УДК 629.7.054

Розв'язується задача лінійно-пружної взаємодії підвісу гіроскопа у вигляді двох коаксіальних циліндрів із зовнішнім хвильовим збуренням. Аналітично пояснюється природа виникнення переміщень поверхні внаслідок дифракційних ефектів

Ключові слова: підвіс гіроскопа, оболонка, радіальні переміщення

Решается задача линейно-упругого взаимодействия подвеса гироскопа в виде двух коаксиальных цилиндров с внешним волновым воздействием. Аналитически объясняется природа возникновения перемещений поверхности вследствие дифракционных эффектов

Ключевые слова: подвес гироскопа, оболочка, радиальные перемещения

The problem of linearly-resilient interaction of suspension of gyroscope is decided as two coaxial cylinders with external wave influence. Nature of origin moving of surface is analytically explained because of diffraction effects

Keywords: suspension of gyroscope, shell, radial moving

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ПОДВЕСЕ ГИРОСКОПА

Н.В. Гнатейко
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра теоретической механики
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»
пр-т Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056
Контактный тел.: (044) 454-94-51
E-mail: karachun1@gala.net

1. Введение

Исследования относятся к области прикладной механики и описывают природу возмущенного движения одной из модификаций подвеса гироскопа – в виде двух цилиндров, причем наружный имеет продольную щель и является упруго податливым, а внутренний представляется абсолютно твердым телом. Дифракционные явления приводят к нарушению динамического состояния поверхности и, как следствие, к появлению волновых процессов, существенно влияющих на погрешности измерений.

Если принять во внимание тот факт, что летательный аппарат в рамках Полетного Задания может двигаться по различным траекториям с существенным кинематическим и силовым воздействием со стороны фюзеляжа, то упруго-податливая поверхность подвеса может привести к возникновению Эйлеровых сил инерции, воспринимаемых приборами инерциальной навигации как входной сигнал.

Таким образом, описание природы изучаемого явления позволит проанализировать ситуацию и принять меры по устранению дополнительных погрешностей.

2. Анализ состояния проблемы и постановка задачи исследований

Приборы инерциальной навигации, сочетая в себе массу достоинств, основным из которых является автономность, как оказалось, подвержены влиянию внешних воздействий различного характера [1]. Достаточно длительная история совершенствования этих приборов дала жизнь многим техническим решениям, в том числе и автокомпенсационным, позволившим радикально повлиять на повышение точности измерений [2]. Вместе с тем, стремительное развитие ракетно-космической техники привело к тому, что многие приборы в режиме эксплуатационного использования летательных аппаратов ухудшили свои характеристики. Речь идет о влиянии проникающего акустического излучения высокой интенсивности на элементы подвеса гироскопа и особенно на чувствительные элементы систем коррекции [3].

Целью проводимых исследований является описание природы упругого взаимодействия подвеса гироскопа с внешним волновым воздействием высокого уровня.

3. Исходные предпосылки и построение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим прохождение плоской звуковой волны через систему двух коаксиальных круговых цилиндров. Внутренний считаем бесконечной по протяженности абсолютно твердой круговой оболочкой, а наружный – упругой оболочкой, которая имеет со стороны падающей внешней волны давления окно длины 2L (рис. 1). Оболочки соединены упругой связью с коэффициентом жесткости c_1.

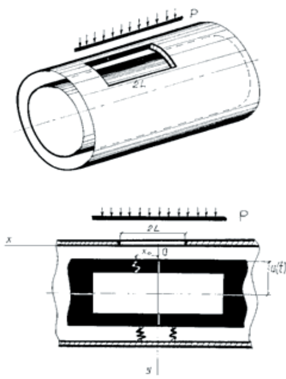

Рис. 1. Дифракция звука на системе двух коаксиальных цилиндров
Волна падает со стороны окна длиной 2L

Уравнения наружной оболочки при нормальном падении звуковой волны имеют вид:

$$\omega^2\rho V+\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial W}{\partial\beta}=0\,;$$

$$\left(\omega^2\rho+1\right)\cdot W+\frac{\partial V}{\partial\beta}+c^2\left(\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 W}{\partial\beta^4}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 W}{\partial\beta^2\partial x^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right)= \quad (1)$$

$$=f\left(x,x_0,\beta,t\right)\delta\left(x-x_0\right)+P\left(x,\beta,r,t\right)\overset{\text{def}}{=}F\left(x,x_0,\beta,t\right),$$

где $V,\ W$ - соответственно тангенциальные и радиальные перемещения элементов поверхности под действием падающей волны; $-\infty<x<+\infty$; $0\le\beta\le 2\pi$; все коэффициенты постоянные по величине.

