

Одна из первых и простейших конкурентных моделей – модель Питера Ланкастера [10] противостояния двух армий.

Состояние системы описывается точкой  $(x, y)$  положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки,  $x$  и  $y$  – это численности противостоящих армий. Модель имеет вид:

$$\begin{cases} x' = -b(x, y)y, \\ y' = -a(x, y)x. \end{cases} \quad (1)$$

При  $a, b = \text{const}$ , это – жесткая модель, которая допускает точное решение

В математике известны методы, позволяющие сделать выводы общего характера, не зная точно явного вида функций  $a$  и  $b$ . В этой ситуации принято говорить о мягкой модели – модели, которую возможно модифицировать (за счет выбора функций  $a$  и  $b$  в данном примере).

Общим выводом в данном случае является утверждение о структурной устойчивости исходной модели: изменение функций  $a$  и  $b$  изменит описывающие ход военных действий кривые на плоскости  $(x, y)$  (которые уже не будут гиперболами и разделяющей их прямой), но это изменение не затрагивает основного качественного вывода.

Вывод состоит в том, что положения "x выигрывает" и "y выигрывает" разделены нейтральной линией "обе армии уничтожают друг друга за бесконечное время".

На основании математических предположений можно считать, что топологический тип системы на плоскости  $(x, y)$  не меняется при изменении функций  $a$  и  $b$ : происходит лишь искривление нейтральной линии.

#### 4. 2. Исследование модели "один производитель – один перекупщик"

Опишем производителя, подобрав все характерные параметры, и составив уравнение. Изменение прибыли

производителя в единицу времени  $\frac{dx}{dt}$  находится

в левой части, где  $x$  – изначальное количество прибыли, полученное от определённого количества продаж,  $a$  – коэффициент прироста прибыли. Учитываются издержки производства, которые, в первом приближении, прямо пропорциональны объёму произведенного товара (здесь рассматривается классическая экономическая ситуация, не описывающая производство интеллектуальных продуктов, которые создаются один раз и продаются множество). Эти издержки отражаются в произведении коэффициента  $b$  на количество прибыли от произведенного товара, которая является следствием количества проданного товара.

Таким образом, производитель моделируется с помощью логистического уравнения (оно же уравнение Ферхюльста), что лишний раз доказывает универсальность математических моделей для разных областей науки:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx). \quad (2)$$

Опишем теперь уравнение динамики перекупщика с учетом необходимых параметров. Составим уравнение, исходя из следующих соображений.

Прибыль перекупщика в единицу времени  $\frac{dy}{dt}$  находится в левой части. Естественно, что если значение будет отрицательным, то вместо прибыли перекупщик будет иметь убытки, аналогично с хищниками, которые питаются жертвами и вымирают от бескормицы в системе Лотки-Вольтерра.  $d$  – коэффициент, отображающий удельную прибыль на перекупке. В любом случае прибыль перекупщика зависит от количества товара, выпущенного производителем, поэтому в данном уравнении также присутствует переменная  $x$ , отображающая эту зависимость. Таким образом, уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{dy}{dt} = y(-c + dx). \quad (3)$$

Как видим, это уравнение полностью совпадает с уравнением, описывающим хищников из модели Лотки-Вольтерра, тем не менее, совместно с уравнением (2) оно приобретает другой смысл, формально не меняясь, и отображает ситуацию на рынке.

Таким образом, мы получили модифицированную расширенную математическую модель, описывающую конкурентные процессы взаимоотношений производителя и перекупщика, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx), \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx). \end{cases} \quad (4)$$

Полученную модификацию модели Лотки-Вольтерра (4) будем называть моделью "производитель-перекупщик". Она отличается от базовой модели лишь в первом уравнении (2), и является начальной отправной точкой для дальнейших исследований. Она была модифицирована и доработана, по аналогии с моделью Лотки-Вольтерра.

#### 4. 3. Трёхмерная модель

Далее в работе исследуется текущая модель (4), а также её модификация, в которой добавляется ещё один производитель ( $z$  и третье уравнение, аналогичное по смыслу первому):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx), \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx + gz), \\ \frac{dz}{dt} = z(e - fz). \end{cases} \quad (5)$$

Соответственно, и в уравнение перекупщика добавился новый параметр, характеризующий коэффициент прибыли на перекупке товара нового производителя.

В данной модели конкуренцией между производителями пренебрегаем.

