подальшому при плануванні роботи ВАТ «АТП 16365» потрібно враховувати отримані оптимальні значення технологічних параметрів. Для врахування більшої кількості факторів необхідне розширення моделі.

Література

1. Аутсорсинг логістичних функцій як механізм зниження витрат та оптимізації бізнес-системи підприємств. Тенденції та перспективи його застосування в Україні [Електронний ресурс] / Статник І.М.— Режим доступу : \www/ URL: http://www.nbuv.gov.ua/portal/natural/Upsal/2009_6/09simbse.pdf – Загол. з екрану.
2. Як обрати WMS [Електронний ресурс]/ Компанія «LFA. Logistics Field Audit»- Режим доступу: \www/ URL: http://www.lfa.co.ua/How_to_choose_WMS.html - Загол. з екрану.
3. Аникин Б. А. Коммерческая логистика [Текст] : учеб. / Б. А. Аникин, А. П. Тяпухин. – М. : ТК Велби, Изд-во Проспект, 2007. – 432 с.
4. Алесинская Т. В. Основы логистики. Общие вопросы логистического управления [Текст] / Т. В. Алесинская. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2005. - 121 с.
5. Сергеев В. И. Логистика: информационные системы и технологии [Текст] : Учебно-практическое пособие / В. И. Сергеев, М. Н. Григорьев, С. А. Уваров. - М. : Издательство «Альфа-Пресс», 2008. - 608 с.

УДК 621.314

ВИКОРИСТАННЯ СПЕКТРАЛЬНИХ МОМЕНТІВ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

В.М. Майстренко
Доцент
Кафедра наукових, аналітичних та екологічних приладів і систем
Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут"
пр-т Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056
Контактний тел.: (044) 406-08-03, 050-545-58-73
E-mail: maistrenko39@list.ru

Знайдено вирази для спектра функції розподілу через спектральні моменти функції розподілу, отримані трьома різними способами. Використання цих виразів при підсумовуванні випадкових похибок з квантильною оцінкою дасть можливість підвищити точність розрахунків

Ключові слова: функція розподілу; спектр функції розподілу; квантильна оцінка випадкової похибки

Найдены выражения для спектра функции распределения через спектральные моменты функции распределения, полученные тремя разными способами. Использование этих выражений при суммировании случайных погрешностей с квантильной оценкой даст возможность повысить точность расчетов

Ключевые слова: функция распределения; спектр функции распределения; квантильная оценка случайной погрешности

It is found expression for the spectrum of function of distributing through the spectral moments of function distributing, got three in number of different ways. Using of this expressions for adding up of random error terms with a quantile estimation will enable to promote exactness of calculations

Key words: distributing function; the spectrum of function of distributing; quantile estimation of random error

1. Вступ

Для визначення похибки навіть окремого засобу вимірювальної техніки необхідно підсумовувати всі складові його похибки, тобто основну та додаткові, наприклад від зміни температури навколишнього середовища, від коливання напруги живлення тощо. Часто задача ускладнюється, наприклад коли потрібно визначити похибку при непрямих вимірюваннях. При цьому потрібно підсумовувати не тільки складові похибки засобу вимірювальної техніки, а і похибки різних засобів вимірювальної техніки. Таким чином задача розрахункового підсумовування похибок є однією з основних задач як при створенні засобів вимірювальної техніки, так і при оцінці похибок результатів вимірювань.

При проведенні такого підсумовування всі складові похибки повинні розглядатися як випадкові величини, котрі приймають в кожній окремій реалізації різні значення, що ускладнює підсумовування. Задача ще більше ускладнюється коли використовується квантильна оцінка випадкової похибки. В [1] запропонована методика розрахунку похибки з заданою довірчою ймовірністю. Але введення в [2] спектру функції розподілу (СФР) і в [3] — поняття спектральних моментів функції розподілу дає можливість спростити розрахунки при підвищенні їх точності. Це обумовлене тим, що використовуючи СФР, можна спростити вирази при підсумовуванні похибок, а використання спектральних моментів замість моментів функції розподілу при квантильній оцінці випадкових похибок дає можливість отримати зручні для розрахунків вирази для СФР при їх розкладенні в ряд Тейлора. Методика підсумовування випадкових похибок за допомогою СФР приведена в [4].