Носителем функции $F\left(x,x_0,\beta,t\right)$ является сегмент $-L\le x\le L$, из чего следует, что $-L<x<L$, а также $F\left(x,x_0,\beta,t\right)=0$. $\forall x$, $|x|>L$.

В уравнениях (1) функция

$$f\left(x,x_0,\beta,t\right)=c_1\left[U\left(x,x_0,\beta,t\right)-\ \ -W\left(x,x_0,\beta,t\right)\right]$$

есть ни что иное, как решение задачи Коши, выполненное в четвертой главе. Поэтому, если будут определены радиальные перемещения $W\left(x,x_0,\beta,t\right)$, то и поступательное перемещение внутренней оболочки $U\left(x,x_0,\beta,t\right)$ также станет известным.

Таким образом, будем отыскивать решения $\{V,W\}$, ограниченные при $x\to\pm\infty$. Вместе с тем представляет интерес и более узкая задача – нахождение решений $\{V,W\}$, которые обращаются в нули при $x\to\pm\infty$ вместе со всеми производными.

Представим известную функцию $F\left(x,x_0,\beta,t\right)$, а также искомые функции $V\left(x,x_0,\beta,t\right)$ и $W\left(x,x_0,\beta,t\right)$ в форме тригонометрических рядов Фурье по переменной β $\left(0\le\beta\le 2\pi\right)$:

$$F\left(x,x_0,\beta,t\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}F_m(x)\exp(im\beta)\,;$$

$$V\left(x,x_0,\beta,t\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}V_m(x)\exp(im\beta)\,; \qquad (2)$$

$$W\left(x,x_0,\beta,t\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}W_m(x)\exp(im\beta)\,.$$

Коэффициенты Фурье этих уравнений (их комплексные амплитуды) зависят и от других параметров системы (1). Но, чтобы избежать громоздкости записи, это не отражено в обозначениях.

Подстановка соотношений (2) в уравнения (1) приводит к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных $V_m(x)$ и $W_m(x)$:

$$\left(\omega^2\rho-m^2\right)\cdot V_m(x)+\frac{1-\sigma}{2}V_m''(x)+imW_m(x)=0\,;$$

$$imV_m(x)+\left(\omega^2\rho+1+\frac{c^2m^4}{r^4}\right)W_m(x)-$$
$$-\frac{2c^2m^2}{r^2}W_m''(x)+c^2W_m^{IV}(x)=F_m(x)\,, \qquad (3)$$

$$m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots .$$

Интегрирование исходных уравнений при $m=0$.

При $m=0$ система уравнений (3) распадается на два независимых уравнения –

$$\frac{1-\sigma}{2}V_0''(x)+\omega^2\rho V_0(x)=0\,;$$

$$c^2W_0^{IV}+\left(\omega^2\rho+1\right)\ W_0(x)=F_0(x)\,.$$

Ведем обозначения:

$$\frac{2\omega^2\rho}{1-\sigma}=\lambda^2\,;\ \ \frac{\omega^2\rho+1}{c^2}=4\mu^4\,. \qquad (4)$$

Тогда –

$$V_0''(x)+\lambda^2V_0(x)=0\,;$$

$$W_0^{IV}(x)+4\mu^4W_0(x)=c^{-2}F_0(x) \qquad (5)$$

и решение первого из уравнений этой системы имеет вид –

$$V_0(x)=A_0\cos(\lambda x)+B_0\sin(\lambda x)\,, \qquad (6)$$

то есть ограничено при всех значениях $x\to\pm\infty$.

