

*Розглядається задача упаковки набору еліпсів у контейнер мінімальних розмірів. Допускаються неперервні обертання еліпсів. Для моделювання відношень неперетинання еліпсів та належності еліпса контейнеру використовується метод  $\rho$ -функцій. Будується математична модель у вигляді задачі нелінійної оптимізації. Пропонуються ефективні алгоритми пошуку наближених та локально-оптимальних розв'язків. Наводяться результати чисельних експериментів для прямокутного, кругового, еліптичного контейнера*

*Ключові слова: упаковка, еліпси, апроксимація, неперервні обертання,  $\rho$ -функції, математична модель, нелінійна оптимізація*

*Рассматривается задача упаковки набора эллипсов в контейнер минимальных размеров. Допускаются непрерывные вращения эллипсов. Для моделирования отношений непересечения эллипсов и принадлежности эллипса контейнеру используется метод  $\rho$ -функций. Строится математическая модель в виде задачи нелинейной оптимизации. Предлагаются эффективные алгоритмы поиска приближенных и локально-оптимальных решений. Приводятся результаты численных экспериментов для прямоугольного, кругового, эллиптического контейнера*

*Ключевые слова: упаковка, эллипсы, аппроксимация, непрерывные вращения,  $\rho$ -функции, математическая модель, нелинейная оптимизация*

УДК 519.85

DOI: 10.15587/1729-4061.2014.28015

## РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОЙ УПАКОВКИ ЭЛЛИПСОВ

**А. В. Панкратов**

Доктор технических наук,  
старший научный сотрудник\*

E-mail: impankratov@mail.ru

**Т. Е. Романова**

Доктор технических наук,  
ведущий научный сотрудник\*

E-mail: sherom@kharkov.ua

**И. А. Суббота**

Аспирант\*

E-mail: i.subota@mail.ru

\*Отдел математического моделирования  
Институт проблем машиностроения  
им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков,  
Украина, 61046

### 1. Введение

На современном этапе стремительно растет интерес к эффективному решению задач оптимального размещения геометрических объектов, частными случаями которых являются задачи упаковки и раскроя, что объясняется разнообразием практических приложений и чрезвычайной сложностью математических моделей и методов их решения. Задачи упаковки и раскроя (Cutting & Packing) и являются предметом исследования вычислительной геометрии, а методы их решения – новым направлением теории исследования операций. Этот класс задач имеет широкий спектр научных и практических применений в современной биологии, минералогии, материаловедении, нанотехнологии, робототехнике, системах распознавания образов, в химической промышленности, машиностроении, строительстве и т. д. В данной статье рассматривается класс задач упаковки заданного набора эллипсов в контейнер (прямоугольный, круговой, эллиптический) минимальных размеров, представляющий интерес, например, в порошковой металлургии при моделировании движения сыпучих веществ и задачах логистики при моделировании оптимальных упаковок объектов, имеющих форму цилиндра с эллиптическим основанием.

Задачи оптимальной упаковки эллипсов относятся к классу NP-сложных, для решения которых используются, как правило, эвристические алгоритмы. Для разработки эффективных алгоритмов, основанных на применении методов локальной и глобальной оптимизации, требуется построение адекватных математических моделей, основанных на аналитическом описании отношений эллипсов с учетом их непрерывных трансляций и вращений.

### 2. Анализ публикаций

Верхняя оценка плотности упаковки эллипсов в контейнер получена еще в работе [1]. В работах [2, 3] для решения задач данного класса применяется метод дискретного элемента. Однако данный метод является достаточно ресурсоемким, что ограничивает размерность пространства решения и количество используемых частиц. Математическая модель упаковки двух эллипсов исследуется в статье [4]. Эффективный численный алгоритм для определения факта пересечения эллипсов приводится в статье [5], здесь же исследуется влияние размеров эллипсов на плотность упаковки. Авторы статьи [6] рассматривают задачу упаковки кругов в эллипс. Задача упаковки формулируется в виде задачи нелинейного программирования. Для

нахождения приближений к глобальному решению применяется метод мултистарта.

В статье [7] излагается метод решения задачи упаковки истинных эллипсов (без аппроксимаций), допускающих вращения, с использованием современных NLP solvers, доступных в GAMS. В этой статье приводится достаточно полный обзор литературы, посвященный задачам упаковки эллипсов. С целью аналитического описания условия непересечения неориентированных эллипсов авторы используют идею разделяющей прямой, предложенную в работе [8] для моделирования отношений кругов и выпуклых многоугольников. В этом исследовании получено глобальное решение для небольшого числа эллипсов ( $n \leq 4$ ). Однако при  $n > 14$  авторам не удалось получить локально-оптимальное решение. В этой связи авторы предлагают эвристический *polythetic*-алгоритм для размещения большого числа эллипсов ( $14 \leq n \leq 100$ ) в прямоугольной области фиксированной ширины и переменной длины.

Задача оптимальной упаковки истинных эллипсов, допускающих непрерывные вращения, рассмотрена в [9]. Для аналитического описания основных ограничений размещения используются свободные от радикалов квази- $\rho$ -функции и псевдонормализованные квази- $\rho$ -функции [10]. Строится математическая модель в виде задачи нелинейного программирования. Предлагаются эффективные алгоритмы поиска локальных экстремумов. Изложенный в статье [9] подход позволяет представить задачу оптимальной упаковки эллипсов с учетом допустимых расстояний в виде задачи нелинейного программирования и получать локально-оптимальные решения при  $n \leq 120$ . Кроме того, используя квази- $\rho$ -функции, удалось улучшить результаты по времени и значению функции цели для примеров при  $5 \leq n \leq 100$ , приведенных в статье [7]. Однако с ростом числа размещаемых эллипсов значительно увеличивается размерность задачи и возрастает время решения задачи, что делает неэффективным по времени применение данного подхода для большого числа эллипсов.

### 3. Цель и задачи исследования

Целью данной работы является разработка эффективных алгоритмов решения задачи оптимальной упаковки эллипсов в контейнере, имеющем форму прямоугольника, круга и эллипса.

