тематически и обрабатывать на компьютерах для обеспечения пространственно-планировочных решений в условиях неопределенности.

Полученные результаты являются основой для построения механизма нечеткого вывода экспертной системы.

Литература

1. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьев и др. – М.: Радио и связь, 1989. – 394 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К. А.. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов.- 13-е изд.- М.: Наука, 1986. – 544 с.
3. Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Коровин С.Я Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1990. – 272 с.
4. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
5. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. – М.: Физматлит, 2002.
6. Леоленков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб., 2003.
7. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М., 2004.
10. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // IEEE Transactions on Computers, vol. 43, No. 11, November 1994. – P. 1329-1333.
11. Cordon O., Herrera F., A General study on genetic fuzzy systems // Genetic Algorithms in engineering and computer science, 1995. – P. 33-57.

УДК 004.942

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

И.А. Пилькевич
Доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой
Кафедра мониторинга окружающей природной среды*
Контактный тел. (0412) 41-56-86

А.В. Маевский
Соискатель*
Контактный тел. (097) 403-14-96
*Житомирский национальный агроэкологический университет
бульвар Старый, 7, г. Житомир, Украина, 10008

Розроблено узагальнену логістичну модель динаміки популяцій, яка отримана як частковий випадок універсальної моделі екологічної системи. Модель, що пропонується, отримана теоретичним шляхом на основі положень системології

Ключові слова: узагальнена логістична модель, динаміка популяцій

Разработана обобщенная логистическая модель динамики популяций, полученная как частный случай универсальной модели экологической системы. Предлагаемая математическая модель получена теоретическим путем на основе положений системологии

Ключевые слова: обобщенная логистическая модель, динамика популяций

It develops the generalized logistic model of population dynamics, obtained as a special case of the universal model of the ecological system has been worked out. The proposed mathematical model has been obtained theoretically on the basis of systemathology principles

Key words: generalized logistic model, the dynamics of population

1. Введение

Для понимания механизмов функционирования и решения вопросов использования популяций большое значение имеют сведения об их структуре. Закономерное изменение числа особей в популяции данного вида на протяжении года (сезонная) или ряда лет (многолетняя) определяется изменениями рождаемости (плодовитости) и смертности особей, а также их перемещением (эмиграцией или иммиграцией).

На размножение и выживание животных оказывают влияние как действующие, так и предшествующие условия существования. Известно, что на земном шаре существует радиационный фон, который обусловлен ионизирующим излучением радиоактивных элементов, находящихся в земной коре, и космическим излучением (природный фон), а также радиацией антропогенного происхождения.

В процессе эволюции все живые организмы находились под влиянием естественного фона и были вынуждены адаптироваться к этому фактору.

Однако, наибольшая в истории человечества ядерная авария на АЭС в Чернобыле, которая произошла 26 апреля 1986 года, является значительной экологической катастрофой с точки зрения последствий ее для природы. Вклад Чернобыльской катастрофы в суммарный радиационный фон превысил все другие источники излучения в окружающей среде.

Оценить интегральное влияние первичных и вторичных радиоэкологических эффектов в условиях естественных популяций тяжело, так как они многовекторные и неоднозначные. Единственным показателем состояния популяций в таких условиях может быть общее состояние их численности.

Изучение закономерностей динамики численности животных необходимо для создания научных основ рационального использования полезных животных и борьбы с вредными насекомыми. При этом используются математические методы, в частности, моделирование. Поэтому вопрос разработки адекватного математического аппарата для изучения динамики популяций является актуальным.

2. Анализ существующих моделей динамики популяций

Все существующие модели популяций делятся на два класса [1]:

1) модели с дискретным размножением особей в популяции;

2) модели с непрерывным размножением особей в популяции.

Если численность популяции в соответствующие моменты времени увеличивается скачком, то модели называются дискретными ($N(t_0+0)=N(t_0-0)+\Delta N$, где t_0 – момент времени появления нового поколения). Такой способ размножения характерен для высших организмов, живущих в естественных условиях.

Если появление новых поколений не синхронное и не периодическое, то модель динамики популяций описывается функцией времени $N(t)$.

