Пропонується алгоритм представлення мультиплікативних композицій векторної алгебри, які включають скалярні та векторні добутки декількох векторів, у формі кватерніоних матриць. Встановлюються, разом з відомими, нові тотожності векторної алгебри

Ключові слова: кватерніоні матриці, векторні матриці, мультиплікативні композиції, тотожності векторної алгебри, матричне представлення

Предлагается алгоритм представления мультипликативных композиций векторной алгебры, содержащих скалярные и векторные произведения нескольких векторов, в форме кватернионных матриц. Устанавливаются, наряду с известными, новые тождества векторной алгебры

Ключевые слова: Кватернионные матрицы, векторные матрицы, мультипликативные композиции, тождества векторной алгебры, матричное представление

An algorythm of presentation of vector algebra multiplicative compositions in form of quaternionic matrices are shown. New identities of vector algebra, as well as old one, are found. New formulas of matrix presentation of vector algebra operations are found

Key words: quaternionic matrices, vectorial matrices, multiplicative compositions, identities of vector algebra, matrix presentation

УДК 512.643.8:531.3

МЕТОД МАТРИЧНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ КОМПОЗИЦИЙ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В.В. Кравец
Доктор технических наук, профессор
Кафедра специализированных компьютерных систем
Украинский государственный химико-технологический университет”
пр. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, Украина, 49005
Контактный тел.: 067-726-07-72; (056) 748-07-06

А.В. Харченко
Аспирант
Кафедра «Прикладная математика»*
Контактный тел.: 050-321-14-60

Т.В. Кравец
Ассистент
Кафедра «Теоретическая механика»*
Контактный тел.: 067-921-10-67; (056) 713-58-03
*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна
ул. Лазаряна, 2, г. Днепропетровск, Украина, 49010

Введение

В механике абсолютно твердых тел доминирующим математическим аппаратом является векторное исчисление. Методы и подходы вычислительной математики используются непосредственно для решения широкого круга инженерных, технических задач [19, 26, 28]. В вычислительном эксперименте главенствующая роль принадлежит матричному исчислению [18, 27, 29]. Применение компьютерных технологий предполагает введение конкретной системы отсчета и необходимости приведения векторной записи алгоритмов решения к координатной, матричной форме [7, 23]. В аналитической динамике для решения широкого круга задач динамического проектирования космической, ракетной, авиационной техники, наземного транспорта, робототехники, в гироскопии, виброзащите и т.д. оказывается достаточным использование специального математического аппарата в виде исчисления кватернионных матриц [1, 17]. Кватернионные матрицы нашли применение в управлении ориентацией [3, 5, 25], в теории конечного поворота [10, 11, 24], в теории инерциальной навигации [21, 22], в кинематике и динамике твердого тела [9, 12, 13, 31, 32, 33], при изложении принципов симметрии в физике [30]. Математические модели и алгоритмы, представленные в унифицированной форме кватернионных матриц, непосредственно адаптированы к компьютерным технологиям.

Постановка задачи

Рассматриваются две векторные матрицы - (4×4), определяемые базисом E_i и $E_i^t\,(i=1,2,3)$ и эквивалентные вектору и противоположному вектору [14, 15]:

$$A_0=\begin{Vmatrix}0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & 0 & -a_3 & a_2\\ -a_2 & a_3 & 0 & -a_1\\ -a_3 & -a_2 & a_1 & 0\end{Vmatrix},\ A_0^t=\begin{Vmatrix}0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & 0 & a_3 & -a_2\\ -a_2 & -a_3 & 0 & a_1\\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 0\end{Vmatrix}.$$

Вектор в трехмерном пространстве записывается в виде матрицы - (4×1):

$$a_0=\begin{Vmatrix}0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{Vmatrix},$$

Скалярному и векторному произведению векторов сопоставляются композиции компонент векторов в виде матрицы - (4×1):

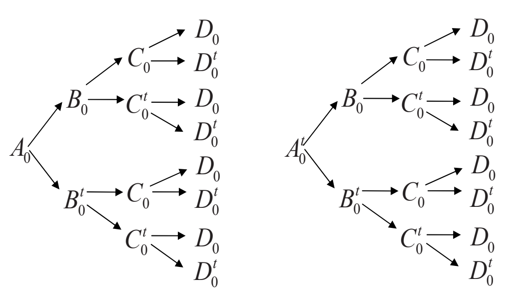
$$\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar a\cdot\bar b}{\bar a\times\bar b}\end{Vmatrix}\to\begin{Vmatrix}\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{a_2b_3-a_3b_2}\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_3\end{Vmatrix}$$

Требуется представить введенными двумя векторными матрицами мультипликативные композиции векторной алгебры, содержащие скалярные и векторные произведения двух, трех, четырех и более векторов. Полученные результаты обобщаются методом математической индукции.