2. СФР випадкових похибок з заданою довірчою ймовірністю

Використаємо вирази для моментів функції розподілу через спектральні моменти, отримані в [3].

Довірча ймовірність:

$$
\begin{aligned}
P_Д &= 2\mu_0\{\xi\}X + 2\mu_1\{\xi\}m_1\{\xi\}X + \mu_2\{\xi\}X\left(m_1^2\{\xi\} + \frac{X^2}{3}\right) + \\
&+ \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}m_1X\left(m_1^2\{\xi\} + X^2\right) + \\
&+ \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}X\left(m_1^4\{\xi\} + 2m_1^2\{\xi\}X^2 + \frac{X^4}{5}\right),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де X - похибка при довірчій ймовірності $P_Д$, $m_1\{\xi\}$ - початковий момент першого порядку $\mu_1\{\xi\}$, $\mu_2\{\xi\}$, $\mu_3\{\xi\}$, $\mu_4\{\xi\}$ - спектральні моменти функції розподілу.

Початковий момент першого порядку:

$$
\begin{aligned}
m_1\{\xi\} &= 2\mu_0\{\xi\}m_1\{\xi\}X + 2\mu_1\{\xi\}X\left(m_1^2\{\xi\} + \frac{X^2}{3}\right) + \\
&+ \mu_2\{\xi\}m_1\{\xi\}X\left(m_1^2\{\xi\} + X^2\right) + \\
&+ \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}X\left(m_1^4\{\xi\} + 2m_1^2\{\xi\}X^2 + \frac{X^4}{5}\right) + \\
&+ \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}m_1\{\xi\}X\left(m_1^4\{\xi\} + \frac{10m_1^2\{\xi\}X^2}{3} + X^4\right),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Початковий момент другого порядку:

$$
\begin{aligned}
m_2\{\xi\} &= 2\mu_0\{\xi\}X\left(m_1^2\{\xi\} + \frac{X^2}{3}\right) + \\
&+ 2\mu_1\{\xi\}m_1\{\xi\}X\left(m_1^2\{\xi\} + X^2\right) + \\
&+ \mu_2\{\xi\}X\left(m_1^4\{\xi\} + 2m_1^2\{\xi\}X^2 + \frac{X^4}{5}\right) + \\
&+ \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}m_1\{\xi\}X\left(m_1^4\{\xi\} + \frac{10}{3}m_1^2\{\xi\}X^2 + X^4\right) + \\
&+ \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}X\left(m_1^6\{\xi\} + 5m_1^4\{\xi\}X^2 + 3m_1^2\{\xi\}X^4 + \frac{X^6}{7}\right),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Початковий момент третього порядку:

$$
\begin{aligned}
m_3\{\xi\} &= 2\mu_0\{\xi\}m_1\{\xi\}X\left(m_1^2\{\xi\} + X^2\right) + \\
&+ 2\mu_1\{\xi\}m_1\{\xi\}X\left(m_1^4\{\xi\} + 2m_1^2\{\xi\}X^2 + \frac{X^4}{5}\right) + \\
&+ \mu_2\{\xi\}m_1\{\xi\}X\left(m_1^4\{\xi\} + \frac{10}{3}m_1^2\{\xi\}X^2 + X^4\right) + \\
&+ \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}X\left(m_1^6\{\xi\} + 5m_1^4\{\xi\}X^2 + 3m_1^2\{\xi\}X^4 + \frac{X^6}{7}\right) + \\
&+ \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}m_1\{\xi\}X\left(m_1^6\{\xi\} + 7m_1^4\{\xi\}X^2 + 7m_1^2\{\xi\}X^4 + X^6\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Початковий момент четвертого порядку:

$$
\begin{aligned}
m_4\{\xi\} &= 2\mu_0\{\xi\}X\left(m_1^4\{\xi\} + 2m_1^2\{\xi\}X^2 + \frac{X^4}{5}\right) + \\
&+ 2\mu_1\{\xi\}m_1\{\xi\}X\left(m_1^4\{\xi\} + \frac{10}{3}m_1^2\{\xi\}X^2 + X^4\right) + \\
&+ \mu_2\{\xi\}X\left(m_1^6\{\xi\} + 5m_1^4\{\xi\}X^2 + 3m_1^2\{\xi\}X^4 + \frac{X^6}{7}\right) + \\
&+ \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}m_1\{\xi\}X\left(m_1^6\{\xi\} + 7m_1^4\{\xi\}X^2 + 7m_1^2\{\xi\}X^4 + X^6\right) + \\
&+ \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}X\left(m_1^8\{\xi\} + \frac{28}{3}m_1^6\{\xi\}X^2 + 14m_1^4\{\xi\}X^4 + 4m_1^2\{\xi\}X^6 + \frac{X^8}{9}\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Вирази (1-5) можна записати в наступному вигляді:

