9. А.С. Мардемов, В.Г. Серяпин. Определение комплекного показателя преломления в ионвнедренных слоях из эллипсометрических измерений // Физика и техника полупроводников. – 1989. – ТВ, №12., с.2347-2353.
10. J.B. Theeten, D.E. Aspnes, Simonfut F., Erman. M. Non-destructure analysis of Si3N4/SiO2/Si structures using spectroscopic ellipsometry. – J. Appl Phys. – 1981, v.52(II). – p. 6788-6797.
11. Novosyadly S. Amplitude-phase-shift masks for protection litography of submicron technology. Procudings of the VII-th International Conference CADSM 2003. – Lviv-Slavske, Ukraine., p.66-68.
12. Позитивне рішення експертизи винаходів по мікроелектроніці. №94061566 від 9.03.93 Спосіб виготовлення напівпровідникових приладів / Новосядлий С.П., Біровий О.Л., Гутак І.М., Масовий Н.П. / №13551 від 13.06.94, №8 від 29.12.94.
13. Новосядлий С.П. Висококонтрастний фоторезист для субмікронної технології ВІС// Фотоелектроніка – 2000 - №9. – с.37-42.
14. Новосядлий С.П. Аналітичні фізико-хімічні методи аналізу і контролю в системній технології ВІС// Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 1999. - №3. – с.30-38.
15. Новосядлий С.П. Технологічний САПР на основі ТС// Фізика і хімія твердого тіла. – 2002. – т.3, №1., с.179-189.

УДК 629.7.054

# ДИФРАКЦІЯ ПРОНИКНИХ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ НА КОЛОВІЙ ПЛАСТИНІ

**Т.М. Лозовик**
Кандидат фізико-математичних наук. доцент
Кафедра математичної фізики
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»
пр-т Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056
Контактный тел.: (044) 454-94-51
E-mail: karachun 1@gala.net

***Будується розрахункова модель пружної взаємодії проникного під Головний Аеродинамічний Обтікач ракети-носія акустичного випромінювання з коловими пластинчастими елементами підвісу приладів інерціальної навігації. Аналізується стаціонарна і нестаціонарна взаємодія***
***Ключові слова: колова пластина, плоска хвиля, хвильове число***

***Строится расчетная модель упругого взаимодействия проникающего под Головной Аэродинамический Обтекатель ракеты-носителя акустического излучения с круговыми пластинчатыми элементами подвеса приборов инерциальной навигации. Анализируется стационарное и нестационарное взаимодействие***
***Ключевые слова: круглая пластина, плоская волна, волновое число***

***We construct the design model of elastic interaction of penetrating under Head Aerodynamic Fairing of the launch vehicle acoustic radiation with circular plate elements of the suspension of devices of inertial navigation. The stationary and nonstationary interaction are being analyzed***
***Key words: circular plate, a plane wave, the wave number***

## 1. Вступ

Дослідження відносяться до області прикладної механіки і присвячені вивченню природи і опису вимушеного згинного руху плоских колових фрагментів підвісу гіроскопічних приладів під дією проникаючого акустичного випромінювання. Високий рівень пройдешнього надлишкового тиску – вище 140 дБ – слугує докорінній зміні властивостей механічних систем підвісу. Йдеться про те, що вони за таких рівнів переходять до розряду імпедансних систем і потребують відповідної зміни розрахункових моделей взаємодії і переходу до систем з розподіленими параметрами, або дискретно неперервними параметрами.

Такий підхід створює умови для більш детального вивчення явища і з'ясовування умов виникнення особливостей резонансного типу – хвильове співпадання (просторовий резонанс), просторово-частотний резонанс, частотний резонанс. Наявність таких даних дає можливість прогнозування ризик виникнення додаткових похибок інерціального обладнання і погіршення технічних характеристик літальних апаратів. Включаючи також можливість виникнення нештатних ситуацій в режимі їх експлуатаційного використання.

## 2. Аналіз стану проблеми і постановка задачі досліджень

Проникаюче під Головний Аеродинамічний Обтікач акустичне випромінювання високої інтенсивності певним чином діє на механічні системи командно-вимірювального комплексу ракети-носія [1]. Результатом цього впливу слугують пружні коливання поверхні, які в своїй сукупності призводять до виникнення похибок приладів інерціальної навігації [2].