Основными задачами исследования являются:

- математическое моделирование ограничений непересечения эллипсов и ограничений принадлежности эллипсов контейнеру с использованием свободных от радикалов  $\rho$ -функций для эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей;
- построение математической модели оптимальной упаковки аппроксимированных эллипсов в виде задачи негладкой оптимизации;
- построение дерева решений, концевым вершинам которого соответствуют системы неравенств с гладкими функциями;

- разработка алгоритмов поиска локально-оптимальных решений для задачи упаковки аппроксимированных эллипсов на основе дерева решений;

- разработка стратегий поиска приближенных и локально-оптимальных решений задачи оптимальной упаковки истинных эллипсов.

### 4. Постановка задачи

Имеется набор эллипсов  $E_i, i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Каждый эллипс задан большой и малой полуосями  $a_i$  и  $b_i$ . Полагаем, что начало собственной системы координат  $E_i$  находится в центре его симметрии. Положение  $E_i$  в пространстве определяется вектором  $v_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ , где  $(x_i, y_i)$  – вектор трансляции,  $\theta_i$  – угол поворота.

В качестве контейнера рассматривается область  $\Omega \in \{E, C, R\}$ , характеризующаяся вектором переменных метрических характеристик  $p$ , где  $E$  – эллипс, заданный большой и малой полуосями  $ha$  и  $hb$ ,  $p = (h)$ ,  $h$  – коэффициент гомотетии;  $C$  – круг радиуса  $r$ ,  $p = (r)$ ;  $R$  – прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2b$ ,  $p = (a, b)$ . Полагаем, что собственная система координат контейнера  $\Omega$  – фиксирована.

В зависимости от вида контейнера (области размещения) рассматриваются следующие функции цели:

$$- F = r, \text{ если } \Omega \equiv C, \tag{1}$$

$$- F = h, \text{ если } \Omega \equiv E, \tag{2}$$

$$- F = a \cdot b, \text{ если } \Omega \equiv R. \tag{3}$$

*Задача оптимальной упаковки эллипсов.* Упаковать набор эллипсов  $E_i, i \in I_n$ , в контейнер  $\Omega$  так, чтобы функция цели  $F$  достигала своего минимального значения.

Один из способов решения поставленной задачи – аппроксимация эллипсов дугами окружностей и использование подхода, основанного на применении свободных от радикалов  $\rho$ -функций, приведенных в [11]. В этом случае полученное решение является приближенным, и в значительной степени будет зависеть от точности аппроксимации эллипсов. Точки локальных экстремумов для задачи упаковки аппроксимированных эллипсов могут быть использованы в качестве стартовых точек для поиска локально-оптимальных решений в задаче размещения истинных эллипсов, используя алгоритм, описанный в работе [9]. Такой подход позволяет решать задачи большой размерности ( $n \geq 100$ ) и значительно сократить затраты вычислительных ресурсов.

*Аппроксимация размещаемых эллипсов.* В данном исследовании полагаем, что граница размещаемого эллипса  $E$  (рис. 1, а) аппроксимируется четырьмя дугами окружностей. Обозначим аппроксимированный эллипс (в дальнейшем, объект) через  $\hat{E}$ . Каждая дуга  $l_k, k = 1, 2, \dots, 4$ , задается кортежем  $(x_k, y_k, r_k, x_{c_k}, y_{c_k})$ , где  $(x_k, y_k) = \chi_k$  – точка начала дуги  $l_k$ ,  $(x_{c_k}, y_{c_k}) = \chi_{c_k}$  – центр, а  $r_k$  – радиус формирующей окружности  $fr(C_k)$  (рис. 1, б). Здесь  $fr(\cdot)$  – граница объекта  $(\cdot)$ .

В табл. 1 приведены данные для описания  $l_k, k = 1, \dots, 4$ , при  $H = (a - b)(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) / 2a$ .

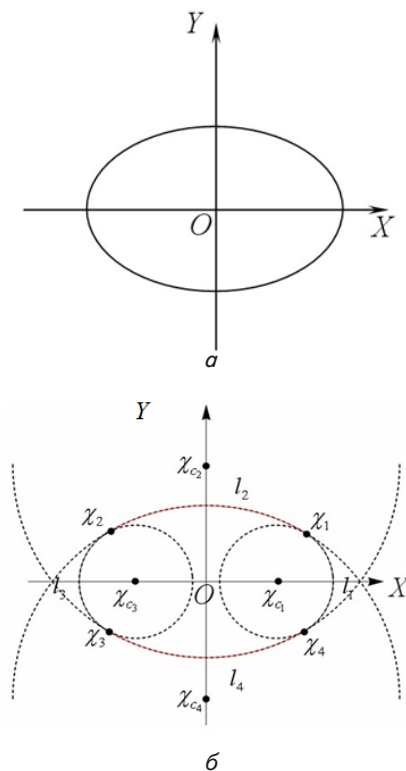


Рис. 1. Внешняя аппроксимация эллипса E в собственной системе координат XOY: a – истинный эллипс E, б – объект E-hat

Таблица 1

Данные l<sub>k</sub> для аппроксимации эллипса E

l <sub>k</sub>	x <sub>k</sub>	y <sub>k</sub>	x <sub>с<sub>k</sub></sub>	y <sub>с<sub>k</sub></sub>	r <sub>k</sub>
l <sub>1</sub>	$\frac{b \cdot (a - H)}{\sqrt{a^2 + b^2}} + H$	$-\frac{a \cdot (a - H)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	H	0	a - H
l <sub>2</sub>	$\frac{b \cdot (a - H)}{\sqrt{a^2 + b^2}} + H$	$\frac{a \cdot (a - H)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	0	$-\frac{a}{b}H$	$b + \frac{a}{b}H$
l <sub>3</sub>	$-\frac{b \cdot (a - H)}{\sqrt{a^2 + b^2}} - H$	$\frac{a \cdot (a - H)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	-H	0	a - H
l <sub>4</sub>	$-\frac{b \cdot (a - H)}{\sqrt{a^2 + b^2}} - H$	$-\frac{a \cdot (a - H)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	0	$\frac{a}{b}H$	$b + \frac{a}{b}H$

Данный алгоритм позволяет строить аппроксимацию эллипса E таким образом, что E ⊆ E-hat. Далее, объект E-hat представляется в виде объединения базовых объектов (рис. 2) вида

$$\hat{E} = C_1 \cup D_2 \cup C_3 \cup D_4 \cup K_5, \tag{4}$$

где C<sub>1</sub>, C<sub>3</sub> – круги с центрами в точках χ<sub>c1</sub>, χ<sub>c3</sub>, соответственно; D<sub>2</sub>, D<sub>4</sub> – круговые сегменты, ограниченные дугами окружностей fr(C<sub>2</sub>), fr(C<sub>4</sub>) и хордами [χ<sub>1</sub>, χ<sub>2</sub>], [χ<sub>3</sub>, χ<sub>4</sub>], соответственно (подробное описание объекта D приведено в [12]), K<sub>5</sub> – прямоугольник.