Если поставить задачу $V_0(x)\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$, то получим:

$$A_0=B_0=0\ \text{ и }\ V_0(x)\equiv 0\,.$$

Чтобы выделить какое-нибудь другое единственное решение достаточно задать значения функций $V_0(x')$ и $V_0'(x')$ в какой-нибудь точке x' оси $-\infty<x<+\infty$.

Общее решение второго уравнения системы (5) запишем по значениям корней его характеристического уравнения

$$k^4+4\mu^4=0\,. \qquad (7)$$

Тогда

$$k_{1,2}=\mu(1\pm i)\ ;\ k_{3,4}=-\mu(1\mp i) \qquad (8)$$

и

$$W_{01}(x)=\exp(\mu x)(a_1\cos\mu x+a_2\sin\mu x)+$$
$$+\exp(-\mu x)(a_3\cos\mu x+a_4\sin\mu x)\,. \qquad (9)$$

Решение однородного уравнения

$$W_0^{IV}(x)+4\mu^4W_0(x)=0$$

обозначим через $g(x)$ и будем искать как реакцию динамической системы на единичный импульс при таких начальных условиях:

$$g(0)=g'(0)=g''(0)=0,\ g'''(0)=1. \tag{10}$$

Для удобства решение запишем в комплексной форме –

$$\begin{gathered}g(x)=C_1\exp(k_1x)+C_2\exp(k_2x)+\\+C_3\exp(k_3x)+C_4\exp(k_4x)\end{gathered}, \tag{11}$$

что приводит к следующей системе четырех линейных уравнений относительно постоянных C_i:

$$\begin{array}{ccccccccc}C_1&+&C_2&+&C_3&+&C_4&=&0;\\k_1C_1&+&k_2C_2&+&k_3C_3&+&k_4C_4&=&0;\\k_1^2C_1&+&k_2^2C_2&+&k_3^2C_3&+&k_4^2C_4&=&0;\\k_1^3C_1&+&k_2^3C_2&+&k_3^3C_3&+&k_4^3C_4&=&1.\end{array} \tag{12}$$

Главный определитель системы (определитель Вандермонда) имеет вид:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\k_1&k_2&k_3&k_4\\k_1^2&k_2^2&k_3^2&k_4^2\\k_1^3&k_2^3&k_3^3&k_4^3\end{vmatrix}=$$
$$=(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_4-k_1)(k_3-k_2)(k_4-k_2)(k_4-k_3).$$

Тогда частные определители запишутся следующим образом –

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\0&k_2&k_3&k_4\\0&k_2^2&k_3^2&k_4^2\\1&k_2^3&k_3^3&k_4^3\end{vmatrix}=-(k_3-k_2)(k_4-k_2)(k_4-k_3);$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&0&1&1\\k_1&0&k_3&k_4\\k_1^2&0&k_3^2&k_4^2\\k_1^3&1&k_3^3&k_4^3\end{vmatrix}=(k_3-k_1)(k_4-k_1)(k_4-k_3);$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&0&1\\k_1&k_2&0&k_4\\k_1^2&k_2^2&0&k_4^2\\k_1^3&k_2^3&1&k_4^3\end{vmatrix}=-(k_2-k_1)(k_4-k_1)(k_4-k_2);$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\k_1&k_2&k_3&0\\k_1^2&k_2^2&k_3^2&0\\k_1^3&k_2^3&k_3^3&1\end{vmatrix}=(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2),$$

что позволяет вычислить произвольные постоянные:

$$C_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{1}{8\mu^3i(1+i)};\ C_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{1}{8\mu^3i(1-i)};$$

$$C_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1}{8\mu^3i(1-i)};\ C_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=-\frac{1}{8\mu^3i(1+i)}.$$

Таким образом, решение однородного уравнения можно записать в виде –

$$\begin{gathered}g(x)=\frac{1}{8\mu^3i}\left\{\frac{\exp[\mu x(1+i)]}{1+i}-\frac{\exp[-\mu x(1+i)]}{1+i}+\right.\\\left.+\frac{\exp[-\mu x(1-i)]}{1-i}-\frac{\exp[\mu x(1-i)]}{1-i}\right\}.\end{gathered} \tag{13}$$