Якісна і кількісна оцінка цього явища стає можливою за умови з'ясування природи явища і його аналітичного огляду.

За мету дослідження обрано вивчення закономірностей згинного руху плоских колових фрагментів підвісу гіроскопа.

## 3. Одновимірна задача пружної взаємодії пластини з акустичним променем

Скористуємося наявними результатами для осмислення вивчаємого явища.

Отже, нехай на пластину діє стаціонарна плоска звукова хвиля виду

$f(x,y)=\frac{1}{D}P_0\exp ik_0(\alpha x-\beta y)$,

де $\alpha,\beta$ – сталі коефіцієнти; $k_0$ – хвильове число; $D$ – циліндрична жорсткість пластини; $P_0$ – амплітуда звукового тиску.

Позначимо

$x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$; $\frac{\alpha}{\gamma}=\cos\varepsilon$; $\frac{\beta}{\gamma}=\sin\varepsilon$.

Тоді

$$\overline{f(r)}=g(r)=\frac{1}{2\pi D}P_0\int_0^{2\pi}\exp i\gamma k_0\cos(\varphi+\varepsilon)d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi D}P_0\int_0^{2\pi}\exp i\gamma k_0\cos\varphi d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi D}P_0\int_0^{2\pi}\left\{J_0(\gamma k_0 r)+2\sum_{n=1}^{+\infty}i^n J_n(\gamma k_0 r)\cos n\varphi\right\}d\varphi= \qquad (1)$$
$$=\frac{1}{D}P_0J_0(\gamma k_0 r)=\frac{1}{D}P_0\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\gamma k_0}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}r^{2n}$$

та

$$LW=r^4g(r)=\frac{1}{D}P_0r^4J_0(\gamma k_0 r)=$$
$$=\frac{1}{D}P_0\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\gamma k_0}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}\exp[(2n+4)\xi], \qquad (2)$$

де $r=\exp(\xi)$.

Знайдемо частинний розв'язок $W_2(r)=W_2(\exp\xi)$ рівняння (2) у вигляді суми степеневого ряду відносно $r=\exp\xi$

$$W_2(\exp\xi)=\frac{1}{D}P_0\sum_{n=0}^{+\infty}W_{2n}\exp[(2n+4)\xi] \qquad (3)$$

з коефіцієнтами $W_{2n}$, що підлягають визначенню. Підстановка (3) в рівняння

$$LW=\frac{d^4W}{d\xi^4}-4\frac{d^3W}{d\xi^3}+4\frac{d^2W}{d\xi^2}=$$
$$=\frac{1}{D}P_0\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\gamma k_0}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}\exp[(2n+4)\xi] \qquad (4)$$

дає:

$$\left\{(2n+4)^4-4(2n+4)^3+4(2n+4)^2\right\}W_{2,n}=$$
$$=(2n+4)^2(2n+2)^2W_{2,n}=$$
$$=16(n+1)^2(n+2)^2W_{2,n}=(-1)^n\frac{\left(\frac{\gamma k_0}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2},$$

$n=0,\ 1,\ 2,\ldots$

$$\Rightarrow\quad W_{2,n}=\frac{(-1)^n}{16}\frac{\left(\frac{\gamma k_0}{2}\right)^{2n}}{[(n+2)!]^2}\qquad\Rightarrow$$

$$W_2(\exp\xi)=\frac{1}{16D}P_0\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\gamma k_0}{2}\right)^{2n}}{[(n+2)!]^2}\exp[2(n+2)\xi]=$$

$$=\left|\begin{matrix}n+2=m\\ n=m-2\end{matrix}\right|=\frac{1}{16D}P_0\sum_{m=2}^{+\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{\gamma k_0}{2}\right)^{2(m-2)}}{(m!)^2}\exp(2m\xi)=$$

$$=\frac{1}{16D}P_0\left(\frac{\gamma k_0}{2}\right)^{-4}\sum_{m=2}^{+\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{\gamma k_0\exp\xi}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}=$$

$$=\frac{P_0}{(\gamma k_0)^4D}\left\{\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{\gamma k_0\exp\xi}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}+\frac{\left(\frac{\gamma k_0\exp\xi}{2}\right)^{2}}{(1!)^2}-1\right\}=$$

$$=\frac{P_0}{(\gamma k_0)^4D}\left\{J_0(\gamma k_0\exp\xi)+\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{\gamma k_0\exp\xi}{2}\right)^2-1\right\}\quad\Rightarrow$$

$$W_2(r)=\frac{P_0}{(\gamma k_0)^4D}\left\{J_0(\gamma k_0 r)+\left(\frac{\gamma k_0 r}{2}\right)^2-1\right\}. \qquad (5)$$