$$
\begin{aligned}
P &= 2\mu_0\{\xi\}X + 2\mu_1\{\xi\}m_1X + \\
&+ \mu_2\{\xi\}K_1 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_2 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_3;
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
m_1\{\xi\} = m_1 &= 2\mu_0\{\xi\}m_1X + 2\mu_1\{\xi\}K_1 + \\
&+ \mu_2\{\xi\}K_2 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_3 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_4;
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
m_2\{\xi\} &= 2\mu_0\{\xi\}K_1 + 2\mu_1\{\xi\}K_2 + \\
&+ \mu_2\{\xi\}K_3 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_4 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_5;
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
m_3\{\xi\} &= 2\mu_0\{\xi\}K_2 + 2\mu_1\{\xi\}K_3 + \\
&+ \mu_2\{\xi\}K_4 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_5 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_6;
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
m_4\{\xi\} &= 2\mu_0\{\xi\}K_3 + 2\mu_1\{\xi\}K_4 + \\
&+ \mu_2\{\xi\}K_5 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_6 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_7,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

при наступних значеннях коефіцієнтів K_n, де математичне сподівання $m_1 = m_1\{\xi\}$:

$$K_1 = m_1^2 X + \frac{X^3}{3},\ \text{при}\ \ m_1 = 0,\quad K_1 = \frac{X^3}{3};$$

$$K_2 = m_1^3 X + m_1 X^3,\ \ \text{при}\ \ m_1 = 0,\quad K_2 = 0;$$

$$K_3 = m_1^4 X + 2m_1^2 X^3 + \frac{X^5}{5},\ \text{при}\ \ m_1 = 0,\quad K_3 = \frac{X^5}{5};$$

$$K_4 = m_1^5 X + \frac{10}{3} m_1^3 X^3 + m_1 X^5,\ \ \text{при}\ \ m_1 = 0,\quad K_4 = 0;$$

$$K_5 = m_1^6 X + 5m_1^4 X^3 + 3m_1^2 X^5 + \frac{X^7}{7},\ \text{при}\ \ m_1 = 0,\quad K_5 = \frac{X^7}{7};$$

$$K_6 = m_1^7 X + 7m_1^5 X^3 + 7m_1^3 X^5 + m_1 X^7,\ \text{при}\ \ m_1 = 0,\quad K_6 = 0;$$

$$K_7 = m_1^8 X + \frac{28}{3} m_1^6 X^3 + 14 m_1^4 X^5 + 4m_1^2 X^7 + \frac{X^9}{9},$$

$$\text{при}\ \ m_1 = 0,\quad K_7 = \frac{X^9}{9}.$$

Підставляючи (6-10) в вираз для СФР [2]

$$\begin{gathered} S_p(\omega) = P\ \ - j\omega m_1\{\xi\} - \frac{\omega^2}{2} m_2\{\xi\} + \\ + j\frac{\omega^3}{6} m_3\{\xi\} + \frac{\omega^4}{24} m_4\{\xi\} \end{gathered}, \tag{11}$$

отримаємо вираз для СФР через спектральні моменти функції розподілу:

$$\begin{aligned} S_p ={}& 2\mu_0\{\xi\}X + 2\mu_1\{\xi\}m_1 X + \mu_2\{\xi\}K_1 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_2 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_3 - j\omega m_1 - \\ & -\frac{\omega^2}{2}\left(2\mu_0\{\xi\}K_1 + 2\mu_1\{\xi\}K_2 + \mu_2\{\xi\}K_3 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_4 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_5\right) + \\ & + j\frac{\omega^3}{6}\left(2\mu_0\{\xi\}K_2 + 2\mu_1\{\xi\}K_3 + \mu_2\{\xi\}K_4 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_5 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_6\right) + \\ & + \frac{\omega^4}{24}\left(2\mu_0\{\xi\}K_3 + 2\mu_1\{\xi\}K_4 + \mu_2\{\xi\}K_5 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_6 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_7\right), \end{aligned}$$