Нетрудно проверить соблюдение условий (10):

$g(0)=0;\ g'(0)=0;\ g''(0)=0,$

$$g'''(0)=\frac{1}{8i}\left[(1+i)^2+(1+i)^2-(1-i)^2-(1-i)^2\right]=1.$$

Для удобства дальнейших вычислений, выражению (13) придадим вещественную форму –

$$\begin{gathered}g(x)=\frac{1}{16\mu^3i}\{\exp(\mu x)[(1-i)\exp(i\mu x)-(1+i)\exp(-i\mu x)]+\\+\exp(-\mu x)[(1+i)\exp(i\mu x)-(1-i)\exp(-i\mu x)]\}=\\=\frac{1}{8\mu^3}[\exp(\mu x)(\sin\mu x-\cos\mu x)+\exp(-\mu x)(\sin\mu x+\cos\mu x)].\end{gathered} \tag{14}$$

Частное решение $W_{02}(x)$ второго уравнения системы (5) построим в виде –

$$\begin{gathered}W_{02}(x)=c^{-2}\int_0^x F_0(\xi)g(x-\xi)d\xi=\\=\frac{1}{8\mu^3c^2}\exp(\mu x)\int_0^x\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)[\sin\mu(x-\xi)-\cos\mu(x-\xi)]d\xi+\\+\frac{1}{8\mu^3c^2}\exp(-\mu x)\int_0^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)[\sin\mu(x-\xi)+\cos\mu(x-\xi)]d\xi=\\=-\frac{1}{8\mu^3c^2}\exp(\mu x)\left\{(\cos\mu x)\int_0^x\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)(\sin\mu\xi+\cos\mu\xi)d\xi+\right.\\\left.+(\sin\mu x)\int_0^x\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)(\sin\mu\xi-\cos\mu\xi)d\xi\right\}-\\-\frac{1}{8\mu^3c^2}\exp(-\mu x)\left\{(\cos\mu x)\int_0^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)(\sin\mu\xi-\cos\mu\xi)d\xi-\right.\\\left.-(\sin\mu x)\int_0^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)(\sin\mu\xi+\cos\mu\xi)d\xi\right\}.\end{gathered} \tag{15}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_0^x\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi+\frac{\pi}{4})d\xi=J_1(x);\\\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_0^x\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi-\frac{\pi}{4})d\xi=J_2(x);\\\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_0^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi-\frac{\pi}{4})d\xi=J_3(x);\\-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_0^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi-\frac{\pi}{4})d\xi=J_4(x).\end{gathered} \tag{16}$$

Тогда выражение (15) примет вид –

$$\begin{gathered}W_{02}(x)=-\exp(\mu x)[(\cos\mu x)J_1(x)+(\sin\mu x)J_2(x)]-\\-\exp(-\mu x)[(\cos\mu x)J_3(x)+(\sin\mu x)J_4(x)].\end{gathered} \tag{17}$$

С учетом (9) полное решение второго уравнения системы (5) будет таким:

$$W_0(x)=W_{01}(x)+W_{02}(x)=$$

$$=-\exp(\mu x)\{[a_1-J_1(x)](\cos\mu x)+[a_2-J_2(x)](\sin\mu x)\}+$$

$$+\exp(-\mu x)\{[a_3-J_3(x)](\cos\mu x)+[a_4-J_4(x)](\sin\mu x)\}. \quad (18)$$

Решения ищем ограниченные при $x\to\pm\infty$, то есть на краях бесконечной оболочки. Тогда, учитывая, что носитель функции $F(x)$ конечен, то при $|x|>L$ функция $F(x)$ будет равна нулю, то есть

$$F(x)=0,\ \text{если}\ |x|>L. \quad (19)$$

Следует отметить, что

$$J_1(x)=\mathrm{const}=B_1;\ J_2(x)=\mathrm{const}=B_2,\ \text{если}\ x>L; \quad (20)$$

$$J_3(x)=\mathrm{const}=B_3;\ J_4(x)=\mathrm{const}=B_4,\ \text{если}\ x<-L \quad (21)$$