Аппроксимация эллиптической области размещения. Пусть Ω ≡ E – эллипс, заданный большой и малой

полуосями a<sub>0</sub> и b<sub>0</sub>. Рассмотрим эллипс E<sub>ε</sub> с метрическими характеристиками a = a<sub>0</sub> - ε, b = b<sub>0</sub> - ε и его внешней аппроксимацией E-hat<sub>ε</sub>, построенной с помощью алгоритма, приведенного выше.

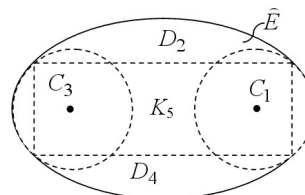


Рис. 2. Покрытие эллипса E базовыми объектами

В качестве внешней аппроксимации объекта E\* = R<sup>2</sup> \ int E выбирается объект E-hat\*<sub>ε</sub> = R<sup>2</sup> \ int E-hat<sub>ε</sub>, который описывается объединением базовых объектов вида (рис. 3)

$$\hat{E}^*_{\epsilon} = G_1 \cup C_2^* \cup G_3 \cup C_4^*, \tag{5}$$

где C<sub>2</sub><sup>\*</sup>, C<sub>4</sub><sup>\*</sup> – дополнения до кругов C<sub>2</sub>, C<sub>4</sub> с центрами в точках χ<sub>c2</sub>, χ<sub>c4</sub>; G<sub>1</sub>, G<sub>3</sub> – объекты (на рисунке 3 выделены серым цветом), образованные пересечением полуплоскостей P<sub>1</sub>, P<sub>3</sub> и дополнением до кругов C<sub>1</sub>, C<sub>3</sub> с центрами в точках χ<sub>c1</sub>, χ<sub>c3</sub>, соответственно (подробное описание объекта вида G приведено в [12]).

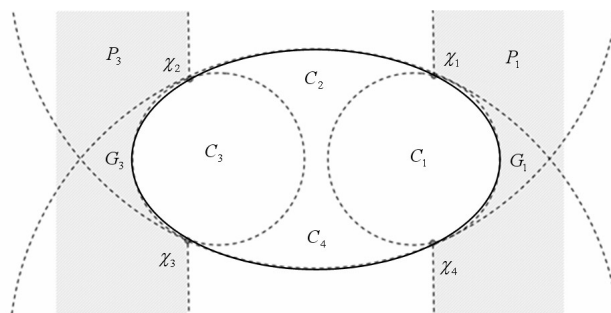


Рис. 3. Покрытие объекта E\* базовыми объектами

При этом ε выбирается (в зависимости от эксцентриситета и размеров эллипса E) таким образом, что E\* ⊆ E-hat\*<sub>ε</sub>.

### 5. Средства математического моделирования

Основными ограничениями поставленной задачи являются:

– непересечение эллипсов:

$$\text{int } E_i(v_i) \cap \text{int } E_j(v_j) = \emptyset, \quad i < j \in I_n, \tag{6}$$

– включение эллипсов в область размещения:

$$E_i(v_i) \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int } E_i(v_i) \cap \text{int } \Omega^* = \emptyset, \tag{7}$$

$$i \in I_n, \quad \Omega^* = R^2 \setminus \text{int } \Omega.$$

Конструктивным средством математического моделирования ограничений (6), (7) в классе задач упаковки и раскроя является метод phi-функций Стояна (например, [12]).

Условие (6) выполняется, если  $\Phi^{\hat{E}_i, \hat{E}_j} \geq 0$ ,  $i < j \in I_n$ , где  $\Phi^{\hat{E}_i, \hat{E}_j}$  – phi-функция для объектов  $\hat{E}_i$  и  $\hat{E}_j$ , которая, основываясь на (4), может быть определена так:

$$\Phi^{\hat{E}_i, \hat{E}_j} = \min\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k, \dots, \Phi_{25}\}, \quad (8)$$

$$\Phi_k \in \{\Phi^{CC}, \Phi^{CD}, \Phi^{DD}, \Phi^{KK}, \Phi^{KC}, \Phi^{KD}\}, \quad k=1, \dots, 25, \quad (9)$$

где  $\Phi_k$  – phi-функция для пары базовых объектов (в дальнейшем, базовая phi-функция). В (9)  $\Phi^{CC}$  – phi-функция для двух кругов,  $\Phi^{CD}$  – phi-функция для круга С и кругового сегмента D,  $\Phi^{CK}$  – phi-функция для круга С и выпуклого многоугольника К,  $\Phi^{DD}$  – phi-функция для двух круговых сегментов,  $\Phi^{DK}$  – phi-функция для кругового сегмента D и выпуклого многоугольника К,  $\Phi^{KK}$  – phi-функция для двух выпуклых многоугольников.

Условие (7) выполняется, если  $\Phi^{\hat{\Omega}^*, \hat{E}_i} \geq 0$ ,  $i \in I_n$ , где  $\Phi^{\hat{\Omega}^*, \hat{E}_i}$  – phi-функция для объектов  $\hat{\Omega}^*$  и  $\hat{E}_i$ , которая, основываясь на соотношениях (4), (5), может быть представлена в виде

$$\Phi^{\hat{\Omega}^*, \hat{E}_i} = \begin{cases} \min\{\Phi^{C^*C_1}, \Phi^{C^*D_2}, \Phi^{C^*C_3}, \Phi^{C^*D_4}\}, & \text{if } \Omega = C, \\ \min\{\Phi^{R^*C_1}, \Phi^{R^*D_2}, \Phi^{R^*C_3}, \Phi^{R^*D_4}\}, & \text{if } \Omega = R, \\ \min\{\Phi^{\hat{E}_i^*C_1}, \Phi^{\hat{E}_i^*D_2}, \Phi^{\hat{E}_i^*C_3}, \Phi^{\hat{E}_i^*D_4}\}, & \text{if } \Omega = E, \end{cases} \quad (10)$$

$$\Phi^{\hat{E}_i^*C} = \min\{\Phi^{C_1^*C}, \Phi^{G_2^*C}, \Phi^{C_3^*C}, \Phi^{G_4^*C}\}, \quad (11)$$

$$\Phi^{\hat{E}_i^*D} = \min\{\Phi^{C_1^*D}, \Phi^{G_2^*D}, \Phi^{C_3^*D}, \Phi^{G_4^*D}\}. \quad (12)$$