і при $m_1 = 0$

$$\begin{aligned} S_p ={}& 2\mu_0\{\xi\}X + 2\mu_1\{\xi\}X + \mu_2\{\xi\}K_1 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_3 - \\ & -\frac{\omega^2}{2}\left(2\mu_0\{\xi\}K_1 + \mu_2\{\xi\}K_3 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_5\right) + \\ & + j\frac{\omega^3}{6}\left(2\mu_1\{\xi\}K_3 + \frac{\mu_3\{\xi\}}{3}K_5\right) + \\ & + \frac{\omega^4}{24}\left(2\mu_0\{\xi\}K_3 + \mu_2\{\xi\}K_5 + \frac{\mu_4\{\xi\}}{12}K_7\right). \end{aligned}$$

СФР через спектральні моменти функції розподілу можна визначити іншим способом. Для цього розкладемо функцію розподілу в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} p(x) \approx{}& p(m_1\{\xi\}) + (x - m_1\{\xi\})p'(m_1\{\xi\}) + \\ & + \frac{(x - m_1\{\xi\})^2}{2} p''(m_1\{\xi\}) + \\ & + \frac{(x - m_1\{\xi\})^3}{6} p'''(m_1\{\xi\}) + \frac{(x - m_1\{\xi\})^4}{24} p^{v}(m_1\{\xi\}), \end{aligned}$$

і за допомогою прямого перетворення Фур'є перейдемо до СФР:

$$S_p(\omega) = \int_{-X}^{X} p(x) e^{-j\omega x} dx\ .$$

В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} S_p(\omega) ={}& 2\Bigg\{\Bigg[\mu_0\{\xi\} - \mu_1\{\xi\}m_1 - \mu_2\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{2} - \frac{m_1^2}{2}\right) + \\ & + \mu_3\{\xi\}m_1\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{2} - \frac{m_1^2}{6}\right) + \\ & + \mu_4\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^4} - \frac{X^2}{2\omega^2} + \frac{X^4}{24} + \frac{X^2 m_1^2}{4} - \frac{m_1^2}{2\omega^2} + \frac{m_1^4}{24}\right)\Bigg] - \\ & - \frac{j}{\omega}\Bigg[\mu_1\{\xi\} - \mu_2\{\xi\}m_1 - \mu_3\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{2} - \frac{m_1^2}{2}\right) + \\ & + \mu_4\{\xi\}m_1\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{2} - \frac{m_1^2}{6}\right)\Bigg]\Bigg\}\ \ \frac{\sin\omega X}{\omega} + \\ & + 2X\Bigg\{\frac{1}{\omega}\Bigg[\mu_2\{\xi\} - \mu_3\{\xi\}m_1 - \mu_4\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{6} - \frac{m_1^2}{2}\right)\Bigg] + \\ & + j\Bigg[\mu_1\{\xi\} - \mu_2\{\xi\}m_1 - \mu_3\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{6} - \frac{m_1^2}{2}\right) - \\ & - \mu_4\{\xi\}m_1\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{6} - \frac{m_1^2}{6}\right)\frac{\cos\omega X}{\omega}\Bigg]\Bigg\}, \end{aligned}$$

або вводячи коефіцієнти

$$k_1 = \frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{2} - \frac{m_1^2}{2},\ \text{при}\ \ m_1 = 0\ \ k_1 = \frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{2};$$

$$k_2 = \frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{2} - \frac{m_1^2}{6},\ \text{при}\ \ m_1 = 0\quad k_2 = \frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{2};$$

$$k_3 = \frac{1}{\omega^4} - \frac{X^2}{2\omega^2} + \frac{X^4}{24} + \frac{X^2 m_1^2}{4} - \frac{m_1^2}{2\omega^2} + \frac{m_1^4}{24},$$

$$\text{при}\ m_1 = 0\ \ k_3 = \frac{1}{\omega^4} - \frac{X^2}{2\omega^2} + \frac{X^4}{24};$$

$$k_4 = \frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{6} - \frac{m_1^2}{2},\ \text{при}\ \ m_1 = 0\quad k_4 = \frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{6};$$

$$k_5 = \frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{6} - \frac{m_1^2}{6},\ \text{при}\ \ m_1 = 0\quad k_5 = \frac{1}{\omega^2} - \frac{X^2}{6},$$