Алгоритм решения задачи

I. Векторам $\bar a,\bar b,\bar c,\bar d,\dots$ сопоставим векторные матрицы $A_0,B_0,C_0,D_0,\dots$, а противоположным векторам – матрицы $A_0^t,B_0^t,C_0^t,D_0^t,\dots$

II. Образуем мультипликативные композиции искомых векторных матриц по следующей схеме:



Откуда устанавливаем мультипликативные композиции векторных матриц соответствующих:

1. Двум векторам $\bar a,\bar b$, т.е. $A_0\cdot b_0$ и $A_0^t\cdot b_0$ (две композиции: 2^1);
2. Трем векторам $\bar a,\bar b,\bar c$, т.е. $A_0\cdot B_0\cdot c_0$, $A_0\cdot B_0^t\cdot c_0$, $A_0^t\cdot B_0\cdot c_0$, $A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0$, (четыре композиции: 2^2);
3. Четырем векторам $\bar a,\bar b,\bar c,\bar d$, т.е. $A_0\cdot B_0\cdot C_0\cdot d_0$, $A_0\cdot B_0\cdot C_0^t\cdot d_0$, $A_0\cdot B_0^t\cdot C_0\cdot d_0$, $A_0\cdot B_0^t\cdot C_0^t\cdot d_0$, $A_0^t\cdot B_0\cdot C_0\cdot d_0$, $A_0^t\cdot B_0\cdot C_0^t\cdot d_0$, $A_0^t\cdot B_0^t\cdot C_0\cdot d_0$, $A_0^t\cdot B_0^t\cdot C_0^t\cdot d_0$, (восемь композиций: 2^3) и т.д.

Для произведений любого набора векторов подобных мультипликативных композиций векторных матриц составляем по приводимой схеме в количестве 2^{n-1}, где n – число векторов в рассматриваемом произведении.

III. Суммы полученных мультипликативных композиций векторных матриц представимы в виде произведения сумм:

1. $A_0\cdot b_0+A_0^t\cdot b_0=\left(A_0+A_0^t\right)b_0$;

2. $$\begin{aligned}&A_0\cdot B_0\cdot c_0+A_0\cdot B_0^t\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0=\\&=\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0\end{aligned};$$

3. $$\begin{aligned}&A_0\cdot B_0\cdot C_0\cdot d_0+A_0\cdot B_0\cdot C_0^t\cdot d_0+A_0\cdot B_0^t\cdot C_0\cdot d_0+\\&+A_0\cdot B_0^t\cdot C_0^t\cdot d_0+A_0^t\cdot B_0\cdot C_0\cdot d_0+A_0^t\cdot B_0\cdot C_0^t\cdot d_0+\\&+A_0^t\cdot B_0^t\cdot C_0\cdot d_0+A_0^t\cdot B_0^t\cdot C_0^t\cdot d_0=\\&=\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0;\end{aligned}$$

и т.д.

IV. Свойство ассоциативности умножения матриц определяет возможные последовательности перемножения полученных мультипликативных композиций векторных матриц, приводимые ниже:

1. Для мультипликативных композиций двух векторов $\bar a,\bar b$ (единственный вариант перемножения): $A_0\cdot b_0$, $A_0^t\cdot b_0$,
2. Для мультипликативных композиций трех векторов $\bar a,\bar b,\bar c$ (два варианта перемножения):

$$A_0\cdot B_0\cdot c_0=A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)=\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0,$$

$$A_0\cdot B_0^t\cdot c_0=A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)=\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0,$$

$$A_0^t\cdot B_0\cdot c_0=A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)=\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0,$$

$$A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0=A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)=\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0,$$

3. Для мультипликативных композиций четырех векторов $\bar a,\bar b,\bar c,\bar d$ (пять вариантов перемножения):

$$\begin{aligned}&A_0\cdot B_0\cdot C_0\cdot d_0=A_0\cdot\left[B_0\cdot\left(C_0\cdot d_0\right)\right]=A_0\cdot\left[\left(B_0\cdot C_0\right)\cdot d_0\right]=\\&\left[\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot C_0\right]\cdot d_0=\left[A_0\cdot\left(B_0\cdot C_0\right)\right]\cdot d_0=\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot\left(C_0\cdot d_0\right),\end{aligned}$$

и так далее для большего количества векторов.