Таким чином, розв'язок рівняння руху на цей випадок має вигляд:

$$W(r)=C_1+\left(C_2+C_4r^2\right)\ln r+C_3r^2+$$
$$+\frac{P_0}{(\gamma k_0)^4D}\left\{J_0(\gamma k_0 r)+\left(\frac{\gamma k_0 r}{2}\right)^2-1\right\}. \qquad (6)$$

Певна річ, що доданок

$$\frac{P_0}{(\gamma k_0)^4 D}\left[\left(\frac{\gamma k_0 r}{2}\right)^2 - 1\right]$$

можна було б пропустити, бо він являється частинним розв'язком однорідного рівняння $LW_1 = 0$, і скористатися частковим розв'язком неоднорідного рівняння (2) в наступній формі –

$$W_2(\exp\xi) = \frac{P_0}{(\gamma k_0)^4 D} J_0(\gamma k_0 \exp\xi) \quad \Rightarrow$$

$$W_2(r) = \frac{P_0}{(\gamma k_0)^4 D} J_0(\gamma k_0 r). \tag{7}$$

Не дивлячись на те, що

$$W_2\ (r) = \frac{-P_0}{(\gamma k_0)^3 D} J_1(\gamma k_0 r) \underset{r\to 0}{\to} 0,$$

все ж

$$W_2(r) = \frac{P_0}{(\gamma k_0)^4 D} J_0(\gamma k_0 r) \underset{r\to 0}{\to} \frac{P_0}{(\gamma k_0)^4 D} > 0.$$

Таким чином, для плоскої хвилі акустичного впливу граничний розв'язок $W_0(r)$ формується відповідно до формули, в якій значення $W_0(r)$ окреслюється співвідношенням (5):

$$W_0(r) =$$

$$= \frac{P_0}{(\gamma k_0)^4 D}\left\{J_0(\lambda) + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 1 - \left[J_0(\lambda_1) + \left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - 1\right]\frac{r^2}{R^2}\right\} +$$

$$+ \frac{P_0}{(\gamma k_0)^3 D} \times$$

$$\times \left\{R\left[\lambda_1 - J_1(\lambda_1)\right] - \frac{2}{\gamma k_0}\left[J_0(\lambda_1) + \left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - 1\right]\frac{r^2}{R^2}\ln\frac{R}{r}\right\}, \tag{8}$$

де $\gamma k_0 r = \lambda$ – безрозмірна змінна; $\gamma k_0 R = \lambda_1$ – безрозмірна стала; $\dfrac{P_0}{(\gamma k_0)^3 D}$ –

безрозмірна стала; $\dfrac{1}{\gamma k_0}[<] = \mathrm{const}$.

*Нестаціонарна взаємодія акустичних хвиль з пластиною. Пластина з отвором.* За нестаіонарної задачі диференціальне рівняння має вид –

$$\Delta^2 W(x,y,t) + \frac{\rho h}{D}\ddot{W}(x,y,t) = \frac{1}{D}q(x,y,t) = \frac{f(x,y)}{D}\exp i\omega t. \tag{9}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$W(x,y,t) = u(x,y)\exp i\omega t, \tag{10}$$

де $u(x,y)$ підлягає визначенню.

Тоді,

$$\Delta^2 u + \omega\ \ u = \frac{f}{D},\ \omega\ \ = \frac{\rho h}{D}\omega^2. \tag{11}$$

Наближений розв'язок рівняння (11) будуємо у формі лінійної комбінації координатних функцій

$$u(x,y) \approx c_0^j u_j(x,y), \qquad i = \overline{2,6} \tag{12}$$

із стовпцем

$$C_0 = \begin{pmatrix} c_0^2 & c_0^3 & c_0^4 & c_0^5 & c_0^6 \end{pmatrix}^T, \tag{13}$$

який підлягає обчисленню.