спростимо цей вираз:

$$\begin{aligned} & S_p(\omega) = \\ & = 2\Big\{\big[\mu_0\{\xi\} - \mu_1\{\xi\}m_1 - \mu_2\{\xi\}k_1 + \mu_3\{\xi\}m_1 k_2 + \mu_4\{\xi\}k_3\big] - \\ & - \frac{j}{\omega}\big[\mu_1\{\xi\} - \mu_2\{\xi\}m_1 - \mu_3\{\xi\}k_1 + \mu_4\{\xi\}m_1 k_2\big]\Big\}\frac{\sin\omega X}{\omega} + \\ & + 2X\Big\{\frac{1}{\omega}\big[\mu_2\{\xi\} - \mu_3\{\xi\}m_1 - \mu_4\{\xi\}k_4\big] + \\ & + j\big[\mu_1\{\xi\} - \mu_2\{\xi\}m_1 - \mu_3\{\xi\}k_4 - \mu_4\{\xi\}m_1 k_5\big]\Big\}\frac{\cos\omega X}{\omega}. \end{aligned}$$

При $m_1\{\xi\} = 0$

$$S_p(\omega)=$$
$$=2\left\{\left[\mu_0\{\xi\}-\mu_2\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{X^2}{2}\right)+\mu_4\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^4}-\frac{X^2}{2\omega^2}+\frac{X^4}{24}\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{j}{\omega}\left[\mu_1\{\xi\}-\mu_3\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{X^2}{2}\right)\right]\right\}\frac{\sin\omega X}{\omega}+$$
$$+2X\left\{\frac{1}{\omega}\left[\mu_2\{\xi\}-\mu_4\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{X^2}{6}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+j\left[\mu_1\{\xi\}-\mu_3\{\xi\}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{X^2}{6}\right)\right]\right\}\frac{\cos\omega X}{\omega},$$

або з застосуванням коефіцієнтів k_n

$$S_p=2\left[\left(\mu_0\{\xi\}-\mu_2\{\xi\}k_1+\mu_4\{\xi\}k_3\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{j}{\omega}\left(\mu_1\{\xi\}-\mu_3\{\xi\}k_1\right)\right]\frac{\sin\omega X}{\omega}+$$
$$+2X\left[\frac{1}{\omega}\left(\mu_2\{\xi\}-\mu_4\{\xi\}k_4\right)+j\left(\mu_1\{\xi\}-\mu_3\{\xi\}k_5\right)\right]\frac{\cos\omega X}{\omega}.$$

Розглянемо ще один варіант виразу для СФР, в якому прямо не використовуються похибка X при довірчій ймовірності $P_Д$, але вона враховується в виразі СФР. Знайдемо початкові спектральні моменти виходячи з наступного виразу для початкового спектрального моменту [3] з урахуванням виразу для СФР (11):

$$\mu_n\{\xi\}=\left(\frac{d^n p(x)}{dx^n}\right)_{x=m_1}=\frac{j^n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^n S_p(\omega)d\omega .$$

Тоді, інтегруючи в діапазоні частот від $-W$ до Ω, де точність апроксимації буде ще досить високою

$$\mu_0\{\xi\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}S_p(\omega)d\omega\approx$$
$$\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\left(P_Д-jm_1\{\xi\}\omega-\frac{m_2\{\xi\}}{2}\omega^2+j\frac{m_3\{\xi\}}{6}\omega^3+\frac{m_4\{\xi\}}{24}\omega^4\right)d\omega=$$
$$=\frac{P_Д}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}d\omega-\frac{jm_1\{\xi\}}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\omega d\omega-\frac{m_2\{\xi\}}{4\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\omega^2 d\omega+\frac{jm_3\{\xi\}}{12\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\omega^3 d\omega+$$
$$+\frac{m_4\{\xi\}}{48\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\omega^4 d\omega=\frac{P_Д}{\pi}\Omega-\frac{m_2\{\xi\}}{6\pi}\Omega^3+\frac{m_4\{\xi\}}{120\pi}\Omega^5,$$