V. Приведенным мультипликативным композициям векторных матриц ставятся в соответствие мультипликативные композиции векторной алгебры для двух, трех, четырех и более векторов. Например:

1. Для двух векторов имеем:

$$A_0\cdot b_0\to\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar a\cdot\bar b}{\bar a\times\bar b}\end{Vmatrix},\ A_0^t\cdot b_0\to\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar a\cdot\bar b}{-\left(\bar a\times\bar b\right)}\end{Vmatrix},$$

2. Для трех векторов:

$$A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)\to\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)}{-\bar a\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)}\end{Vmatrix},$$

$$A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\to\begin{Vmatrix}\dfrac{-\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)}{-\bar a\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)}\end{Vmatrix},$$

$$A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)\to\begin{Vmatrix}\dfrac{\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)}{-\bar a\left(\bar b\cdot\bar c\right)-\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)}\end{Vmatrix},$$

$$A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)\to\begin{Vmatrix}\dfrac{-\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)}{-\bar a\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)}\end{Vmatrix},$$

и

$$\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0\to\left\|\frac{\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c}{-\bar c\left(\bar a\cdot\bar b\right)+\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c}\right\|,$$

$$\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0\to\left\|\frac{-\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c}{\left(\bar a\cdot\bar b\right)\bar c-2\left(\bar a\cdot\bar c\right)\bar b+\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c}\right\|,$$

$$\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0\to\left\|\frac{\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c}{\left(\bar a\cdot\bar b\right)\bar c-2\left(\bar a\cdot\bar c\right)\bar b+\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c}\right\|,$$

$$\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0\to\left\|\frac{-\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c}{-\bar c\left(\bar a\cdot\bar b\right)+\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c}\right\|.$$

3. Для четырех векторов найдем восемь мультипликативных композиций

векторных матриц соответствующих пяти вариантам возможной последовательности умножения. Например:

$$A_0\left[B_0\left(C_0\odot d_0\right)\right]\to\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\bar a\cdot\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]}{-\bar a\left[\bar b\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]-\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\bar a\times\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]}\right\|;$$

$$A_0\left[\left(B_0\odot C_0\right)d_0\right]\to\left\|\frac{-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)+\bar a\cdot\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]}{-\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]-\left(\bar a\times\bar d\right)\left(\bar b\cdot\bar c\right)+\bar a\times\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]}\right\|;$$

$$\left[\left(A_0\odot B_0\right)C_0\right]d_0\to\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\cdot\bar d}{-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]\bar d-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)+\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\times\bar d}\right\|;$$

$$\left[A_0\left(B_0\odot C_0\right)\right]d_0\to\left\|\frac{-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\cdot\bar d}{-\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\bar d-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\times\bar d\right)+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\times\bar d}\right\|;$$

$$\left(A_0\odot B_0\right)\left(C_0\odot d_0\right)\to\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)+\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)}{-\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)+\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)}\right\|;$$

VI. Составляются упорядоченные алгебраические суммы полученных мультипликативных композиций векторных матриц в следующих комбинациях:

1. Для двух векторов:

$$\left(A_0+A_0^t\right)b_0=A_0b_0+A_0^tb_0;$$
$$\left(A_0-A_0^t\right)b_0=A_0b_0-A_0^tb_0;$$

2. Для трех векторов:

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0=$$
$$=A_0\cdot B_0\cdot c_0-A_0\cdot B_0^t\cdot c_0-A_0^t\cdot B_0\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0,$$
$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0=$$
$$=A_0\cdot B_0\cdot c_0-A_0\cdot B_0^t\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0\cdot c_0-A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0,$$
$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0=$$
$$=A_0\cdot B_0\cdot c_0+A_0\cdot B_0^t\cdot c_0-A_0^t\cdot B_0\cdot c_0-A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0,$$
$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0=$$
$$=A_0\cdot B_0\cdot c_0+A_0\cdot B_0^t\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0\cdot c_0+A_0^t\cdot B_0^t\cdot c_0.$$