В (10)  $\Phi^{C^*C}$  ( $\Phi^{C^*D}$ ) – phi-функция для круга С (кругового сегмента D) и объекта  $C^*$ ;  $\Phi^{R^*C}$  ( $\Phi^{R^*D}$ ) – phi-функция для круга С (кругового сегмента D) и объекта  $R^*$ ;  $\Phi^{\hat{E}_i^*C}$  ( $\Phi^{\hat{E}_i^*D}$ ) – phi-функция для круга С (кругового сегмента D) и объекта  $\hat{E}_i^*$ ; в (11)  $\Phi^{C_1^*C}$  ( $\Phi^{G_2^*C}$ ) – phi-функция для объекта  $C^*$  ( $G^*$ ) и круга С; в (12)  $\Phi^{C_1^*D}$  ( $\Phi^{G_2^*D}$ ) – phi-функция для объекта  $C^*$  ( $G^*$ ) и кругового сегмента D.

Все базовые phi-функции, перечисленные выше, приводятся в статье [11].

### 6. Математическая модель задачи оптимальной упаковки аппроксимированных эллипсов

Пусть  $u = (p, v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^\sigma$  – вектор переменных,  $\mathbb{R}^\sigma$  – арифметическое евклидовое пространство размерности  $\sigma$ .

Математическая модель задачи оптимальной упаковки объектов  $\hat{E}_i$ ,  $i \in I_n$ , имеет вид

$$F(u^*) = \min_{u \in W \subset \mathbb{R}^\sigma} F(u), \quad (13)$$

$$W = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi^{\hat{E}_i, \hat{E}_j}(u) \geq 0, \Phi^{\hat{E}_i, \hat{\Omega}^*}(u) \geq 0, j > i \in I_n, \lambda \geq 0\}, \quad (14)$$

где  $F(u)$  – функция вида (1)-(3),  $\Phi^{\hat{E}_i, \hat{E}_j}(u)$  – phi-функция для объектов  $\hat{E}_i(v_i)$  и  $\hat{E}_j(v_j)$ ,  $\Phi^{\hat{E}_i, \hat{\Omega}^*}(u)$  – phi-функция объектов  $\hat{E}_i(v_i)$  и  $\hat{\Omega}^*$ ,  $\lambda \geq 0$  – система дополнительных ограничений на метрические характеристики контейнера  $\Omega$ .

Учитывая вид phi-функций (8)–(12), участвующих в формировании области допустимых решений, соотношение (14) может быть представлено в виде

$$W = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Phi_k(u) \geq 0, k \in I_m, \lambda \geq 0\}, \quad (15)$$

где  $\Phi_k(u)$  – базовая phi-функция,  $m$  – число базовых phi-функций в (14).

Задача (13), (14) является задачей негладкой оптимизации, поэтому для ее решения представим область допустимых решений  $W$  в виде объединения подобластей  $W_s$ ,  $s=1, \dots, \eta$ , каждая из которых описывается системой неравенств с гладкими функциями. С этой целью построим дерево решений.

Как известно [12, 13], каждая базовая phi-функция  $\Phi_k$  в (15) может быть определена так:

$$\Phi_k = \max_{i=1, \dots, \eta_k} f_i^k = \max_{i=1, \dots, \eta_k} \min_{j=1, \dots, J_i^k} f_{ij}^k,$$

где  $f_{ij}^k$  – гладкая функция.

Из  $\min_{j=1, \dots, J_i^k} f_{ij}^k \geq 0$  следует, что  $f_{ij}^k \geq 0$  для всех  $j$ , а

$\max_{i=1, \dots, \eta_k} f_i^k \geq 0$  означает, что, по крайней мере, одно из нера-

венств  $f_i^k \geq 0$  выполняется.

Поэтому для описания области допустимых решений (15) всегда может быть построено дерево решений  $\mathfrak{S}$ .

На первом уровне дерева  $\mathfrak{S}$  число вершин равно  $\tau_1 = \eta_1$ , где  $\eta_1$  – число концевых вершин базового phi-дерева  $\mathfrak{S}_1$ , описывающего  $\Phi_1 \geq 0$ ,  $\Phi_1 = \max_{i=1, \dots, \eta_1} f_i^1$ ,

$f_i^1 = \min_{j=1, \dots, J_i^1} f_{ij}^1$ . Каждой вершине этого уровня соответствуй-

ет система неравенств  $\{\lambda \geq 0, f_i^1 \geq 0\}$ .

Из каждой вершины первого уровня исходит  $\eta_2$  вершин базового дерева  $\mathfrak{S}_2$ , которое описывает  $\Phi_2 \geq 0$ ,

где  $\Phi_2 = \max_{i=1, \dots, \eta_2} f_i^2$ ,  $f_i^2 = \min_{j=1, \dots, J_i^2} f_{ij}^2$ . Число вершин второго

уровня дерева  $\mathfrak{S}$  соответствует  $\tau_2 = \eta_1 \cdot \eta_2$ . Каждой концевой вершине этого уровня соответствует система неравенств  $\{\lambda \geq 0, f_i^1 \geq 0, f_i^2 \geq 0\}$ .

Из каждой вершины  $(k-1)$  уровня дерева  $\mathfrak{S}$  исходит  $\eta_k$  вершин базового дерева  $\mathfrak{S}_k$ , описывающее  $\Phi_k \geq 0$ ,  $\Phi_k = \max_{i=1, \dots, \eta_k} f_i^k$ ,  $f_i^k = \min_{j=1, \dots, J_i^k} f_{ij}^k$ . Число вершин дере-

ва  $\mathfrak{S}$  на  $k$ -ом уровне соответствует  $\tau_k = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_k$ . Каждой вершине  $k$ -го уровня соответствует система неравенств  $\{\lambda \geq 0, f_i^1 \geq 0, f_i^2 \geq 0, \dots, f_i^k \geq 0\}$ .

