

РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК С РАЗВЕРТЫВАЮЩЕЙСЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИБЛИЖЕННЫМИ АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

И. В. Андрианов

Доктор физико-математических наук, профессор
Институт общей механики высшей технической школы
Земля Южный Рейн-Вестфалия, Templergraben 64,
Ахен, D-52062, Германия
Контактный тел.: 49 (241) 809-46-00
E-mail: igor_andrianov@hotmail.com

А. М. Мильцын

Кандидат технических наук, профессор, начальник
отдела*
Контактный тел.: (056) 780-22-08
E-mail: miltsin@bk.ru

В. И. Олевский

Кандидат технических наук, заместитель директора*
Контактный тел.: (056) 780-22-07
E-mail: volevnew@gmail.com

В. В. Плетин

Инженер-математик, научный сотрудник*
Контактный тел.: (056) 780-22-08

*ТД Днепропетровский завод сварочных материалов
ул. Мониторная, 2а, г. Днепропетровск, Украина, 49130

Представлений анализ розрахунку нелінійних переміщень неоднорідно навантажених оболонок з серединної поверхнею що розгортається методами декомпозиції Адомяна, гомотопічного збурення і продовження по параметру. Використано узагальнене підсумовування рішень апроксимаціями Паде

Ключові слова: оболонки, поверхня що розгортається, продовження по параметру, апроксимації Паде

Представлен анализ расчета нелинейных перемещений неоднородно нагруженных оболочек с разворачивающейся срединной поверхностью методами декомпозиции Адомяна, гомотопического возмущения и продолжения по параметру. Использовано обобщенное суммирование решений аппроксимациями Паде

Ключевые слова: оболочки, разворачивающаяся поверхность, продолжение по параметру, аппроксимации Паде

An analysis of the calculation of nonlinear displacements of inhomogeneously loaded shells with developable principal surface by means of methods of Adomian's decomposition, homotopy perturbation and the parameter continuation was represented. A generalized summation of the solutions was used based on Pade approximants

Keywords: shells, developable surface, the parameter continuation, Pade approximants

1. Введение

Наиболее широким классом оболочек, используемых в машиностроении и строительстве, является класс оболочек с разворачивающейся срединной поверхностью. К этому классу относятся все оболочки, изготавливаемые из листовых материалов путем соединения обечаек. Напряженно-деформированное состояние таких оболочечных конструкций при на-

грузках, соответствующих потере устойчивости, является неоднородным, существенно моментным и, ввиду этого, нелинейным.

Постоянный интерес исследователей к задаче неоднородного сжатия оболочек нулевой гауссовой кривизны не привел к настоящему времени к ее корректному решению. Поэтому возникает необходимость разработки и применения новых методов расчета, позволяющих рассмотреть задачу в усложненной по-

становке, наиболее адекватной реальному поведению конструкций.

Приближенное аналитическое интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений механики деформируемого твердого тела и, в частности, теории гибких упругих оболочек в большинстве практических случаев основано на применении метода продолжения решения по искусственному параметру, предложенного Дородницыным [1]. В последнее время наиболее часто используются два его вида: метод декомпозиции Адомяна (ADM) [2] в различных модификациях [3] и метод гомотопического возмущения (НРМ) [4]. Как было показано в [3], ADM, не смотря на отрицание его создателем какого либо отношения к «малым» параметрам, совпадает с методом возмущения специальной формы. Получаемое в результате применения ADM приближение аналитически суммируется на основе дробно-рационального преобразования Паде [5] по переменной интегрирования, обеспечивая равномерную сходимость приближения к точному решению во всей области мероморфности последнего [3]. Разработанный же позднее НРМ изначально оперирует искусственно введенным параметром и рассматривает некоторый зависящий от него функционал – т.н. гомотопическое отображение [4]. В то же время, автор этого метода не связывает вид функционала гомотопического отображения и свойства получаемых с его помощью приближений (существование, область применимости, устойчивость, скорость сходимости и т. д.).

Если входящие в обыкновенное дифференциальное уравнение выражения представить в виде кратных степенных рядов по независимой переменной, искомой функции, а также ее производным, то приближенное решение уравнения, получаемое как по ADM, так и по НРМ, имеет вид полинома (в пределе – ряда) по степеням переменной интегрирования. Возникает закономерный вопрос о соотношении ADM и НРМ и характере взаимосвязи получаемых по ним приближений. В случае дифференциальных уравнений методы могут быть объединены на основе нового синтетического подхода, использующего двумерные преобразования Паде (2-D PAs) [6], разработке которого и посвящена настоящая работа.