и, учитывая приведенные варианты ассоциативности умножения векторных матриц, рассматриваются комбинации исходных мультипликативных композиций вида:

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0=$$
$$=A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)-A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)-A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)+A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right),$$
$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0=$$
$$=A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)-A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)+A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)-A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right),$$
$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0=$$
$$=A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)+A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)-A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)-A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right),$$
$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0=$$
$$=A_0\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)+A_0\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right)+A_0^t\cdot\left(B_0\cdot c_0\right)+A_0^t\cdot\left(B_0^t\cdot c_0\right).$$

а также

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0=$$
$$=\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0-\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0-\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0+\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0,$$
$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0=$$
$$=\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0-\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0+\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0-\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0,$$
$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0=$$
$$=\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0+\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0-\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0-\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0,$$

3.

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0=$$
$$=\left(A_0\cdot B_0\right)\cdot c_0+\left(A_0\cdot B_0^t\right)\cdot c_0+\left(A_0^t\cdot B_0\right)\cdot c_0+\left(A_0^t\cdot B_0^t\right)\cdot c_0.$$

Для четырех векторов получим соответственно:

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0=$$
$$=A_0B_0C_0d_0+A_0B_0^tC_0d_0+A_0^tB_0C_0d_0+A_0^tB_0^tC_0d_0+$$
$$+A_0B_0C_0^td_0+A_0B_0^tC_0^td_0+A_0^tB_0C_0^td_0+A_0^tB_0^tC_0^td_0,$$

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0=$$
$$=A_0B_0C_0d_0+A_0B_0^tC_0d_0-A_0^tB_0C_0d_0-A_0^tB_0^tC_0d_0+$$
$$+A_0B_0C_0^td_0+A_0B_0^tC_0^td_0-A_0^tB_0C_0^td_0-A_0^tB_0^tC_0^td_0,$$

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0=$$
$$=A_0B_0C_0d_0-A_0B_0^tC_0d_0+A_0^tB_0C_0d_0-A_0^tB_0^tC_0d_0+$$
$$+A_0B_0C_0^td_0-A_0B_0^tC_0^td_0+A_0^tB_0C_0^td_0-A_0^tB_0^tC_0^td_0,$$

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0=$$
$$=A_0B_0C_0d_0+A_0B_0^tC_0d_0+A_0^tB_0C_0d_0+A_0^tB_0^tC_0d_0-$$
$$-A_0B_0C_0^td_0-A_0B_0^tC_0^td_0-A_0^tB_0C_0^td_0-A_0^tB_0^tC_0^td_0,$$

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0=$$
$$=A_0B_0C_0d_0-A_0B_0^tC_0d_0-A_0^tB_0C_0d_0+A_0^tB_0^tC_0d_0+$$
$$+A_0B_0C_0^td_0-A_0B_0^tC_0^td_0-A_0^tB_0C_0^td_0+A_0^tB_0^tC_0^td_0,$$

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0=$$
$$=A_0B_0C_0d_0+A_0B_0^tC_0d_0-A_0^tB_0C_0d_0-A_0^tB_0^tC_0d_0-$$
$$-A_0B_0C_0^td_0-A_0B_0^tC_0^td_0+A_0^tB_0C_0^td_0+A_0^tB_0^tC_0^td_0,$$

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0 =$$
$$= A_0B_0C_0d_0 - A_0B_0^tC_0d_0 + A_0^tB_0C_0d_0 - A_0^tB_0^tC_0d_0 -$$
$$- A_0B_0C_0^td_0 + A_0B_0^tC_0^td_0 - A_0^tB_0C_0^td_0 + A_0^tB_0^tC_0^td_0,$$

$$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0 =$$
$$= A_0B_0C_0d_0 - A_0B_0^tC_0d_0 - A_0^tB_0C_0d_0 + A_0^tB_0^tC_0d_0 -$$
$$- A_0B_0C_0^td_0 + A_0B_0^tC_0^td_0 + A_0^tB_0C_0^td_0 - A_0^tB_0^tC_0^td_0,$$