На рис. 4 приведена схема дерева решений  $\mathfrak{S}$ .

Число концевых вершин дерева решений  $\mathfrak{S}$  определяется так:  $\tau_m = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_k \cdot \dots \cdot \eta_{m-1} \cdot \eta_m = \eta$ .

Используя построенное дерево решений  $\mathfrak{S}$ , область допустимых решений  $W$  задачи (13), (14) можно представить в виде объединения подобластей  $W_s$ ,  $s=1, 2, \dots, \eta$  [12]. Каждая подобласть  $W_s$  соответствует  $s$ -ой концевой вершине дерева  $\mathfrak{S}$ , и описывается системой неравенств вида  $\{\lambda \geq 0, f_{s_k}^k \geq 0, k=1, \dots, m\}$ .

Таким образом, задачу (13), (14) можно свести к следующей оптимизационной задаче:

$$F(u^*) = \min\{F(u_1^*), F(u_2^*), \dots, F(u_\eta^*)\}, \quad (16)$$

$$F(u_s^*) = \min_{u \in W_s, \mathbb{R}^{\sigma}} F(u), \quad s = 1, 2, \dots, \eta \leq \eta^* \quad (17)$$

Задачи вида (17) могут быть решены стандартными методами нелинейной оптимизации.

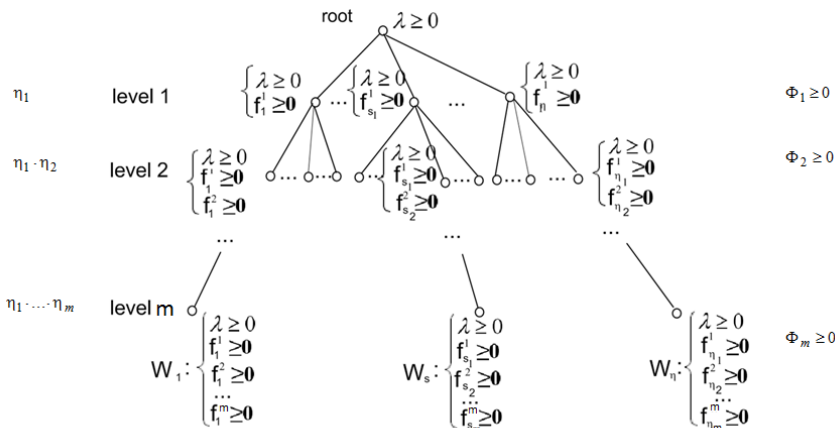


Рис. 4. Построение систем неравенств, описывающих подобласти  $W_s \subset W$ ,  $s = 1, 2, \dots, \eta$

### 7. Стратегии решения задачи (12), (13)

Для решения задачи (12), (13) предлагается два алгоритма, основанных на построении дерева решений. Первый алгоритм состоит в ускоренном переборе локальных минимумов задачи (16), (17) с использованием эффективных правил отсечения бесперспективных вершин. Второй – в поиске локальных экстремумов задачи (12), (13), используя метод мультистарта.

**Алгоритм 1.** В основе алгоритма лежит принцип генерации систем неравенств, которые описывают  $W_s \subset W$ , с использованием дерева решений  $\mathfrak{S}$ . Алгоритм 1 использует ускоренный поиск систем неравенств, соответствующих вершинам  $v_{s_k}^k$ ,  $s_k = 1, \dots, \eta_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , дерева решений  $\mathfrak{S}$ . Для отсечения бесперспективных вершин на  $k$ -ом уровне дерева  $\mathfrak{S}$ , используются правила отсечения, основанные на анализе несовместности систем неравенств и верхней оценке функции цели.

Рассмотрим подробнее данный алгоритм.

Прежде всего, определяется верхняя оценка  $F^0$  функции цели  $F(u)$ . Далее производится полный перебор всех вершин  $v_{s_1}^1, s_1 = 1, \dots, \eta_1$  первого уровня дерева  $\mathfrak{S}$  и решается оптимизационная задача, соответствующая вершине  $v_{s_1}^1$  в виде  $F(u_{s_1}^*) = \min F(u) \text{ s.t. } u \in V_{s_1}^1$ , где  $V_{s_1}^1 = \{u \in \mathbb{R}^{\sigma} : f_{s_1}^1 \geq 0, \lambda \geq 0\}$ .

Если  $V_{s_1}^1 = \emptyset$  или  $F(u_{s_1}^*) \geq F^0$ , то вершина  $v_{s_1}^1$  отсекается. В противном случае рассматриваются все вершины-потомки  $v_{s_2}^2, s_2 = 1, \dots, \eta_2$  вершины  $v_{s_1}^1$  и решаются оптимизационные задачи, соответствующая вершина  $v_{s_2}^2$  в виде

$$F(u_{s_2}^*) = \min F(u) \text{ s.t. } u \in V_{s_2}^2,$$

где  $V_{s_2}^2 = \{u \in \mathbb{R}^{\sigma} : f_{s_1}^1 \geq 0, f_{s_2}^2 \geq 0, \lambda \geq 0\}$ .

Если  $V_{s_2}^2 = \emptyset$  или  $F(u_{s_2}^*) \geq F^0$ , то вершина  $v_{s_2}^2$  отсекается. В противном случае, аналогично предыдущему шагу, последовательно рассматриваются все

вершины-потомки  $v_{s_3}^3, s_3 = 1, \dots, \eta_3$ , вершины  $v_{s_2}^2$  и решаются соответствующие оптимизационные задачи.

На последнем уровне дерева  $\mathfrak{S}$  решается оптимизационная задача, соответствующая вершине  $v_{s_m}^m$   $F(u_{s_m}^*) = \min F(u) \text{ s.t. } u \in W_s = V_{s_m}^m$ , где

$$V_{s_m}^m = \{u \in \mathbb{R}^{\sigma} : f_{s_1}^1 \geq 0, f_{s_2}^2 \geq 0, \dots, f_{s_m}^m \geq 0, \lambda \geq 0\}.$$

Если  $V_{s_m}^m \neq \emptyset$  и  $F(u_{s_m}^*) < F^0$ , то устанавливается  $F^0 = F(u_{s_m}^*)$  и точка  $u_{s_m}^*$  локального минимума выбирается в качестве локально-оптимального решения задачи (13)–(14).