Тогда выражение (18), с учетом соотношений (20) и (21), преобразуется:

$$W_0(x)=\exp(\mu x)\{[B_1-J_1(x)]\cos\mu x+[B_2-J_2(x)]\sin\mu x\}+$$

$$+\exp(-\mu x)\{[B_3-J_3(x)]\cos\mu x+[B_4-J_4(x)]\sin\mu x\}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\exp(\mu x)\left\{(\cos\mu x)\int_x^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi+\frac{\pi}{4})d\xi+\right.$$

$$\left.+(\sin\mu x)\int_x^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi-\frac{\pi}{4})d\xi\right\}-$$

$$b=\mathrm{colon}(b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4\quad b_5\quad b_6)$$

$$+(\sin\mu x)\int_{-L}^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi+\frac{\pi}{4})d\xi\Bigg\}, \quad (22)$$

где $\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4&\lambda_5&\lambda_6\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2&\lambda_4^2&\lambda_5^2&\lambda_6^2\\ \lambda_1^3&\lambda_2^3&\lambda_3^3&\lambda_4^3&\lambda_5^3&\lambda_6^3\\ \lambda_1^4&\lambda_2^4&\lambda_3^4&\lambda_4^4&\lambda_5^4&\lambda_6^4\\ \lambda_1^5&\lambda_2^5&\lambda_3^5&\lambda_4^5&\lambda_5^5&\lambda_6^5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\\b_5\\b_6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{vmatrix}$.

Уточним поведение построенного решения вне носителя возмущающей силы $F(x)$, то есть вне окна, через которое проходит волна давления ($-L\le x\le L$). Другими словами, проверим, ограничено ли решение при $x\to\pm\infty$.

Если $L<x<+\infty$, то выполняются соотношения:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_x^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi\pm\frac{\pi}{4})d\xi=0; \quad (23)$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi-\frac{\pi}{4})d\xi=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^L\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi-\frac{\pi}{4})d\xi=\mathrm{const}\overset{\mathrm{def}}{=}p_1; \quad (24)$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi+\frac{\pi}{4})d\xi=$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^L\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi+\frac{\pi}{4})d\xi=\mathrm{const}\overset{\mathrm{def}}{=}p_2. \quad (25)$$

В этом случае

$$W_0(x)=\exp(-\mu x)(p_1\cos\mu x+p_2\sin\mu x),\ L<x<+\infty. \quad (26)$$

Если $-\infty<x<L$, то:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi\pm\frac{\pi}{4})d\xi=0; \quad (27)$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_x^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi+\frac{\pi}{4})d\xi=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi+\frac{\pi}{4})d\xi=\mathrm{const}^{\mathrm{def}}=q_1$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_x^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi-\frac{\pi}{4})d\xi= \quad (28)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin(\mu\xi+\frac{\pi}{4})d\xi=\mathrm{const}\overset{\mathrm{def}}{=}q_2$$

С учетом сказанного, получаем:

$$W_0(x)=\exp(\mu x)(q_1\cos\mu x+q_2\sin\mu x),\ -\infty<x<-L. \quad (29)$$

Из выражений (27) и (29) следует, что построенное решение (22) экспоненциально стремится к нулю при $x\to\pm\infty$ вместе со всеми своими производными по переменной $\alpha_j=\mathrm{Re}\lambda_j=0$. Других решений, кроме (22), ограниченных на всей оси $-\infty<x<+\infty$, второе уравнение системы (5) не имеет.

Интегрирование уравнений при $m\ne0$.

Из первого уравнения системы (3) имеем:

$$mW_m(x)=i(\omega^2\rho-m^2)\cdot V_m(x)+i\frac{1-\sigma}{2}V_m''(x);$$

$$mW_m''(x)=i(\omega^2\rho-m^2)\cdot V_m''(x)+i\frac{1-\sigma}{2}V_m^{IV}(x); \quad (30)$$

$$mW_m^{IV}(x)=i(\omega^2\rho-m^2)\cdot V_m^{IV}(x)+i\frac{1-\sigma}{2}V_m^{IV}(x).$$