2. Модельный пример

Рассмотрим простой пример. Возьмем неоднородное линейное ОДУ с начальным условием вида

$$\epsilon \frac{dz}{dx} + z = 1, \quad z(0) = 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \tag{1}$$

Решение задачи при разложении в ряд Тейлора представляется в виде

$$z = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{x}{\epsilon} - \frac{x^2}{2\epsilon^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{\epsilon}\right)^n + \dots \tag{2}$$

Точность приближения решения отрезком ряда неоднородна в окрестности особенности по параметру ϵ . Введем параметр ϵ_1 следующим образом, что соответствует ADM [1]:

$$z' = \frac{1}{\epsilon} - \epsilon_1 \frac{z}{\epsilon}, \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i \epsilon_1^i,$$

$$z = \frac{x}{\epsilon} - \frac{x^2}{2\epsilon^2} \epsilon_1 + \frac{x^3}{6\epsilon^3} \epsilon_1^2 \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{\epsilon}\right)^{n+1} \epsilon_1^n + \dots \tag{3}$$

При $\epsilon_1 = 1$ приближение (3) совпадает с (2), что соответствует результатам [3]. Для устранения неоднородности и аналитического продолжения (3) в область его мероморфности построим дробно-рациональные приближения решения по схеме Паде (PAs) [3,5] и двумерные приближения Паде [6], которые будем называть 2-D PAs. Построим PAs по трем схемам: z_ϵ по ϵ_1 при $x = \text{const}, x \neq 0$; z_x по x при $\epsilon_1 = \text{const}, \epsilon_1 \neq 0$; 2-D PAs z_2 по ϵ_1 и X совместно. При построении 2-D PAs будем использовать методику В.В. Вавилова [6]. Если ограничиться диагональными приближениями первого порядка, то при $\epsilon = 1$ получим

$$z_\epsilon = \left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{6\epsilon - x}{6\epsilon + 2x}, \quad z_x = z_2 = \frac{2x}{2\epsilon + x}.$$

Видно, что z_ϵ , в отличие от z_x и z_2 , не устраняет особенность в точке $\epsilon = 0$.

Приближение НРМ [4] получим, если все члены уравнения (1) перенесем в левую часть и введем ϵ_1 следующим образом:

$$z' = \epsilon_1 (1 - z + (1 - \epsilon)z'), \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i \epsilon_1^i, \quad z = x\epsilon_1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + (1 - \epsilon)x\right) \epsilon_1^2 + \left(\frac{x^3}{3!} - (1 - \epsilon)x^2 + (1 - \epsilon)^2 x\right) \epsilon_1^3 + \dots \tag{4}$$

При $\epsilon_1 = 1$ получим

$$z = (1 + (1 - \epsilon) + (1 - \epsilon)^2 + (1 - \epsilon)^3 + \dots)x + \left(-\frac{1}{2!} - (1 - \epsilon) - 3(1 - \epsilon)^2 \frac{1}{2} + \dots\right)x^2 + \dots, \tag{5}$$

что соответствует (2) с учетом разложения его коэффициентов в ряд по степеням ϵ в окрестности $\epsilon = 1$. Произведем преобразование Паде и при $\epsilon_1 = 1$:

$$z_\epsilon = z_2 = \frac{2x}{2\epsilon + x}, \quad z_x = \frac{2(2 - \epsilon)^2 x}{2(2 - \epsilon) + x}.$$

Предлагаемому методу соответствует введение ϵ_1 следующим образом:

$$z' = \epsilon_1 \frac{1 - z}{\epsilon}, \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} z_i \epsilon_1^i, \quad z = \frac{x}{\epsilon} \epsilon_1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2 \epsilon_1^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{\epsilon}\right)^3 \epsilon_1^3 + \dots \tag{6}$$

При $\epsilon_1 = 1$ искомое приближение совпадает с (2). Аппроксиманты Паде в этом случае совпадают и имеют вид:

$$z_\epsilon = z_x = z_2 = \frac{2x}{2\epsilon + x}.$$

Таким образом, рассмотренный пример показывает, что:

- исходные уравнения ADM разрешены относительно старшей производной по независимой переменной, а НРМ - только в случае $\epsilon = 1$;
- коэффициенты приближения ADM после суммирования по приближениям соответствуют точному решению, а НРМ - разложению этих коэффициентов

по естественному малому параметру в окрестности единицы;

- оба приближения сходятся к истинному решению в области его голоморфности;

- предлагаемый метод позволяет получить точные значения коэффициентов решения без необходимости суммирования их по старшим приближениям.