В зависимости от факторов, которые учитываются при описании динамики популяций, модели делятся на [2]:

– модели динамики популяций с низкой смертностью. В этом случае считается, что условия существования популяции идеальны и среда не влияет на популяцию, а также отсутствует конкуренция. Поэтому наблюдается неограниченное экспоненциальное увеличение численности популяции;

– модели динамики популяций с внутривидовой конкуренцией. Влияние внутривидовой конкуренции в природе приводит к уменьшению роста численности особей при большой плотности популяций. В этом случае экспоненциальный рост стает более плавным и в пределе становится линейным;

– модель динамики популяций с учетом смертности. Учет одной только рождаемости и ее снижение за счет конкуренции не может привести к ограничению численности популяции. В этом случае модель нереалистическая.

Для улучшения реалистичности модели в ней необходимо учитывать смертность в период между моментами размножениями.

Более адекватные модели популяций учитывают все три фактора, рассмотренные ранее. Такие модели называются реалистическими.

В 1973 году Смит и Слаткин предложили усовершенствовать реалистическую модель (модель Смита и Слаткина).

Такая модель использовалась для моделирования ситуации, когда интенсивность гибели вследствие конкуренции стремится к насыщению с ростом плотности популяции или если наблюдается постепенное увеличение интенсивности гибели. Недостатком таких моделей является то, что они применимы только для описания популяций, в которых рождение новых особей синхронное и достаточно периодическое. Отсутствие периодичности приводит к тому, что гибель особей в интервалах между точками размножения является функцией времени. А этот факт не учтен в модели Смита и Слаткина.

Как известно, внутривидовая конкуренция не играет решающей роли в восстановлении вида, а только усиливает интенсивность отбора особей конкретного вида. Поэтому такие модели не адекватно описывают динамику популяций.

Наиболее адекватной моделью популяций в настоящее время является логистическая модель системы с междувидовой конкуренцией Лотки-Вольтерра. При междувидовой конкуренции отбор направлен на усиление разницы между конкурирующими видами и занятие ими разных экологических ниш. Однако и эта модель не в полном объеме отображает потери, связанные с повышенным радиационным фоном. Для учета этого фактора в работе разработана обобщенная логистическая модель динамики популяций, в основе которой лежит универсальная модель экологической системы.

3. Обобщенная логистическая модель динамики популяций

Общее логистическое уравнение динамики популяций, полученное как частный случай универсальной модели экологической системы [3], описывается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$(1+a_1N)\frac{dN}{dt}=\varphi N-\frac{N^2}{a_0}, \qquad (1)$$

где N – количество особей в популяции; φ – потенциал экспоненциального роста; a_0, a_1 – параметры потерь, которые сдерживают экспоненциальный рост популяций.

Уравнение (1) отличается от уравнения Ферхюльста $\frac{dN}{dt}=\varphi^0 N-\frac{N^2}{a_0}$ наличием нелинейного элемента $a_1N\frac{dN}{dt}$.

3.1. Общее решение уравнения динамики популяций

При решении уравнения динамики популяций используем подстановку $b_0 = a_0\varphi$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$(1+a_1N)\frac{dN}{dt} = \varphi N\left(1-\frac{N}{b_0}\right). \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет аналитическое решение в виде трансцендентного уравнения [4]

$$N(t) = c\left(b_0 - N(t)\right)^{1+G} e^{\varphi t}, \qquad (3)$$

где c – параметр начального значения; $G = a_1b_0 = a_1a_0\varphi$ – интегральный показатель потерь, который равен произведению всех параметров уравнения (1).

Выражение (3) в неявном виде описывает обобщенную логистическую функцию роста, которая при $t \to \infty$ асимптотически стремится к пороговому значению $b_0 = a_0\varphi$. Обобщение проявляется в том, что при $a_1 = 0$ уравнение (2) сводится к уравнению Ферхюльста, а его решение (3) – к простой логистической функции $N(t) = b_0ce^{\varphi t}/\left(1+ce^{\varphi t}\right)$. Это дает основание считать уравнение (2) – обобщенным логистическим уравнением, а его решение (3) – обобщенной логистической функцией. С другой стороны, расширение логистической модели обеспечивается за счет включения в уравнение Ферхюльста дополнительного элемента $a_1N\frac{dN}{dt}$.