Отже, в розрахункову схему повинні бути внесені наступні зміни. Матрицю Грама $B_0$ координатних функцій $u_j$ по енергії оператора $A$ отримуємо з матриці $B$ (12) викреслюванням першого рядка і першого стовпця:

$$B_0 = \frac{8\pi}{15R^2}\begin{Vmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Таблицю значень функції

$$\Delta(\omega\ \ ) = \det(G_0 - \omega\ \ B_0),\ 0 < \omega \tag{15}$$

створюємо аналогічно попередньому. Додатні корені функції $\Delta(\omega\ \ )$ назвемо сингулярними значеннями вивчаємої коливальної системи, а нульові – резонансними.

Якщо значення $\omega$ не сингулярне, тоді

$$C_0 = (G_0 - \omega\ \ B_0)^{-1} F_0. \tag{16}$$

Обчислений стовпець $C_0$ дозволяє встановити наближене значення стаціонарної задачі –

$$u(x,y) \approx c_o^j u_j(x,y), \qquad j = \overline{2,6}. \tag{17}$$

Наближений розв'язок нестаціонарної задачі (9) шукаємо у вигляді –

$$W(x,y,t) \approx c_0^j u_j(x,y)\exp i\omega t, \quad j = \overline{2,6}. \tag{18}$$

Можна провести порівняльну оцінку функцій $\det(G - \omega\ B)$ та $\Delta(\omega\ \ ) = \det(G_0 - \omega\ B_0)$ з метою визначення ступеня правочинності обраних змін схеми обчислень.

В тому випадку, коли розв'язок задачі потребує рівності нулю в центрі пластини частинних похідних першого порядку за $x$ та $y$, тоді з числа координатних функцій $u_j(x,y)$ слід вилучити перші три функції – $u_1$, $u_2$, $u_3$, а розв'язок будувати з сім'ї останніх трьох – $u_4$, $u_5$, $u_6$. Це призвело б до вже відзначених величин в обчисленнях, але замість однієї, в матрицях $G$ і $B$ слід викреслити перших три рядки і перших три стовпця, а в стовпці $F$ – перший, другий і третій елементи. У цьому випадку приходимо до $(3\times 3)$ матриць $G_{00}$ та $B_{00}$ і до стовпця $F_{00}$ також з трьох елементів.

*Уточнення моделі для випадку закріпленого центру пластини* ( $r_0 \to 0$ ). Розглянуте явище припускало відсутність в центрі пластини закріплень, що, природно, знайшло відображення у виборі координатних функцій $u_j(x,y)$. Всі вони, окрім першої $u_1(x,y)$, обертаються на нуль при $x = y = 0$. В той же час $u_1(0,0) = 1$.

Уточнена модель має виключити переміщення в центрі пластини. Для виконання цієї умови, слід вилучити функцію $u_1(x,y)$ з базису $u_j(x,y)$, який тепер буде містити тільки п'ять координатних функцій $u_j(x,y)$ ( $j = \overline{2,6}$ ), лінійна комбінація яких буде наближеним розв'язком стаціонарної задачі

$$u(x,y) \approx c_0^j u_j(x,y), \qquad j = \overline{2,6}, \tag{19}$$

де

$$C_0 = \begin{pmatrix} c_0^2 & c_0^3 & c_0^4 & c_0^5 & c_0^6 \end{pmatrix}^T \qquad (20)$$

стовпець, що підлягає визначенню.

Сформульовані умови забезпечать наявність нуля переміщень у центрі пластини.

Окреслимо зміни в структурі вже побудованої моделі і , взявши її за основу, визначимо закономірності виникаючих хвильових процесів.

Матриця Грама $G_0$ образів координатних функцій (19) має вигляд:

$$G_0 = \frac{4^5}{R^6}\pi \begin{Vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}. \qquad (21)$$

Новий стовпець вільних членів $F_0$ знаходиться з формули

$$F_0 = \frac{32}{R^4} \begin{Vmatrix} \frac{6}{R} J_x \\ \frac{6}{R} J_y \\ -2J_0 + \frac{15}{R^2} J_{x^2} + \frac{3}{R^2} J_{y^2} \\ -2J_0 + \frac{3}{R^2} J_{x^2} + \frac{15}{R^2} J_{y^2} \\ \frac{12}{R^2} J_{xy} \end{Vmatrix} \qquad (22)$$