и, учитывая рассмотренные возможные пять вариантов последовательности умножения четырех матриц (свойство ассоциативности), составляются комбинации мультипликативных композиций векторных матриц. Например:

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0 =$$
$$= A_0\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] +$$
$$+ A_0^t\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] +$$
$$+ A_0\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] +$$
$$+ A_0^t\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right],$$

или

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0 =$$
$$= A_0\left[\left(B_0C_0\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^tC_0\right)d_0\right] +$$
$$+ A_0^t\left[\left(B_0C_0\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0^tC_0\right)d_0\right] +$$
$$+ A_0\left[\left(B_0C_0^t\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^tC_0^t\right)d_0\right] +$$
$$+ A_0^t\left[\left(B_0C_0^t\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0^tC_0^t\right)d_0\right],$$

VII. По составленным здесь упорядоченным комбинациям находятся соответствующие им мультипликативные композиции векторной алгебры:

1. Для двух векторов:

1.1. $A_0b_0 + A_0^tb_0 \to 2\left\|\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{0}\right\|,$

1.2. $A_0b_0 - A_0^tb_0 \to 2\left\|\dfrac{0}{\bar{a}\times\bar{b}}\right\|,$

т.е.

1.1. $\left(A_0+A_0^t\right)b_0 \to 2\left\|\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{0}\right\|,$

1.2. $\left(A_0-A_0^t\right)b_0 \to 2\left\|\dfrac{0}{\bar{a}\times\bar{b}}\right\|,$

2. Для трех векторов:

2.0.1. $A_0\left(B_0c_0\right)+A_0\left(B_0^tc_0\right)+A_0^t\left(B_0c_0\right)+A_0^t\left(B_0^tc_0\right) \to 4\left\|\dfrac{0}{-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)}\right\|,$

2.0.2. $A_0\left(B_0c_0\right)+A_0\left(B_0^tc_0\right)-A_0^t\left(B_0c_0\right)-A_0^t\left(B_0^tc_0\right) \to 4\left\|\dfrac{0}{0}\right\|,$

2.0.3. $A_0\left(B_0c_0\right)-A_0\left(B_0^tc_0\right)+A_0^t\left(B_0c_0\right)-A_0^t\left(B_0^tc_0\right) \to 4\left\|\dfrac{\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}{0}\right\|,$

2.0.4. $A_0\left(B_0c_0\right)-A_0\left(B_0^tc_0\right)-A_0^t\left(B_0c_0\right)+A_0^t\left(B_0^tc_0\right) \to 4\left\|\dfrac{0}{\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}\right\|,$

или

1.1.1. $A_0\left(B_0c_0\right)+A_0\left(B_0^tc_0\right)+A_0^t\left(B_0c_0\right)+$
$+A_0^t\left(B_0^tc_0\right) \to 4\left\|\dfrac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}-\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)}\right\|,$

1.1.2. $A_0\left(B_0c_0\right)+A_0\left(B_0^tc_0\right)-A_0^t\left(B_0c_0\right)-A_0^t\left(B_0^tc_0\right) \to 4\left\|\dfrac{0}{0}\right\|,$

1.1.3. $A_0\left(B_0c_0\right)-A_0\left(B_0^tc_0\right)+A_0^t\left(B_0c_0\right)-$
$-A_0^t\left(B_0^tc_0\right) \to 4\left\|\dfrac{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}}{0}\right\|,$

1.1.4. $A_0\left(B_0c_0\right)-A_0\left(B_0^tc_0\right)-A_0^t\left(B_0c_0\right)+$
т.е. $+A_0^t\left(B_0^tc_0\right) \to 4\left\|\dfrac{0}{\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)}\right\|,$

1.1. $\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0 \to 4\left\|\dfrac{0}{-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)}\right\| =$
$= 4\left\|\dfrac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}-\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)}\right\|,$

1.2. $\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)c_0 \to 4\left\|\dfrac{0}{0}\right\| = 4\left\|\dfrac{0}{0}\right\|,$

1.3. $\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0 \to 4\left\|\dfrac{\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}{0}\right\| = 4\left\|\dfrac{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}}{0}\right\|,$

1.4.
$\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0 \to 4\left\|\dfrac{0}{\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}\right\| = 4\left\|\dfrac{0}{\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)}\right\|.$

Откуда сопоставляя эти результаты, находим известные тождества векторной алгебры [8]:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c} = \bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right),$$
$$\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right) = \bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right),$$
$$\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right) = \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}.$$

2. Для четырех векторов получим, например:

3.1.1. $A_0\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right]+A_0\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right]+A_0^t\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right]+$
$+A_0^t\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right]+A_0\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right]+A_0\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right]+$
$+A_0^t\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right]+A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] \to 8\left\|\dfrac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)}{0}\right\|$

и т.д.