Для интерпретации параметров потерь перепишем уравнение (2) в виде $\frac{dN}{dt} = \varphi N - n^-$, где $n^- = n_1^- + n_0^- = a_1N\frac{dN}{dt} + N^2/a_0$ – поток потерь численности популяции. Элемент $n_0^- = N^2/a_0$, представленный в виде $n_0^- = \varphi_0^-N$ (где $\varphi_0^- = \frac{1}{a_0}\int_0^T ndt$ – потенциал емкостных потерь, $n = \frac{dN}{dt}$), описывает потери, пропорциональные количеству популяции в экологической нише, а параметр a_0 – емкость ниши, которая ограничивает возможность накопления популяции асимптотическим порогом $b_0 = a_0\varphi$. Элемент $n_1^- = a_1N\frac{dN}{dt}$ представим в виде $n_1^- = \varphi_1^-N$, где $\varphi_1^- = a_1n$ – потенциал резистивных потерь. Этот элемент описывает потери, пропорциональные скорости изменения популяции, а параметр a_1 – сопротивление среды, сдерживающее рост популяции.

При больших значениях емкости ниши $a_0 \to \infty$ емкостные потери $n_0^- = N^2/a_0$ стремятся к нулю и обобщенное логистическое уравнение вырождается в экспоненциальное уравнение вида:

$$(1+a_1N)\frac{dN}{dt} = \varphi N. \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет аналитическое решение в виде трансцендентного уравнения [5]:

$$N(t)e^{a_1N(t)} = ce^{\varphi t}. \qquad (5)$$

Выражение (5) в неявном виде описывает обобщенную экспоненциальную функцию роста, которая учитывает потери, связанные с торможением роста. Обобщение проявляется в том, что при $a_1 = 0$ уравнение (4) сводится к простому экспоненциальному уравнению $\frac{dN}{dt} = \varphi N$, а его решение (5) – к простой экспоненциальной функции $N(t) = N(0)e^{\varphi t}$.

С другой стороны, расширение экспоненциальной модели обеспечивается за счет включения дополнительного элемента $a_1N\frac{dN}{dt}$. При значениях $a_1N >> 1$ уравнение (4) вырождается в уравнение $\frac{dN}{dt} \approx \varphi^0/a_1$, которое задает асимптоту в виде линейной функции $N = \left(\varphi^0/a_1\right)t$. Из этого следует, что при больших значениях сопротивления среды $a_1 >> 0$ функция (5) асимптотически стремится к прямой, а линеаризация экспоненциальной функции отражает эффект больших резистивных потерь.

Явную форму обобщенной логистической функции (3) можно получить, решая соответствующее (1) конечно-разностное уравнение. Дискретная обобщенная логистическая функция в рекуррентной форме имеет вид:

$$N_{k+1} = \left[1+\varphi_0\left(\frac{1}{1+a_1N_k} - \frac{N_k/b_0}{1+a_1N_k}\right)\right]N_k. \qquad (6)$$

При больших значениях емкости $a_0 \to \infty$ логистическая функция (6) вырождается в дискретную экспоненциальную функцию

$$N_{k+1} = \left(1+\varphi_0\frac{1}{1+a_1N_k}\right)N_k. \qquad (7)$$

При больших значениях $a_1N >> 1$ экспоненциальная функция (7) вырождается в линейную функцию вида $N_{k+1} = N_k + \varphi_0/a_1$.

3.2. Частное решение уравнения динамики популяций

Анализ (6) показывает, что для построения математической модели динамики популяции конкретного вида необходимо экспериментально определить параметры модели φ_0, a_1 и b_0. Аналитическое решение системы уравнений, основанных на модели (6), относительно искомых параметров модели дает результат:

$$\varphi_0 = \frac{\Delta N_{21}\left[\left(1-\frac{N_4}{N_3}\right)N_2 - \left(1-\frac{N_3}{N_2}\right)N_3\right] - N_1\left[\left(1-\frac{N_4}{N_3}\right)\Delta N_{32} - \left(1-\frac{N_3}{N_2}\right)\Delta N_{43}\right] - \left(1-\frac{N_2}{N_1}\right)\left[N_3\Delta N_{32} - N_2\Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\Delta N_{32} - N_1\left(\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right) - \left(N_3\Delta N_{32} - N_2\Delta N_{43}\right)};$$