аналогічно

$$\mu_1\{\xi\}=\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega S_p(\omega)d\omega\approx\frac{m_1\{\xi\}}{3\pi}\Omega^3-\frac{m_3\{\xi\}}{30\pi}\Omega^5 ;$$
$$\mu_2\{\xi\}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 S_p(\omega)d\omega\approx-\frac{P_Д}{3\pi}\Omega^3+ \quad ;$$
$$+\frac{m_2\{\xi\}}{10\pi}\Omega^5-\frac{m_4\{\xi\}}{168\pi}\Omega^7$$
$$\mu_3\{\xi\}=-\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega S_p(\omega)d\omega\approx\frac{m_3\{\xi\}}{42\pi}\Omega^7-\frac{m_1\{\xi\}}{5\pi}\Omega^5 ;$$
$$\mu_4\{\xi\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^4 S_p(\omega)d\omega\approx\frac{P_Д}{5\pi}\Omega^5-\frac{m_2\{\xi\}}{14\pi}\Omega^7+\frac{m_4\{\xi\}}{216\pi}\Omega^9 .$$

З отриманих виразів знайдемо моменти функції розподілу:

$$P_Д=\frac{15}{64}\frac{\pi\left(15\mu_0\{\xi\}+70\mu_2\{\xi\}+63\mu_4\{\xi\}\right)}{\Omega^5};$$
$$m_1\{\xi\}=\frac{15}{4}\frac{\left(5\mu_1\{\xi\}\Omega^2+7\mu_3\{\xi\}\right)}{\Omega^5};$$
$$m_2\{\xi\}=\frac{105}{16}\frac{\pi\left(5\mu_0\{\xi\}\Omega^4+42\mu_2\{\xi\}\Omega^2+45\mu_4\{\xi\}\right)}{\Omega^7};$$
$$m_3\{\xi\}=\frac{105}{2}\frac{\pi\left(3\mu_1\{\xi\}\Omega^2+5\mu_3\{\xi\}\right)}{\Omega^7};$$
$$m_4\{\xi\}=\frac{945}{8}\frac{\pi\left(3\mu_0\{\xi\}\Omega^4+30\mu_2\{\xi\}\Omega^2+35\mu_4\{\xi\}\right)}{\Omega^9}.$$

Підставивши ці вирази в вираз для СФР (11), отримаємо

$$S_p(\omega)=\frac{15\pi}{64\Omega^5}\left[\mu_0\{\xi\}\left(15-70\omega^2\Omega^2+63\omega^4\right)+\right.$$
$$+\frac{14}{\Omega^2}\mu_2\{\xi\}\left(5\Omega^2-42\omega^2\Omega^2+45\omega^4\right)+$$
$$\left.+\frac{7}{\Omega^4}\mu_4\{\xi\}\left(9\Omega^4-2\omega^2\Omega^2+105\omega^4\right)\right]-$$
$$-j\frac{5\omega}{4\Omega^7}\left[3\mu_1\{\xi\}\Omega^2\left(5\Omega^2-7\omega^2\right)+\mu_3\{\xi\}\left(21\Omega^2-35\omega^2\right)\right].$$

При $\mu_1\{\xi\}=\mu_3\{\xi\}=0$ вираз спрощується:

$$S_p(\omega)=\frac{15\pi}{64\Omega^5}\left[\mu_0\{\xi\}\left(15-70\omega^2\Omega^2+63\omega^4\right)+\right.$$
$$+\frac{14}{\Omega^2}\mu_2\{\xi\}\left(5\Omega^2-42\omega^2\Omega^2+45\omega^4\right)+$$
$$\left.+\frac{7}{\Omega^4}\mu_4\{\xi\}\left(9\Omega^4-2\omega^2\Omega^2+105\omega^4\right)\right].$$

Звернемо увагу, що для багатьох функцій розподілу непарні спектральні моменти функції розподілу дорівнюють нулю. Це пояснюється наступним. Якщо спектральний момент першого порядку не дорівнює нулю, то, як відомо з теорії сигналів [5], спектр сигналу повинен бути зміщеним відносно нуля, що відповідає складним сигналам, наприклад модульованим. Функції розподілу такого вигляду є малоймовірними. Якщо спектральний момент третього порядку відрізняється від нуля, то СФР буде несиметричним. Цей випадок також є малоймовірним. Отже вирази для СФР, отримані вище, практично будуть більш простими, тому що в більшості випадків $\mu_1\{\xi\}=\mu_3\{\xi\}=0$.