Сопоставляя полученные результаты, находим векторно-матричные соответствия в виде:

$$\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0 \to 8\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)}{0}\right\| =$$

$$=8\left\|\frac{\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]-\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)}{0}\right\|=$$

$$=8\left\|\frac{\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\cdot\bar d-\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)}{0}\right\|,$$

и т.п.

Откуда следуют тождества векторной алгебры, связывающие мультипликативные композиции четырех векторов. В частности:

$$\bar a\cdot\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]=\begin{vmatrix}\bar a\cdot\bar c & \bar a\cdot\bar d\\ \bar b\cdot\bar c & \bar b\cdot\bar d\end{vmatrix},$$

$$\bar a\times\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]=\begin{vmatrix}\bar a\times\bar c & \bar a\times\bar d\\ \bar b\cdot\bar c & \bar b\cdot\bar d\end{vmatrix},$$

$$\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)=\begin{vmatrix}\bar a\cdot\bar c & \bar a\cdot\bar d\\ \bar b\cdot\bar c & \bar b\cdot\bar d\end{vmatrix},$$

$$\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)=\begin{vmatrix}\bar b & \bar a\\ \bar b\cdot\left(\bar c\times\bar d\right) & \bar a\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\end{vmatrix},$$

а также

$$\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar a-\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b+$$
$$+\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]\bar d=0,$$

$$\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b=\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\times\bar d\right)+\left(\bar b\cdot\bar d\right)\left(\bar a\times\bar c\right),$$

$$\bar a\cdot\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]=\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right),$$

и другие.

Отметим, что некоторые из этих тождеств известны [2, 8, 20].

VIII. На основе полученных соответствий устанавливаются лаконичные матричные формулы, представляющие мультипликативные композиции векторной алгебры. Например:

1. Для двух векторов

$$\left\|\frac{\bar a\cdot\bar b}{0}\right\|\to\frac{1}{2}\left(A_0+A_0^t\right)b_0,\qquad \left\|\frac{0}{\bar a\times\bar b}\right\|\to\frac{1}{2}\left(A_0-A_0^t\right)b_0,$$

2. Для трех векторов

$$\left\|\frac{\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)}{0}\right\|\to\frac{1}{4}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0,$$

$$\left\|\frac{0}{\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)}\right\|\to\frac{1}{4}\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)c_0,$$

3. Для четырех векторов

$$\left\|\frac{\bar a\cdot\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]}{0}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0,$$

$$\left\|\frac{0}{\bar a\times\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0,$$

$$\left\|\frac{0}{\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)}\right\|\to$$
$$\to\frac{1}{8}\left[\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)-\left(B_0+B_0^t\right)\left(A_0+A_0^t\right)\right]\left(C_0-C_0^t\right)d_0,$$

и т.п.

Выводы

Приведена методика представления мультипликативных композиций нескольких векторов в форме кватернионных матриц, иллюстрирующая изоморфность алгебры кватернионных матриц и векторной алгебры. Получены, наряду с известными, новые тождества векторной алгебры, подтверждающие достоверность изложенного метода.

Предложенные матричные формулы представления мультипликативных композиций векторной алгебры и соответствующие им алгоритмы обретают симметрию, инвариантную форму, компактность, универсальность, что ускоряет программирование, облегчает верификацию, обеспечивает удобство в работе, т.е. повышает производительность интеллектуального труда [4].