За плоскої акустичної хвилі, $F_0$ набуває вигляду –

$$F_0 = \frac{64\pi}{DR^2} P_0 \begin{Vmatrix} 6i\cos\varepsilon \frac{J_2(\lambda)}{\lambda} \\ -6i\sin\varepsilon \frac{J_2(\lambda)}{\lambda} \\ 7\frac{J_1(\lambda)}{\lambda} - 18\frac{J_2(\lambda)}{\lambda^2} - 6\cos 2\varepsilon \frac{J_3(\lambda)}{\lambda} \\ 7\frac{J_1(\lambda)}{\lambda} - 18\frac{J_2(\lambda)}{\lambda^2} + 6\cos 2\varepsilon \frac{J_3(\lambda)}{\lambda} \\ 6\sin 2\varepsilon \frac{J_3(\lambda)}{\lambda} \end{Vmatrix}, \qquad (23)$$

де $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}k_0 r = \lambda$ ; $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}k_0 R = \lambda_1$ .

Якщо $\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^2 << 1$ , тоді маємо:

$$F_0 \approx \frac{16\pi}{DR^2} P_0 \begin{Vmatrix} 6i \cdot \frac{\lambda}{2}\cos\varepsilon \\ -6i \cdot \frac{\lambda}{2}\sin\varepsilon \\ 5 - 2(2+\cos 2\varepsilon)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \\ 5 - 2(2-\cos 2\varepsilon)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \\ 2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \sin 2\varepsilon \end{Vmatrix}. \qquad (24)$$

Стовпець коефіцієнтів лінійної комбінації сім'ї (19) координатних функцій змінюється:

$$C_0 = \begin{pmatrix} c_0^2 & c_0^3 & c_0^4 & c_0^5 & c_0^6 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{R^4}{64D} P_0 \begin{Vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} 6i \cdot \frac{\lambda}{2}\cos\varepsilon \\ -6i \cdot \frac{\lambda}{2}\sin\varepsilon \\ 5 - 2(2+\cos 2\varepsilon)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \\ 5 - 2(2-\cos 2\varepsilon)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \\ 2 \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \sin 2\varepsilon \end{Vmatrix}. \qquad (25)$$

Наближений розв'язок, таким чином, будується за схемою

$$u(x,y) \approx c_0^j u_j(x,y), \qquad j = \overline{2,6}. \qquad (26)$$

Наведені дані дозволяють вирішувати задачі проектування акустично «прозорих», чи акустично «непрозорих» рухомих об'єктів. Зрозуміло, що пропонуємі моделі не можуть розглядатися як єдино можливі.

Взаємодія плоскої ступінчастої (підводний вибух), або експотенціально згасаючої хвилі вивчалися в цілому ряді робіт і часто слугують свого роду «еталонною» мірою при апробації різноманітних підходів до аналізу природи і математичного опису задач гідропружності.

Створення «прозорих» об'єктів передбачає наявність акустично твердих конструкцій, навпаки, «непрозорих» – акустично м'яких елементів. Останні розглядаються при розв'язанні задач супроводу рухомих об'єктів.

## 4. Висновки

Наведені результати вимушеного згинного руху колової пластини в акустичних полях створюють умови вибору заходів для боротьби з негативними проявами зміни динамічного стану поверхні. Це можуть бути пасивні засоби звукоізоляції, або автокомпенсаційні методи зменшення впливу звукових хвиль.

Здійснений опис відносного руху пластини постає однією із складових усвідомлення причин появи прискорення Коріоліса за умов наявної хитавиці фюзеляжу. Наступний крок використання цих результатів полягає в створенні схеми Ейлеревих сил інерції і оцінки впливу їх моментів на похибки вимірювань.

Литература


1. Мельник В.Н. Нелинейные колебания в полиагрегатном подвесе гироскопа [Текст]: монография / В.Н. Мельник, В.В. Карачун; НТУУ «КПИ»:- К.: «Корнейчук», 2008. – 104 с. – Библиограф.: с.80-82. – ISBN 978-966-7599-48-5.
2. Усталостные испытания на высоких частотах нагружения [Текст]: монография / В.А. Кузьменко, Л.Е.. Матохнюк, Г.Г. Писаренко и др.; под общ. ред. В.А. Кузьменко.- К.: Наук. думка, 1970. - 336 с.