Вычислительная сложность алгоритма 1 зависит от числа  $\eta \leq \eta$  нелинейных оптимизационных задач, которые должны быть решены, и от сложности применяемого метода нелинейной оптимизации, ( $O(\eta)$ ). Алгоритм 1 эффективен для решения задачи размещения небольшого числа аппроксимированных эллипсов и позволяет получать глобальные минимумы, в случае, если каждая из задач вида (17) решена оптимально.

**Алгоритм 2.** Этот алгоритм находит "хорошие" решения за разумное время, которое несущественно увеличивается с ростом числа размещаемых объектов.

Для построения стартовой точки  $u^0 \in W$  алгоритм использует быструю и эффективную эвристику, описанную в статье [12]. Данный алгоритм основан на формировании подобласти  $W_s \subset W$ , для которой  $u^0 \in W_s$ , с использованием дерева решений  $\mathfrak{S}$ .

Рассмотрим подробнее данный алгоритм.

Для формирования первого уровня дерева  $\mathfrak{S}$  выполняется полный перебор вершин  $v_s^1, s = 1, \dots, \eta_1$  и выбирается такая вершина  $s_1$ , для которой  $f_{s_1}^1(u^0) = f^1(u^0) = \max\{f_1^1(u^0), f_2^1(u^0), \dots, f_{\eta_1}^1(u^0)\}$ . Далее производится полный перебор вершин-потомков  $v_s^2, s = 1, \dots, \eta_2$  вершины  $v_{s_1}^1$ , и осуществляется поиск вершины  $s_2$ , для которой  $f_{s_2}^2(u^0) = f^2(u^0) = \max\{f_1^2(u^0), f_2^2(u^0), \dots, f_{\eta_2}^2(u^0)\}$ .

На  $m$ -ом уровне дерева  $\mathfrak{S}$  осуществляется полный перебор вершин  $v_s^m, s = 1, \dots, \eta_m$ , которые являются потомками вершины  $v_{s_{m-1}}^{m-1}$  и выбирается номер  $s_m$ , такой, что  $f_{s_m}^m(u^0) = f^m(u^0) = \max\{f_1^m(u^0), f_2^m(u^0), \dots, f_{\eta_m}^m(u^0)\}$ .

Далее формируется система неравенств, которая соответствует  $s$ -ой вершине дерева решений  $\mathfrak{S}$  и описывает область

$$W_s = \{u \in \mathbb{R}^{\sigma} : f_{s_1}^1 \geq 0, f_{s_2}^2 \geq 0, \dots, f_{s_m}^m \geq 0, \lambda \geq 0\},$$

и, стартуя из точки  $u^0$ , решается задача  $\min F(u) \text{ s.t. } u \in W_s$ .

На рис. 5 приведена схема формирования системы неравенств с гладкими функциями для описания подобласти  $W_s \subset W, u^0 \in W_s$ .

Вычислительная сложность Алгоритма 2 зависит от числа  $m$  базовых  $\text{phi}$ -функций, формирующих область допустимых решений, и сложности применяемого метода нелинейной оптимизации.

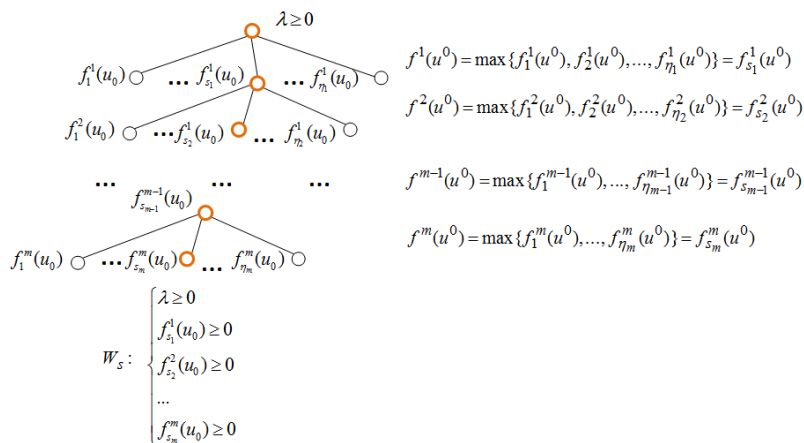


Рис. 5. Схема алгоритма 2

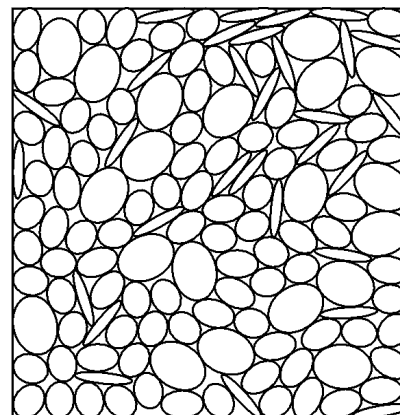


Рис. 6. Локально-оптимальное размещение эллипсов для примера 1

Для решения задачи оптимальной упаковки истинных эллипсов предлагаются три стратегии: стратегия 1 (АЕРР) позволяет получить приближенное решение с использованием алгоритма 1 или алгоритма 2 для размещения эллипсов, аппроксимированных дугами окружностей в прямоугольном, круговом и эллиптическом контейнерах; стратегия 2 (ЕРР) позволяет получать локально-оптимальное решение с использованием алгоритма, приведенного в работе [9] для размещения истинных эллипсов в прямоугольном контейнере; стратегия 3 (АЕРР + ЕРР) используется для размещения истинных эллипсов в прямоугольном контейнере и основана на последовательном выполнении двух оптимизационных процедур: i) построение стартовых точек из области допустимых решений, используя стратегию 1; ii) поиск локально оптимальных решений с применением стратегии 2, стартуя из точек локального минимума, полученных на шаге i).

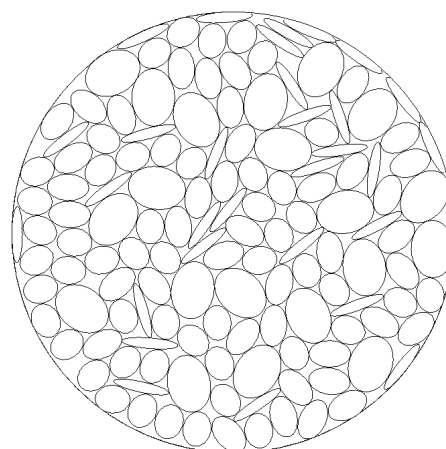


Рис. 7. Локально-оптимальное размещение эллипсов для примера 2

### 8. Численные эксперименты

Чтобы продемонстрировать эффективность предлагаемого подхода приведем ряд примеров с использованием алгоритма 2. Эксперименты проводились на компьютере AMD Athlon 64 X2 5200+. Для поиска локальных минимумов использовалась программа ПРОРТ (<https://projects.coin-or.org/Ipopt>) на основе метода внутренней точки, описанного в [14].