Подставив найденные соотношения (30) во второе уравнение системы (3), получаем:

$$\left[(\omega^2\rho-m^2)\left(\omega^2\rho+1+\frac{c^2m^4}{r^4}\right)+m^2\right]V_m(x)+$$

$$\left[\frac{1-\sigma}{2}\left(\omega^2\rho+1+\frac{c^2m^4}{r^4}\right)-\frac{2c^2m^2}{r^2}(\omega^2\rho-m^2)\right]V_m''(x)+$$

$$+c^2\left[(\omega^2\rho-m^2)-\frac{2m^2}{r^2}(\omega^2\rho-m^2)\right]V_m^{IV}(x)+$$

$$+c^2\frac{1-\sigma}{2}V_m^{IV}(x)=-imF_m(x).$$

Введем обозначения:

$$\frac{2}{c^2(1-\sigma)}\left[(\omega^2\rho-m^2)\left(\omega^2\rho+1+\frac{c^2m^4}{r^4}\right)+m^2\right]=S_{m,1};$$

$$\frac{1}{c^2}(\omega^2\rho+1)+\frac{m^4}{r^4}-\frac{4m^2}{1-\sigma}(\omega^2\rho-m^2)=S_{m,2}; \quad (31)$$

$$\frac{2}{1-\sigma}\left(\omega^2\rho-m^2\right)\left(1-\frac{2m^2}{r^2}\right)=S_{m,4}\,;$$

$$\frac{-2mi}{c^2(1-\sigma)}F_m(x)=h_m(x)\,,\ m\ =\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\,.$$

В результате получаем для функции $V_m(x)$ следующее уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами –

$$S_{m,1}V_m(x)+S_{m,2}V_m''(x)+S_{m,4}V_m^{IV}(x)+V_m^{VI}(x)=h_m(x)\,.(32)$$

Проинтегрировав это уравнение, можно найти $W_m(x)$ простым дифференцированием решения $V_m(x)$, как это указано в первом уравнении системы (3). Поскольку функция $f(x,x_0,\beta,t)$ найдена ранее в первой главе, отыскать величину $U(x,x_0,\beta,t)$ можно из уже приведенного соотношения

$$\sum_{j=1}^{6}\left(a_j+b_jp_j\right)\exp(i\nu_jx)\,.$$

Найдем решения уравнения (32), ограниченные при $x\to\pm\infty$, опуская в дальнейшем индексы" m".

Уравнению (32) соответствует характеристический полином

$$\lambda^6+S_4\lambda^4+S_2\lambda^2+S_1=0\,, \qquad (33)$$

который запишем в виде –

$$z^3+S_4z^2+S_2z+S_1=0\,, \qquad (34)$$

где $\lambda^2=z$.

Формулы (31) показывают, что коэффициенты уравнений (33), (34) четные относительно m. Поэтому, уравнение (34) может иметь:

- три простых корня;
- один простой и один двукратный корень;
- один трехкратный корень.

В соответствии с этим, уравнение (33) будет иметь:

- шесть простых корней;
- два простых и два двукратных корня;
- два трехкратных корня.

Вначале рассмотрим первый случай, когда все корни уравнения (33)

$$\lambda_j=\alpha_j+i\nu_j\ ,\ j=\ \overline{1,6} \qquad (35)$$

простые. Или, с учетом сказанного ранее, –

$$\lambda_j=\alpha_j+i\nu_j=\lambda_{mj}=\alpha_{mj}+i\nu_{mj}\,. \qquad (36)$$

Не исключено, что какие-то из них лежат на мнимой оси, то есть

$$\lambda_k=i\nu_k\ ,\ \alpha_k=0\,.$$

Общее решение однородного уравнения выражения (32) имеет вид –

$$V_{01}(x)=\sum_{j=1}^{6}a_j\exp(\lambda_jx)\,, \qquad (37)$$

где a_j - произвольные постоянные.