$$a_1 = \frac{\left(1-\frac{N_2}{N_1}\right)\Delta N_{32} - N_1\left[\left(1-\frac{N_4}{N_3}\right) - \left(1-\frac{N_3}{N_2}\right)\right] - \left[N_3\left(1-\frac{N_3}{N_2}\right) - N_2\left(1-\frac{N_4}{N_3}\right)\right]}{\Delta N_{21}\Delta N_{32} - N_1\left(\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right) - \left(N_3\Delta N_{32} - N_2\Delta N_{43}\right)}; \qquad (8)$$

$$b_0 = \frac{\Delta N_{21}\left[\left(1-\frac{N_4}{N_3}\right)N_2 - \left(1-\frac{N_3}{N_2}\right)N_3\right] - N_1\left[\left(1-\frac{N_4}{N_3}\right)\Delta N_{32} - \left(1-\frac{N_3}{N_2}\right)\Delta N_{43}\right] - \left(1-\frac{N_2}{N_1}\right)\left[N_3\Delta N_{32} - N_2\Delta N_{43}\right]}{\Delta N_{21}\left[\left(1-\frac{N_4}{N_3}\right) - \left(1-\frac{N_3}{N_2}\right)\right] - \left(1-\frac{N_2}{N_1}\right)\left[\Delta N_{43} - \Delta N_{32}\right] - \left[\left(1-\frac{N_4}{N_3}\right)\Delta N_{32} - \left(1-\frac{N_3}{N_2}\right)\Delta N_{43}\right]},$$

где $\Delta N_{mn} = N_m - N_n$, $m, n = 1, 2, 3.$

Таким образом, для математического моделирования динамики популяции конкретного вида животного мира (растений или микроорганизмов) необходимо используя (8) определить постоянные параметры обобщенной логистической модели, воспользовавшись данными мониторинга соответствующего вида популяций (N_1, N_2, N_3, N_4).

Выводы и практические рекомендации

1. Любая популяция растений, животных и микроорганизмов – это совершенная живая система, способная к саморегуляции, восстановлению своего динамического равновесия. Но она существует не изолировано, а совместно с популяциями других видов, образуя биоценозы. Поэтому при математическом моделировании динамики популяций необходимо учитывать вредное влияние множества факторов.

2. Среди моделей динамики популяций в математической экологии наибольшее распространение получила логистическая функция Ферхюльста (1838 г.), которая используется для описания как поведения популяций, так и их взаимодействия, например, в модели Лотки-Вольтерра. К недостаткам логистической функции можно отнести ее эвристическое происхождение и неполное отображение потерь.

3. Развитие логистической модели динамики популяций достигается за счет дополнения нелинейным элементом, который описывает потери, связанные с сопротивлением среды росту популяции. Обобщенная логистическая функция, полученная теоретическим путем, отражает емкостные и резистивные потери и может использоваться для описания как роста популяций, так и их взаимодействия.

4. Для верификации обобщенной математической модели динамики популяций необходимо, воспользовавшись данными мониторинга соответствующего вида популяции, с помощью системы (8) оценить постоянные параметры модели. Полученная математическая модель динамики популяций будет адекватно описывать все факторы, влияющие на динамику развития изучаемой популяции.

Литература

1. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підруч.] / В.В.Богобоящий, К.Р.Чурбанов, П.Б.Палій, В.М.Шмандій. – К.: Центр навч. л-ри, 2004. – 216 с.
2. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології: навч. посіб. [для студ. екол. і біол. спец. вищих навч. закладів] / В.Ф.Лаврик. – К.: Вид. дім „КМ. Академія", 2002. – 203 с.
3. Грабар І.Г. Універсальна модель систем: методологічний аспект / І.Г.Грабар, Ю.О.Тимонін, Ю.Б.Бродський // Вісн. ЖНАЕУ: наук.-теорет. зб. 2009. – №1. – С. 358-366.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э.Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
5. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 544 с.