**5. Результаты исследования математических моделей**

Исследования моделей (4) и (5) проводились в среде Mathcad при различных значениях параметров  $a-f$  и начальных значениях  $x_0, y_0, z_0$ . На графиках по оси абсцисс – изменение прибыли производителя, а по оси ординат – изменение прибыли перекупщика.

**5. 1. Результаты для двумерной модели**

Для модели (4), исследуя график на рис. 1, получаем следующие результаты: при  $x=0.6$  прибыль перекупщика практически неограниченно растёт. Прибыль производителя, как видим, остаётся постоянной в широком временном интервале. Стационарная точка является седлом.

Исследуем систему при других начальных условиях:  $a=0.1, b=0.3, c=0.3, d=0.3$  (рис. 2). На данном графике отображена зависимость прибыли перекупщика от производителя. При данных начальных условиях прибыль перекупщика равна нулю в точке с координатой по оси абсцисс 0.35. Данная стационарная точка представляет собой устойчивый узел.

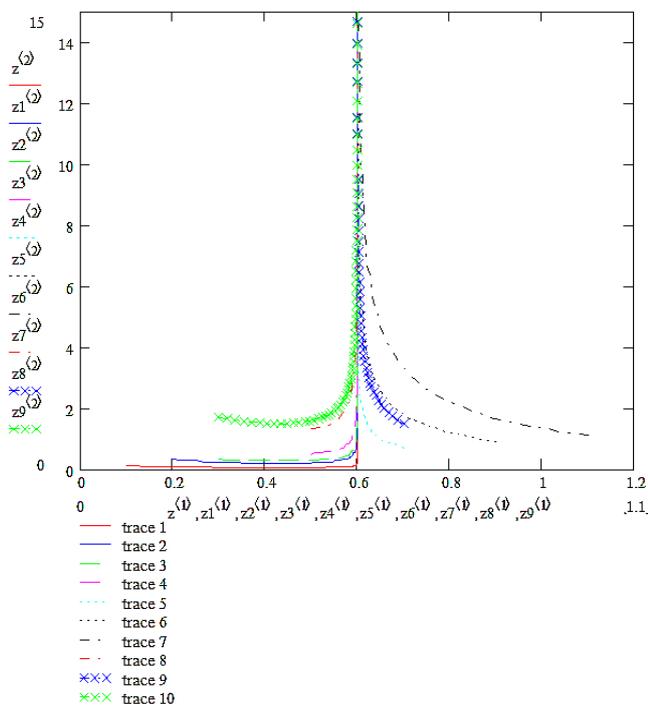


Рис. 1. Зависимость прибыли перекупщика от прибыли производителя при различных начальных условиях и параметрах  $a=0.3, b=0.5, c=0.3, d=0.7$

На рис. 3, при других значениях параметров, отображено качественно идентичное приведенному на рис. 1, поведение системы.

Аналогичные результаты получены и при исследовании системы из трёх уравнений, описывающей взаимодействие двух производителей и перекупщика.

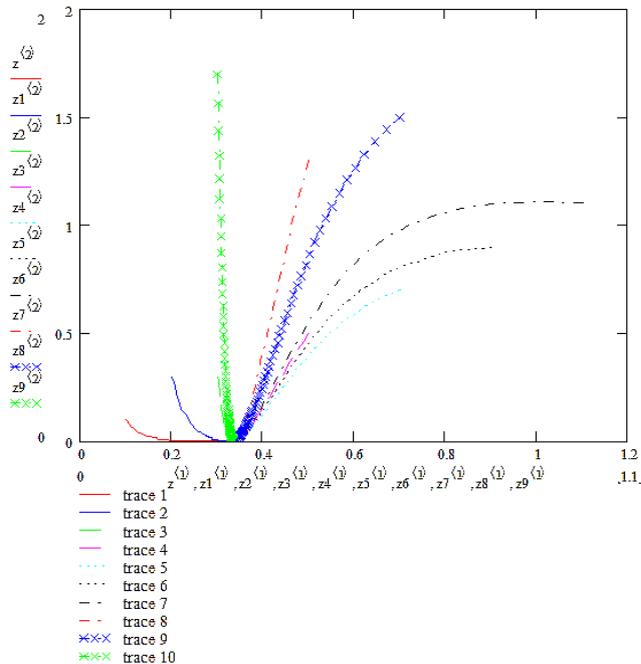


Рис. 2. Зависимость прибыли перекупщика от прибыли производителя при различных начальных условиях и параметрах  $a=0.1, b=0.3, c=0.3, d=0.3$