Реакция динамической системы (32) на единичный импульс будет такой –

$$g(x)=\sum_{j=1}^{6}b_j\exp(\lambda_jx)\,. \qquad (38)$$

Функция $g(x)$ удовлетворяет однородному уравнению выражения (32) и начальным условиям вида –

$$g(0)=g'(0)=g''(0)=g'''(0)=g^{IV}(0)=0;\quad g^{V}(0)=1.(39)$$

Тогда

$b=\mathrm{colon}(b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4\quad b_5\quad b_6)$ –

есть решение следующей системы линейных алгебраически уравнений, аналогичной (12):

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3&\lambda_4&\lambda_5&\lambda_6\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2&\lambda_4^2&\lambda_5^2&\lambda_6^2\\ \lambda_1^3&\lambda_2^3&\lambda_3^3&\lambda_4^3&\lambda_5^3&\lambda_6^3\\ \lambda_1^4&\lambda_2^4&\lambda_3^4&\lambda_4^4&\lambda_5^4&\lambda_6^4\\ \lambda_1^5&\lambda_2^5&\lambda_3^5&\lambda_4^5&\lambda_5^5&\lambda_6^5\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\\ b_5\\ b_6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{vmatrix} \qquad (40)$$

Определитель этой системы – определитель Вандермонда. И, поскольку веса чисел λ_j различны, этот определитель не равен нулю. Таким образом, система однозначно разрешима.

Частное решение неоднородного уравнения (32) выглядит так:

$$V_{02}(x)=\sum_{j=1}^{6}b_j\exp(\lambda_jx)\int_0^x\exp(-\lambda_j\xi)h(\xi)d\xi\,, \qquad (41)$$

а полное решение запишется в виде –

$$V_0(x)=V_{01}(x)+V_{02}(x)=$$

$$=\sum_{j=1}^{6}\exp(\lambda_jx)\left\{a_j+b_j\int_0^x\exp(-\lambda_j\xi)h(\xi)d\xi\right\}. \qquad (42)$$

Решения ищем ограниченные на всей оси $-\infty<x<+\infty$, а носитель функции $h(x)$ есть сегмент $-L\le x\le L$.

Если корень λ_j находится на мнимой оси, то $\alpha_j=\mathrm{Re}\lambda_j=0$, $\lambda_j=i\nu_j$. Тогда a_j оставим произвольным. Если же $\mathrm{Re}\lambda_j\ne0$, то a_j выбираем следующим образом:

$$a_j=-b_j\int_0^{L\,\mathrm{sign}\,\alpha_j}\exp(-\lambda_j\xi)h(\xi)d\xi\,. \qquad (43)$$

Тогда

$$a_j+b_j\int_0^x\exp(-\lambda_j\xi)h(\xi)d\xi=-b_j\int_x^{L\,\mathrm{sign}\,\alpha_j}\exp(-\lambda_j\xi)h(\xi)d\xi.\ (44)$$

В результате этого, семейство нужных решений неоднородного уравнения (32) окажется следующим:

$$V_m(x)=\sum_{j=1}^{6}\exp(i\nu_jx)\left\{a_j+b_j\int_0^x\exp(-i\nu_j\xi)h(\xi)d\xi\right\}-$$

$$-\sum_{j=1}^{6}b_j\exp(\lambda_jx)\cdot b_j\int_x^{L\,\mathrm{sign}\,\alpha_j}\exp(-\lambda_j\xi)h(\xi)d\xi\,, \qquad (45)$$

где $h(\xi)=h_m(\xi)$; $x\to+\infty$; $\mathrm{Re}\lambda_j=\alpha_j\ne0$.

При этом возможны следующие четыре варианта конструкции формулы (45):

- уравнение (34) имеет три различных отрицательных корня. В этом случае уравнение (33) содержит три различных пары чисто мнимых корней (не равных нулю) комплексно сопряженных. Первая сумма будет включать шесть слагаемых, а вторая – равна нулю;
- уравнение (34) имеет два различных отрицательных корня и один положительный. Тогда уравнение

(33) будет иметь две различные пары чисто мнимых и не равных нулю комплексно сопряженных корней, а два других – вещественные (один положительный, другой отрицательный). В этом случае первая сумма будет содержать четыре слагаемых, вторая – два;

- уравнение (34) имеет один отрицательный корень. Два других его корня различны. Тогда уравнение (33) будет иметь одну пару чисто мнимых, не равных нулю, комплексно-сопряженных корней, а его остальные корни не будут на мнимой оси -–два в левой, два в правой полуплоскостях. Первая сумма в этом случае содержит два слагаемых, вторая – четыре;

- уравнение (34) не имеет отрицательных корней. Тогда уравнение (33) не будет иметь чисто мнимых корней, а только три корня в левой и три в правой полуплоскостях. Первая сумма будет отсутствовать, вторая – содержит четыре слагаемых.