В первых трех примерах рассматривается 140 эллипсов, имеющих следующие размеры :  $\{(a_i, b_i) = (222, 180), i = 1, \dots, 50\}$ ,  $\{(a_i, b_i) = (260, 170), i = 51, \dots, 90\}$ ,  $\{(a_i, b_i) = (350, 70), i = 91, \dots, 120\}$ ,  $\{(a_i, b_i) = (360, 270), i = 121, \dots, 140\}$ . Мы устанавливаем ограничение по времени: 1 час. Осуществляется поиск по крайней мере 10 локальных минимумов.

*Пример 1.* Размещение эллипсов в прямоугольном контейнере, соответствующее точке локального минимума  $u^*$ , приведено на рис. 6. Контейнер имеет площадь  $F(u^*) = 24126350.3956$ .

*Пример 2.* Размещение эллипсов в круговом контейнере, соответствующее точке локального минимума  $u^*$ , приведено на рис. 7. Контейнер имеет радиус  $F(u^*) = 2770.6$ .

*Пример 3.* Размещение эллипсов в эллиптическом контейнере, соответствующее локальному минимуму, приведено на рис. 8.

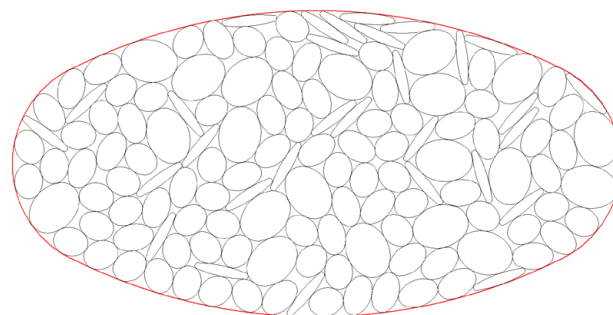


Рис. 8. Локально-оптимальное размещение эллипсов для примера 3

Исходный эллиптический контейнер задан полуосями  $a=1.0$  и  $b=0.5$ , контейнер с размещенными объектами имеет коэффициент гомотетии  $F(u^*) = h^* = 3882.588661$ .

*Пример 4.*  $n = 36$ ,  $\{(a_i, b_i) = (2.22, 1.80), i = 1, \dots, 9\}$ ,  $\{(a_i, b_i) = (2.60, 1.70), i = 10, \dots, 18\}$ ,  $\{(a_i, b_i) = (3.5, 0.7), i = 19, \dots, 27\}$ ,  $\{(a_i, b_i) = (3.6, 2.7), i = 28, \dots, 36\}$ .

Решается задача размещения *истинных эллипсов* в прямоугольном контейнере минимальной площади с использованием: стратегии 1 (АЕРР); стратегии 2 (ЕРР); стратегии 3 (АЕРР + ЕРР).

Размещения эллипсов, соответствующие локальным минимумам, полученные алгоритмами, реализующими стратегии 1–3, приведены на рис. 9 *а, б, в* соответственно. Значения функции цели и время решения приведены в табл. 2.

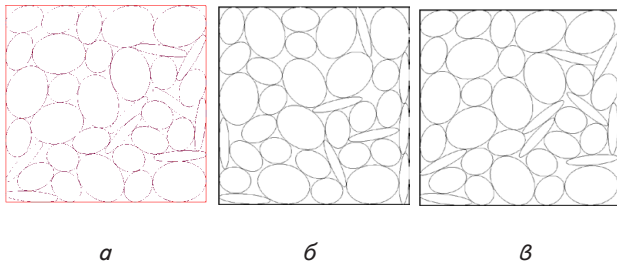


Рис. 9. Локально-оптимальное размещение эллипсов для примера 4, с использованием: *а* – стратегии 1; *б* – стратегии 2; *в* – стратегии 3

Таблица 2

Значения функции цели и время решения для примера 4

	АЕРР	ЕРР	АЕРР + ЕРР
$F(u^*)$	704.984	696.967	698.097
t, сек	280.28	1825.578	517.327

В табл. 3 приводятся сравнительные характеристики алгоритмов, реализующих стратегии АЕРР и ЕРР по числу размещаемых объектов, времени решения, виду областей размещения.

Таблица 3

Сравнительные характеристики алгоритмов, реализующие стратегии 1, 2

АЕРР	ЕРР
Максимальное число размещаемых объектов	
> 140	≤ 140
Время поиска одного локального экстремума в задаче размещения 140 объектов	
меньше 1 часа	3 часа
Допустимые формы контейнеров (областей размещения) $\Omega$	
C, E, R	R

Результаты численных экспериментов с использованием стратегии 2 для примеров, приведенных в работе [7], можно найти на странице сайта <https://app.box.com/s/mo7xjvje7v52p9movfi>.

## 9. Выводы

Предложенные в работе средства аналитического описания основных ограничений размещения с применением метода  $\phi$ -функций, позволили представить задачу оптимальной упаковки эллипсов в виде задачи негладкой оптимизации. Построено дерево решений, концевым вершинам которого соответствуют системы неравенств с гладкими функциями. Разработаны два алгоритма поиска локально-оптимальных решений для задачи упаковки аппроксимированных эллипсов, основанных на построении дерева решений. Предложены три стратегии поиска приближенных и локально-оптимальных решений для задачи оптимальной упаковки истинных эллипсов. Анализ численных экспериментов показал, что каждая из предложенных стратегий может быть использована для поиска эффективных решений поставленной задачи, в зависимости от ее размерности, требований к точности и быстродействию, а также от формы контейнера. Предлагаемая в статье методология позволяет получать приближенные решения для упаковки эллипсов в *прямоугольном, круговом и эллиптическом контейнерах* с использованием первой стратегии. Локально-оптимальные решения для упаковки эллипсов в прямоугольном контейнере можно получить, применяя вторую и третью стратегии. Следует отметить, что сравнение предложенных стратегий носит статистический характер, так для одной и той же стартовой точки в результате их применения получаются, как правило, различные локальные минимумы. Стратегия 1 позволяет получать достаточно “хорошие” приближенные решения со значительно меньшими затратами вычислительных ресурсов (от 3 до 6 раз). Однако эти решения, как правило, хуже по значению функции цели на 2–3 %, чем решения, получаемые с использованием стратегии 2. Приводятся результаты для  $n = 140$  эллипсов. Стратегия 3 является наиболее эффективной при  $n \geq 30$ , так как позволяет получать локально-оптимальные решения при затратах времени в 2–3 раза меньших, чем при использовании стратегии 2.