В таблиці приведені значення спектральних моментів деяких функцій розподілу, котрі часто мають місце в реальних випадкових процесах. Як видно з таблиці, непарні спектральні моменти дійсно частіше за все дорівнюють нулю.

Як показано в [4] підсумовування випадкових похибок зручно здійснювати за допомогою СФР, але при квантовій оцінці випадкових похибок ці вирази ускладнюються. Тому використання отриманих в цій роботі виразів для СФР значно спростить задачу.

При спрощеній оцінці випадкових похибок, як відомо [6], підсумовують дисперсії. Але дисперсія при квантильній оцінці випадкових похибок змінюється в залежності від довірчої похибки при заданій довірчій ймовірності. Тому це ускладнює задачу. З

(8) можна отримати вираз для дисперсії, прирівнюючи математичне сподівання m_1 нулю. Нагадаємо, що дисперсія — це центральний момент другого порядку.

Тому

$$D = M_2\{\xi\} = \frac{2}{3}\mu_0\{\xi\}X^3 + \mu_2\{\xi\}\frac{X^5}{5} + \mu_4\{\xi\}\frac{X^7}{84}.$$

Аналогічний вираз буде при підсумовуванні трьох і більше похибок. В цих випадках буде підсумовуватися відповідна кількість спектральних моментів кожного порядку.

В [4] показано, що для підвищення точності розрахунку сумарної похибки потрібно підсумовувати не тільки дисперсії, а також центральні моменти функції

Таблиця

Закон (щільність) розподілу $p(x)$	Спектральні моменти функції розподілу				
	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
Гауса $\frac{e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	0	$-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}$	0	$\frac{3}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}$
Коші $\frac{h}{\pi\left[h^2+(x-m_1)^2\right]}$ $h>0$	$\frac{1}{\pi h}$	0	$-\frac{2}{\pi h^3}$	0	$\frac{24}{\pi h^5}$
Лапласа $\frac{1}{2}e^{-\lvert x-m_1\rvert}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Арксинусоїдальний $\begin{cases} 0 & \text{при } -a>x>a \\ \frac{1}{\pi\sqrt{a^2-(x-m_1)^2}} & \text{при } -a\le x\le a \end{cases}$	$\frac{1}{\pi\sqrt{a^2}}$	0	$\frac{1}{\pi^3\sqrt[3]{a^4}}$	0	$\frac{9}{\pi\sqrt[5]{a^4}}$
Рівномірний $\frac{1}{b-a}$; $a<x<b$.	$\frac{1}{b-a}$	0	0	0	0
Подвійний показниковий: максимальних значень $\frac{\exp\left[\frac{m_1-x}{\sigma}-\exp\left(\frac{m_1-x}{\sigma}\right)\right]}{\sigma}$	$\frac{1}{e\sigma}$	0	$-\frac{1}{e\sigma^3}$	$\frac{1}{e\sigma^4}$	$\frac{2}{e\sigma^5}$
мінімальних значень $\frac{\exp\left[-\frac{m_1-x}{\sigma}-\exp\left(-\frac{m_1-x}{\sigma}\right)\right]}{\sigma}$	$\frac{1}{e\sigma}$	0	$\frac{1}{e\sigma^3}$	$-\frac{1}{e\sigma^4}$	$\frac{2}{e\sigma^5}$
Двомодальний $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(x-a-m_1)^2}{2\sigma^2}}+e^{-\frac{(x+a-m_1)^2}{2\sigma^2}}\right]$	$\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}$	0	$\frac{(a^2-\sigma^2)e^{-\frac{2a^2}{\sigma^2}}}{\sigma^4\sqrt{2\pi}}$	0	$\frac{(3\sigma^4+a^4-6a^2\sigma^2)e^{-\frac{2a^2}{\sigma^2}}}{\sigma^8\sqrt{2\pi}}$