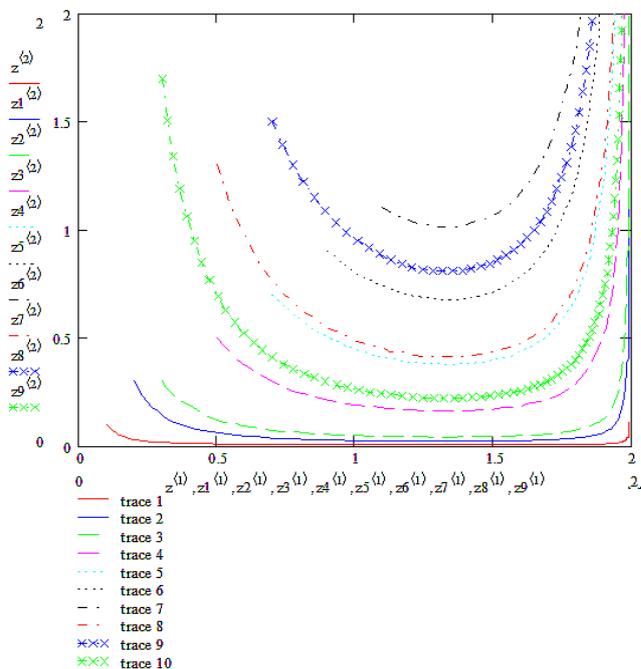


Рис. 3. Зависимость прибыли перекупщика от прибыли производителя при различных начальных условиях и параметрах  $a=0.2, b=0.1, c=0.4, d=0.3$

**5. 2. Результаты для трехмерной модели**

Ниже приведены графики, позволяющие наблюдать состояние модифицированной системы при появлении второго производителя.

На графиках рис. 4, 5 отображена зависимость перекупщика (ордината) от 1-го и 2-го производителя (абсцисса).

График достаточно быстро выходит на стационар, прибыль перекупщика практически неограниченно

растёт. Т. е. разницы между одним производителем и двумя практически не наблюдается. Графики достаточно похожи. Прибыль перекупщика не зависит от количества производителей.

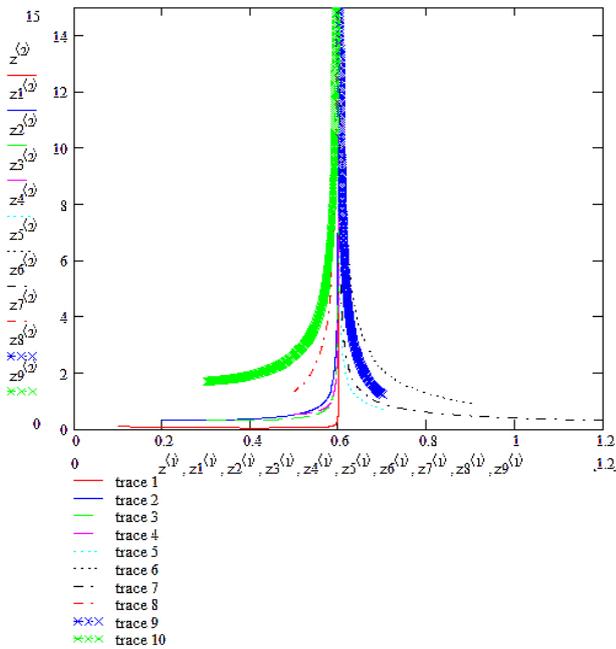


Рис. 4. Зависимость прибыли перекупщика от прибыли первого производителя при различных начальных условиях и параметрах  $a=0.3, b=0.5, c=0.3, d=0.4, e=0.2, f=0.4, g=0.5$