Литература

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
2. Борисенко А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. / А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов – Харьков: «Вища школа», 1978. – 216с.
3. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский – М.: Наука, 1973. – 320с.
4. Глушков В.М. Фундаментальные исследования и технология программирования / В.М. Глушков // Программирование. – 1980. – №2. – с.3-13.
5. Икес Б.П. Новый метод выполнения численных расчетов, связанных с работой системы управления ориентацией, основанный на использовании кватернионов / Б.П. Икес // Ракетная техника и космонавтика. – 1970. – 8. №1. – с. 13-19.
6. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики / Н.А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – т. 1. – 480с.; т. 2. – 544с.
7. Коренев Г.В. Тензорное исчисление. / Г.В. Корнев – М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 240с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832с.

9. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. / В.Н. Кошляков – М.: Наука, 1985. – 288с.
10. Кравець Т.В. Представлення кватерніонними матрицями послідовності скінчених поворотів твердого тіла у просторі. / Кравець Т.В. // Автоматика-2000. Міжнародна конференція з автоматичного управління: Праці у 7-ми томах. – т.2. – Львів: Державний НДІ Інформаційної інфраструктури, 2000. – с.140-145.
11. Кравец Т.В. Об использовании кватернионных матриц для описания вращательного движения твердого тела в пространстве. / Т.В. Кравец // Техническая механика. – 2001. - №1. – с.148-157.
12. Кравец В.В. Описание кинематики и нелинейной динамики ассиметричного твердого тела кватернионными матрицами. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Прикладная механика. – 2009. – Том 45. – №2 – с.133-143.
13. Кравец В.В. Кватернионные матрицы в нелинейной динамике скоростных транспортных систем / В.В. Кравец, В.В. Кравец, Т.В. Кравец // Вісник ДНУЗТ. – 2009. – Вип. 30. – с. 155-160.
14. Кравец В.В. Мультипликативные композиции матриц, эквивалентных равным и сопряженным кватернионам. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 6/4 (42) – с.20-26.
15. Кравец В.В. Мультипликативные композиции матриц, эквивалентных не равным и противоположным векторам. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – 2/9 (44) – с.56-61.
16. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье – М.: Физматгиз, 1961. – 824с.
17. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 400с.
18. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. / Н.Н. Моисеев – М.: Наука, 1979. – 224с.
19. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения. / И.Н. Молчанов – К.: Наукова думка, 1988. – 344с.
20. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. / П.С. Моденов – М.: Изд. Московск. Ун-та. – 1969. 698с.
21. Мэйо Р.А. Переходная матрица для вычисления относительных кватернионов / Р.А. Мэйо // Ракетная техника и космонавтика. – 1979. – 17 №3. – с. 184-189.
22. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. / С.М. Онищенко – Киев: Наук. думка, 1983. – 208 с.
23. Павловский М.А. Теоретична механіка: підручник. / М.А. Павловский – К.: Техніка, 2002. – 512с.
24. Плотников П.К. Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела. / П.К. Плотников, Ю.Н. Челноков – Сб. научно-методич. статей по теоретической механике, 1981, вып. 11, с. 122-129
25. Раушенбах Б.В. Управление ориентацией космических аппаратов. / Б.В. Раушенбах, Е.Н. Токарь – М.: Наука. 1974. – 598с.
26. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера / В.П. Сигорский – Киев.: Техника, 1977. – 768с.
27. Стражева И.В. Векторно-матричные методы в механике полета. / И.В. Стражева, В.С. Мелкумов – М.: Машиностроение, 1973. – 260с.
28. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений. / Дж Форсайт, М. Малькольм, К Моулер: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 280с.
29. Фрезер Р. Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике. / Р Фрезер, В. Дункан, А. Коллар – М.: Изд. Иностр. Лит., 1950. – 445с.
30. Элиот Дж. Симметрия в физике. / Дж. Элиот, П. Добер – М.: Мир, 1983. – Т.1. – 368с.; Т.2. – 416с.
31. Kravets V.V. Evaluating the Dynamic Load on a High-Speed Railroad Car / V.V. Kravets // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41. №3. – p. 324-329.
32. Kravets V.V. On the Nonlinear Dynamics of Elastically Interacting Asymmetric Rigid Bodies / V.V. Kravets, T.V. Kravets // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42. №1. – p. 110-114.
33. Kravets V.V. Evaluation of the Centrifugal, Coriolis, and Gyroscopic Forces on a Railroad Vehicle Moving at High Speed / V.V. Kravets, T.V. Kravets // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44. №1. – p. 101-109.