## Литература

- Toth, L. F. Packing of ellipses with continuously distributed area [Text] / L. F. Toth // Journal of Discrete Mathematics – 1986. – Vol. 60. – P. 263–267. doi:10.1016/0012-365X(86)90018-X.
- Ting, J. M. An ellipse-based discrete element model for granular materials [Text] / J. M. Ting, M. Khwaja, L. R. Meachum, J. D. Rowell // Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 1993. – Vol. 17(9). – P. 603–623. doi:10.1002/nag.1610170902.
- Feng, Y. An Advancing Front Packing of Polygons, Ellipses and Spheres [Text] / Y. Feng, K. Han, D. Owen // Discrete Element Methods – 2002. – P. 93-98. doi:10.1061/40647(259)17.
- Vickers, G. T. Nested Ellipses [Text] / G. T. Vickers // Applied Probability Trust. – 2009. – Vol. 41(3). – P. 131-137.
- Xu, W. X. An overlapping detection algorithm for random sequential packing of elliptical particles [Text] / W. X. Xu, H. S. Chen, Z. Lv // Physica. – 2011 – Vol. 390. – P. 2452-2467. doi:10.1016/j.physa.2011.02.048.
- Birgin, E. G. Packing circles within ellipses [Text] / E. G. Birgin, L. H. Bustamante, H. F. Callisaya, J. M. Martinez // International transactions in operational research. – 2013. – Vol. 20(3). – P. 365-389. doi:10.1111/itor.12006.

7. Kallrath, J. Cutting Ellipses from Area-Minimizing Rectangles [Text] / J. Kallrath, S. Rebennack // Journal of Global Optimization. – 2013. – Vol. 59 (2-3). – P. 405-437. doi:10.1007/s10898-013-0125-3.
8. Kallrath, J. Cutting Circles and Polygons from Area-Minimizing Rectangles [Text] / J. Kallrath // Journal of Global Optimization – 2008. – Vol. 43 (2-3). – P. 299-328. doi:10.1007/s10898-007-9274-6.
9. Панкратов, А. В. Оптимальная упаковка эллипсов с учетом допустимых расстояний [Текст] / А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, И. А. Суббота // Журнал Обчислювальної Математики. – 2014. – Т. 1 – С. 27-42.
10. Стоян, Ю. Г. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов [Текст] / Ю. Г. Стоян, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, Н. И. Чернов // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – Т. 9. – С. 49-54.
11. Chernov, N. Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs [Text] / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov // Advances in Operations Research. – 2012. – Vol. 2012. – 26 p. doi:10.1155/2012/346358
12. Chernov, N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem [Text] / N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – Vol. 43 (5). – P. 535-553. doi:10.1016/j.comgeo.2009.12.003.
13. Bennell, J. Optimal clustering of a pair of irregular objects [Text] / J. Bennell, G. Scheithauer, Y. Stoyan, T. Romanova, and A. Pankratov // Journal of Global Optimization. – 2014. doi:10.1007/S10898-014-0192-0
14. Wachter, A. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming [Text] / A. Wachter, L. T. Biegler // Mathematical Programming. – 2006. – Vol. 106 (1). – P. 25-57. doi:10.1007/s10107-004-0559-y.

**В роботі проведено дослідження класу неоднорідних часових рядів, як часткового випадку нестационарних рядів динаміки, які не наводяться до стаціонарних, характеризуються нелінійним трендом, складними періодичними компонентами, високим рівнем шуму та змінною структурою. Запропоновано підхід до ідентифікації даного класу рядів на підставі статистичних характеристик і метод оцінки максимального рівня втрат при прогнозуванні**

**Ключові слова: неоднорідні компоненти, нестационарний часовий ряд, статистичні характеристики, оцінка ризику, прогнозування**

**В работе проведено исследование класса неоднородных временных рядов, как частного случая нестационарных рядов динамики, которые не приводятся к стационарным, характеризуются нелинейным трендом, сложными периодическими компонентами, высоким уровнем шума и изменяющейся структурой. Предложен подход к идентификации данного класса рядов на основании статистических характеристик и метод оценки максимального уровня потерь при прогнозировании**

**Ключевые слова: неоднородные компоненты, нестационарный временной ряд, статистические характеристики, оценка риска, прогнозирование**

УДК 517.534

DOI: 10.15587/1729-4061.2014.28014

## РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ АНАЛИЗА НЕОДНОРОДНЫХ РЯДОВ ДИНАМИКИ НА ОСНОВАНИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

**А. А. Чистякова**

Аспирант

Кафедра информационных  
управляющих систем

Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники

пр. Ленина, 16, г. Харьков, Украина, 61166

E-mail: anna.chistyakova.prn@gmail.com

### 1. Введение

Непрерывное возрастание требований к контролю состояния технологических и бизнес процессов, а также финансовых показателей, вызванное необходимостью повышения эффективности, надежности и снижения риска при принятии управленческих решений, обусловило широкое применение современных информационных систем и технологий. Важной особенностью таких процессов и их моделей является изменение их показателей во времени, из которых формируются временные ряды, характеризующие состояние объектов в разные моменты. Временные ряды

значений технологических параметров и курсов валют представляют собой сложные зависимости с множеством локальных особенностей и отсутствием явной периодичности, следствием чего является наличие неоднородных компонент рядов динамики. При этом в каждый момент времени изменяются не только параметры процесса, но и его структура, что проявляется в свойстве неоднородности информации.

Подбор единой структуры модели для всего набора данных неоднородного временного ряда и прогнозирование с использованием статистических методов и моделей приводит к неэффективному результату вследствие большой ошибки модели и расширенно-