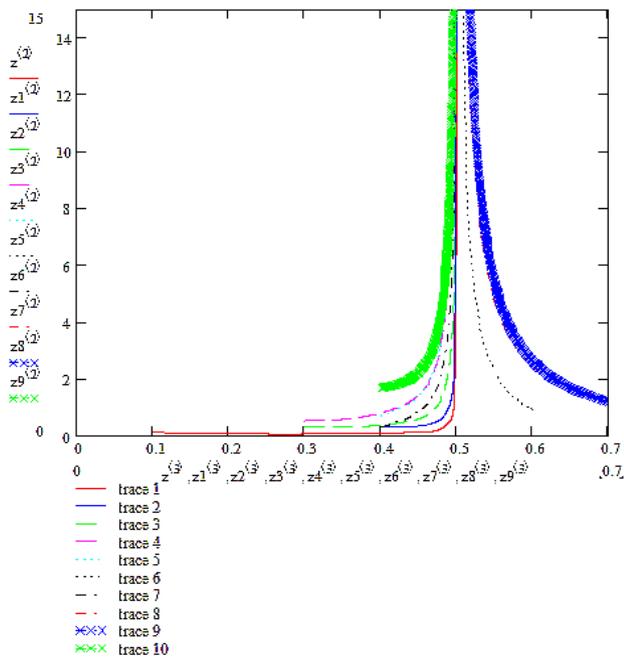


Рис. 5. Зависимость прибыли  $z^{<2>}$  перекупщика от прибыли  $z^{<3>}$  второго производителя при различных начальных условиях и параметрах  $a=0.3, b=0.5, c=0.3, d=0.4, e=0.2, f=0.4, g=0.5$

При определённых объёмах производства прибыль перекупщика стремительно растёт. Рис. 6 иллюстрирует рост прибыли  $z^{<2>}$  перекупщика от времени  $z^{<0>}$  производителя.

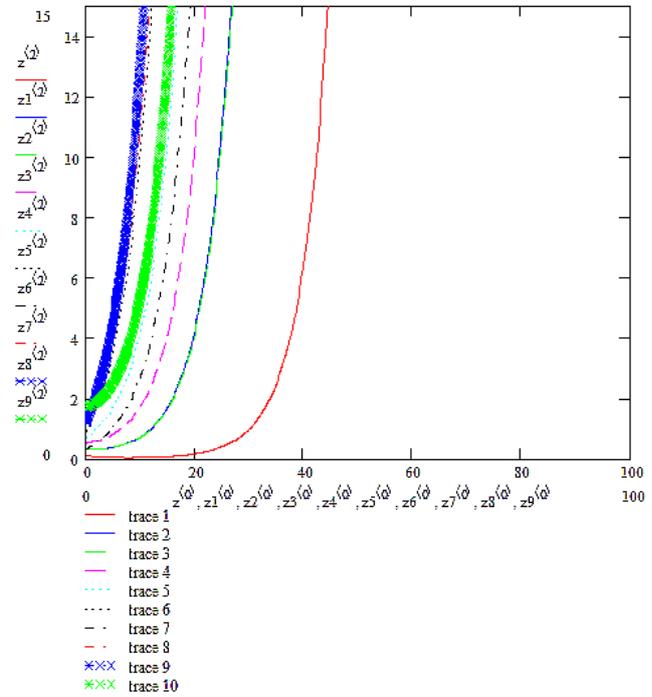


Рис. 6. Зависимость прибыли перекупщика от времени производителя при различных начальных условиях и параметрах  $a=0.3, b=0.5, c=0.3, d=0.4, e=0.2, f=0.4, g=0.5$

Исходя из графика на рис. 6 можем заключить, что на временном интервале прибыль перекупщика стремительно растёт в очень короткие сроки.

Процесс быстро выходит на стационар, прибыль первого производителя держится на одном уровне. Сравнение рис. 5 и 7 показывает, что фазовые портреты при разных значениях параметров качественно подобны.

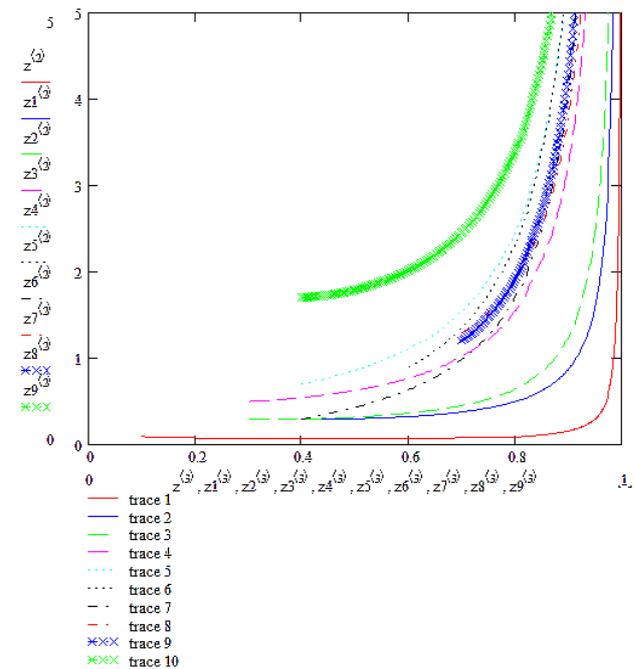


Рис. 7. Зависимость прибыли перекупщика от прибыли второго производителя при значениях параметров  $a=0.2, b=0.3, c=0.3, d=0.4, e=0.4, f=0.4, g=0.5$

Прибыль перекупщика растёт при увеличении объёма производства второго производителя. Прибыль производителя держится на одном уровне. Процесс быстро выходит на стационар.