Уточним поведение решений (45) вне носителя функции $h(x)$, то есть вне окна $-L \le x \le L$, когда $h(x) \equiv 0$.

Если $L \le x \le +\infty$, то первая сумма в выражении (45) выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{6}\left(a_j + b_j p_j\right)\exp(i\nu_j x);$$

$$p_j \stackrel{def}{=} \int_0^L \exp(-i\nu_j)h(\xi)d\xi, \tag{46}$$

$$\mathrm{Re}\lambda_j = \alpha_j = 0.$$

В этой сумме столько слагаемых, сколько корней уравнения (33) лежит на мнимой оси. Если таких корней нет, эта сумма отсутствует.

При $\mathrm{Re}\lambda_j = \alpha_j > 0$ и $L \le x \le +\infty$

$$\int_x^{L\,\mathrm{sign}\,\alpha_j} \exp(-\lambda_j\xi)h(\xi)d\xi = -\int_L^x \exp(-\lambda_j\xi)h(\xi)d\xi = 0, \tag{47}$$

где $\forall x: L < x < +\infty$, поэтому вторая сумма, если она имеет место в выражении (45), будет вида:

$$\sum_{j=1}^{6} b_j c_j \exp(\lambda_j x);$$

$$c_j \stackrel{def}{=} \int_{-L}^{L} \exp(-\lambda_j\xi)h(\xi)d(\xi), \tag{48}$$

$$\mathrm{Re}\lambda_j = \alpha_j = 0$$

и стремиться к нулю при $x \to +\infty$ вместе со всеми своими производными по переменной x.

Таким образом, при $L < x < +\infty$

$$V_m(x) = \sum_{j=1}^{6}(a_j + b_j p_j)\exp(i\nu_j x) + \sum_{j=1}^{6} b_j c_j \exp(\lambda_j x) \tag{49}$$

$\mathrm{Re}\,\lambda_j = \alpha_j = 0 \quad \mathrm{Re}\,\lambda_j = \alpha_j < 0$.

Аналогично, если $-\infty < x < -L$:

$$V_m(x) = \sum_{j=1}^{6}(a_j - b_j q_j)\exp(i\nu_j x) - \sum_{j=1}^{6} b_j c_j \exp(\lambda_j x) \tag{50}$$

$\mathrm{Re}\lambda_j = \alpha_j = 0 \quad \mathrm{Re}\lambda_j = \alpha_j > 0$,

где $q_j = \int_{-L}^{0} \exp(-i\nu_j\xi)h(\xi)d(\xi)$.

Если в формулах (49) и (50) первая сумма присутствует, то она осциллирует, а вторая – стремится к нулю в первой формуле при $x \to +\infty$, а во второй формуле - при $x \to -\infty$ вместе со всеми их производными по переменной x.

Таким образом, случай отсутствия кратных корней уравнения (34) проанализирован полностью.

4. Выводы

Полученная аналитическая трактовка упругого взаимодействия подвеса гироскопа с проникающим акустическим излучением позволяет уяснить природу явления, прогнозировать случаи возникновения особенностей резонансного типа, а также выбрать необходимые технические решения для уменьшения влияния дифракционных явлений.

Литература

1. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация [Текст] / А.Ю. Ишлинский – М.: Наука, 1976. – 671с.
2. Автокомпенсация инструментальных погрешностей гироскопии [Текст]: монография / С.М. Зельдович, М.И. Малтинский, И.М. Окон, Я.Г. Остромухов. – Л.: Судостроение, 1976. – 255с.
3. Мельник В.Н. Об особенностях динамики гироскопа с многофазным подвесом в акустических полях // Космічна наука і технологія, 2002. – Т.8. – №4. – С.49-53.