3. Общая формулировка ADM и НРМ

Рассмотрим задачу в более общей постановке. Введем определение ADM и НРМ для систем ОДУ с использованием терминологии метода возмущения. Известно [7], что любое ОДУ или их система могут быть представлены нормальной системой ОДУ первого порядка относительно неизвестных функций $\{u_i = u_i(\xi)\}_{i=1}^n$ на интервале $W: x \in]0, 1[$ вида

$$\begin{aligned} Lu_i + R_i(\xi, u_1, \dots, u_n) + N_i(\xi, u_1, \dots, u_n) &= g_i(\xi), \\ L &= \frac{d}{d\xi}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (7)$$

с граничными условиями на границе $\partial\Omega: \xi = 0 \cup 1$

$$G_j(u_1, \dots, u_n)|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (8)$$

где L - оператор производной по независимой переменной ξ , R_i, N_i - линейный оператор от искомых функций, N_i и G_j - нелинейные операторы от искомых функций, $g_i = g_i(\xi)$.

Предположим также, что точка $\xi_0 = 0$ принадлежит замыканию Ω , а R_i и G_j - голоморфные функции по $\{u_i\}_{i=1}^n$. Согласно ADM, компоненты решения находятся из уравнений

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij}^{\Lambda}, \quad i = \overline{1, n}, \quad Lu_{ij}^{\Lambda} = A_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (9)$$

где A_{ij} - полиномы Адомяна [2]. Как было показано в [3], ADM эквивалентен разложению уравнения и его решения по степеням искусственного параметра λ при $\lambda = 1$, если ввести его следующим образом

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij}^{\Lambda} \lambda^j, \\ Lu_i + \lambda(R_i(u_1, \dots, u_n) + N_i(u_1, \dots, u_n)) &= g_i, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (10)$$

В случае НРМ уравнение не разрешено, вообще говоря, относительно старшей производной, поэтому система ОДУ может быть без потери общности приведена к виду

$$\begin{aligned} Lu_i + R_i(u_1, \dots, u_n) + N_i(u_1, \dots, u_n) + \\ + \delta_i^1 F(Lu_i, u_1, \dots, u_n) &= g_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (11)$$

где F - нелинейный дифференциальный оператор, δ_i^1 - дельта Кронеккера.

Параметр λ вводится следующим образом:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij}^H \lambda^j, \quad G_j\left(\left\{u_i|_{\partial\Omega}\right\}_{i=1}^n\right) = 0, \\ Lu_i + \lambda(Lu_i|_{\partial\Omega} + R_i + N_i + F\delta_i^1 - g_i) &= 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $u_i|_{\partial\Omega}$ - т. н. «пробные» функции, удовлетворяющие граничным условиям [4].

Предполагая $\left\{u_i = u_i(\xi)\right\}_{i=1}^n$ и их производные независимыми аргументами, представим операторы R_i, N_i, F и G_j в виде обобщенных многомерных рядов Тейлора вида

$$\begin{aligned} R_i + N_i &= \sum_{j=1}^n \left(N_{ij} u_j + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{ijp} u_j u_p + \dots \right), \quad i = \overline{1, n}, \\ F &= \left(F_0 Lu_i + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n F_{0p} u_p Lu_i + \dots \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(F_j u_j + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n F_{jpp} u_j u_p + \dots \right), \quad (13) \\ G_j &= \sum_{q=1}^n \left(G_{jq} (u_q - u_q|_{\partial\Omega}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n G_{jqp} (u_q - u_q|_{\partial\Omega})(u_p - u_p|_{\partial\Omega}) + \dots \right), \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Представим также коэффициенты разложения используемых операторов и функций g_i в виде рядов по степеням ξ :

$$\begin{aligned} N_{ij} &= \sum_{r=0}^{\infty} N_{ij}^r \xi^r, \quad N_{ijp} = \sum_{r=0}^{\infty} N_{ijp}^r \xi^r, \quad \dots, \quad i, j, p = \overline{1, n}, \\ F_j &= \sum_{r=0}^{\infty} F_j^r \xi^r, \quad F_{jpp} = \sum_{r=0}^{\infty} F_{jpp}^r \xi^r, \quad \dots, \quad j, p = \overline{0, n}, \\ g_i &= \sum_{j=0}^{\infty} g_{ij} \xi^j, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим теперь разложения (13), (14) в (10), сгруппируем и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ . Получим приближение для ADM в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= \xi^0 \left([u_i|_{\partial\Omega}] + [0] + [0] + \dots \right) + \xi^1 ([g_{i0}] + \\ &+ \left[- \left(\sum_{j=1}^n \left(N_{ij}^0 + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{ijp}^0 u_j|_{\partial\Omega} u_p|_{\partial\Omega} \right) + \dots \right) \right] + [0] + \dots \right) + \\ &+ \xi^2 \left(\left[\frac{g_{i1}}{2} \right] + \left[- \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left((N_{ir}^1 u_r|_{\partial\Omega} + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{irp}^1 u_r|_{\partial\Omega} u_p|_{\partial\Omega} + \dots \right) - \left(N_{ir}^0 \frac{g_{r0}}{2!} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{irp}^0 \left(\frac{g_{r0} u_p|_{\partial\Omega} + g_{p0} u_r|_{\partial\Omega} \right) + \dots \right) \right] + \dots \right) + \dots, \\ & \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично из (12) получим приближение для НРМ