---

### 6. Выводы

---

На базе модели Лотки-Вольтерра разработана математическая модель "производитель-перекупщик", описывающая конкурентные отношения между субъектами экономического рынка. Разработана модификация модели "производитель-перекупщик", включающая еще одного производителя.

Исследованы модели "производитель-перекупщик" и её трехмерная модификация. Проведен анализ поведения моделей; с использованием пакета Mathcad получены графики.

В результате проведенных исследований конкурентных процессов в экономике получены теоретические и экспериментальные данные, расширяющие возможности анализа, исследования и прогнозирования поведения контрагентов на рынке. Полученная модель имеет значительные возможности для дальнейшего усовершенствования и отображения изменяющейся ситуации на рынке.

Экономическая система, описываемая моделями (4) и (5), является "нестабильной" в том смысле, что один из участников имеет либо бесконечно большую прибыль, либо нулевую. Эта ситуация похожа на ту, которая возникает для классической модели Вольтерра [15] конкуренции видов. Для стабилизации необходима более реальная модель с конкуренцией между несколькими производителями и несколькими перекупщиками.

---

### Литература

1. Автухович, Э. В. Математическая модель экономики переходного периода [Текст] / Э. В. Автухович, Н. Н. Оленев, А. А. Петров, И. Г. Поспелов, А. А. Шананин, С. В. Чуканов. – М.: ВЦ РАН, 1999. – 144 с.
2. Юданов, А. Ю. Конкуренция: теория и практика [Текст] : уч.-метод. пос. / А. Ю. Юданов. – М.: Прогресс, 1996. – 224 с.
3. Щербаковский, Г. З. Внутренний механизм конкуренции и конкурентные силы [Текст] / Г. З. Щербаковский. – М.: Экономика, 1997. – 178 с.
4. Dai, G. Coexistence Region and Global Dynamics of a Harvesting Predator – Prey Systems [Text] / G. Dai, M. Tang // SIAM J. Appl. Math. – 1998. – Vol. 58, Issue 1. – P. 193–210. doi: 10.1137/s0036139994275799
5. Glass, L. Oscillations and chaos in physiological control systems [Text] / L. Glass, M. C. Mackey // Science. – 1977. – Vol. 197. – P. 287–289.
6. Glass, L. Pathological conditions resulting from instabilities in Physiological control systems [Text] / L. Glass, M. C. Mackey // Ann. N. Y. Acad. Sci. – 1979. – Vol. 316, Issue 1. – P. 214–235. doi: 10.1111/j.1749-6632.1979.tb29471.x
7. Goel, N. S. On the Volterra and other nonlinear models of interacting population [Text] / N. S. Goel, S. C. Maitra, E. W. Montroll // Rev. Modern Phys. – 1971. – Vol. 43, Issue 2. – P. 231–276. doi: 10.1103/revmodphys.43.231
8. Gopalsamy, K. Stability of Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics [Text] / K. Gopalsamy. – Dordrecht: Kluwer, 1992, – 212 p. doi: 10.1007/978-94-015-7920-9
9. Gourley, S. A. A predator – prey reaction – diffusion system with nonlocal effects [Text] / S. A. Gourley, N. F. Britton // J. Math. Biol. – 1996. – Vol. 34, Issue 3. – P. 297–333. doi: 10.1007/bf00160498
10. Математическое моделирование: процессы в сложных экономических и экологических системах [Текст] / под ред. А. А. Самарского, Н. Н. Моисеева, А. А. Петрова. – М.: Наука, 1986. – 208 с.
11. Дэмбэрэл, С. К математической модели взаимодействия экономических и экологических процессов [Текст] / С. Дэмбэрэл, Н. Н. Оленев, И. Г. Поспелов // Математическое моделирование. – М., 2003. – 108 с.
12. Краснощеков, П. С. Принципы построения моделей [Текст] / П. С. Краснощеков, А. А. Петров; 2-е изд. – М.: Изд-во Фазис, 2000. – 411 с.
13. Прасолов, А. В. Математические модели динамики в экономике [Текст] / А. В. Прасолов. – СПб.: Изд-во Университета Экономики и Финансов, 2000. – 270 с.
14. Портер, М. Международная конкуренция [Текст] / М. Портер. – М.: Мир, 1994. – 428 с.
15. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование [Текст] / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1976. – 248 с.