При підсумовуванні двох випадкових похибок сумарна дисперсія

$$\begin{aligned} D\{\xi,\eta\} &= D\{\xi\}+D\{\eta\} = \\ &= \frac{2}{3}\left(\mu_0\{\xi\}X_\xi^3+\mu_0\{\eta\}X_\eta^3\right)+ \\ &+\frac{1}{5}\left(\mu_2\{\xi\}X_\xi^5+\mu_2\{\eta\}X_\eta^5\right)+ \\ &+\frac{1}{84}\left(\mu_4\{\xi\}X_\xi^7+\mu_4\{\eta\}X_\eta^7\right), \end{aligned} \tag{12}$$

де ξ та η позначають різні випадкові процеси (в нашому випадку випадкові похибки), дисперсії котрих потрібно підсумувати.

розподілу третього та четвертого порядків і приведені відповідні формули розрахунку цих моментів. Підставляючи в них відповідно (9) та (10) при $m_1\{\xi\}=0$, по аналогії з (12) можна отримати вирази для сумарних центральних моментів третього та четвертого порядків.

Висновки

Використання спектральних моментів функції розподілу в виразах для СФР дозволяє отримати новий зручний інструмент для підсумовування випадкових процесів з квантильною їх оцінкою, наприклад для підсумовування випадкових похибок.

Отримано три варіанти виразів СФР через спектральні моменти функції розподілу різними шляхами.

В перших двох варіантах в виразах використовується значення похибки при заданій довірчій ймовірності, а в третьому — діапазон частот СФР, де точність апроксимації буде ще досить високою.

Варіант виразу СФР для розрахунку може бути вибраний в залежності від його особливостей. Вираз першого варіанту структури виразу СФР має чисто алгебраїчну форму. В другому варіанті використовуються тригонометричні функції, третій варіант не зв'язує СФР з довірчою похибкою, але має більш просту структуру.

При підсумовуванні двох випадкових похибок сумарна дисперсія визначається як сума сум парних спектральних моментів функції розподілу, кожний з яких помножений на довірчу похибку, що відповідає цьому випадковому процесу, при заданій довірчій ймовірності, в степенях три, п'ять і сім відповідно порядку спектрального моменту з ваговими коефіцієнтами $2/3$, $1/5$ та $1/84$ також відповідно порядку спектрального моменту.

Аналогічно можна розрахувати також центральні моменти функції розподілу третього та четвертого порядків.

Література

1. В.М. Майстренко. Розрахунок похибки із заданою довірчою ймовірністю // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2008". – № 36. – С. 157 – 167.
2. В.М. Майстренко. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2003". – № 26. – С. 145 – 150.
3. В.М. Майстренко. Спектральні моменти функції розподілу // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2009". – № 38. – С. 162 – 170.
4. В.М. Майстренко. Підсумовування випадкових похибок вимірювань // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2007". – № 34. – С. 161 – 167.
5. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: «Советское радио», 1971. – 671 с.
6. П.В. Новицкий, И.А. Зограф. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 302 с.
7. В.М. Майстренко. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція „Приладобудування – 2004: Стан і перспективи" 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 137 – 138.
8. В.М. Майстренко. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2004". – № 27. – С. 163 – 170.
9. В.М. Майстренко. Спектри двомірних функцій розподілу випадкових процесів// Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2005". – № 29. – С. 160 – 168.
10. В.М. Майстренко. Спектр функції розподілу при квантильній оцінці випадкової похибки // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2008". – № 35. – С. 160 – 165.
11. В.М. Майстренко. Залежні функції розподілу випадкових процесів// Методи та прилади контролю якості. – 2005. – №12 – С. 77 – 80.
12. В.М. Майстренко. Енергетичний сигнал та його особливості // Методи та прилади контролю якості. – 2005. – №15 – С. 23 – 27.
13. В.М. Майстренко. Метод оцінки взаємодії випадкових некорельованих перешкод і сигналу в системі передачі інформації // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2004". – № 28. – С. 155 – 162.
14. В.М. Майстренко. Зв'язок спектра функції розподілу стаціонарного випадкового процесу з енергетичним спектром // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут", „Приладобудування – 2005". – № 30. – С. 157 – 166.
15. Б.Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: «Советское радио», 1974. – 549 с.
16. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей. – М.: «Наука», 1969. – 573 с.