$$\begin{aligned} u_i &= \xi^0 \left([u_i|_{\partial\Omega}] + [0] + [0] + \dots \right) + \\ &+ \left[g_{i0} - \sum_{r=1}^n \left((N_{ir}^0 + F_r^0) u_r|_{\partial\Omega} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \xi^1 \left[[0] + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n (N_{irp}^0 + F_{rpp}^0) u_r|_{\partial\Omega} u_p|_{\partial\Omega} + \dots \right] \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[- \left(F_0^0 + F_{00}^0 \sum_{p=1}^n u_p |_{\partial\Omega} \right) \left(g_{i0} - \sum_{r=1}^n \left((N_{ir}^0 + F_r^0) u_r |_{\partial\Omega} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n (N_{irp}^0 + F_{irp}^0) u_r |_{\partial\Omega} u_p |_{\partial\Omega} + \dots \right) \right) \right] + \dots + \\
 & + \xi^2 \left([0] + \left[\frac{g_{i1}}{2!} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left((N_{ir}^1 + F_r^1) u_r |_{\partial\Omega} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n (N_{irp}^1 + F_{irp}^1) u_r |_{\partial\Omega} u_p |_{\partial\Omega} + \dots \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \left[- \left(F_0^1 + F_{00}^1 \sum_{p=1}^n u_p |_{\partial\Omega} \right) \left(g_{i0} - \sum_{l=1}^n \left((N_{il}^0 + F_l^0) u_l |_{\partial\Omega} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n (N_{ilp}^0 + F_{ilp}^0) u_l |_{\partial\Omega} u_p |_{\partial\Omega} + \dots \right) \right] - \right. \\
 & \left. - \left(F_0^0 + F_{00}^0 \sum_{p=1}^n u_p |_{\partial\Omega} \right) \left(\frac{g_{i1}}{2} - \frac{1}{2!} \sum_{l=1}^n \left((N_{il}^1 + F_l^1) u_l |_{\partial\Omega} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n (N_{ilp}^1 + F_{ilp}^1) u_l |_{\partial\Omega} u_p |_{\partial\Omega} + \dots \right) \right) \right] + \\
 & \left. + \frac{n}{r=1} \left((N_{ir}^0 + F_r^0) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_{rj}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left((N_{il}^0 + F_l^0) u_l |_{\partial\Omega} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2!} \sum_{q=1}^n (N_{ilq}^0 + F_{ilq}^0) u_l |_{\partial\Omega} u_q |_{\partial\Omega} + \dots \right) \right) \right) + \\
 & \left. + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n (N_{irp}^0 + F_{irp}^0) \left(u_p |_{\partial\Omega} \left(\frac{g_{r0}}{2} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left((N_{rl}^0 + F_l^0) u_l |_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{q=1}^n (N_{rlq}^0 + F_{rlq}^0) u_l |_{\partial\Omega} u_q |_{\partial\Omega} \right) \right) \right) \right) + \\
 & \left. + u_r |_{\partial\Omega} \left(\frac{g_{p0}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left((N_{rl}^0 + F_l^0) u_l |_{\partial\Omega} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2!} \sum_{q=1}^n (N_{rlq}^0 + F_{rlq}^0) u_l |_{\partial\Omega} u_q |_{\partial\Omega} \right) \right) \right) + \dots + \dots, \\
 & i = \overline{2, n} : \\
 & u_i = \xi^0 \left(\left[u_i |_{\partial\Omega} \right] + [0] + [0] + \dots \right) + \xi^1 \left([0] + [g_{i0} - \right. \\
 & \left. - \sum_{r=1}^n \left(N_{ir}^0 u_r |_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{irp}^0 u_r |_{\partial\Omega} u_p |_{\partial\Omega} + \dots \right) \right] + [0] + \dots \right) \\
 & + \xi^2 \left([0] + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{g_{i1}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left(N_{ir}^1 u_r |_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{irp}^1 u_r |_{\partial\Omega} u_p |_{\partial\Omega} + \dots \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \left[- \sum_{r=1}^n \left(N_{ir}^0 \left(\frac{g_{r0}}{2} - \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left(N_{rl}^0 u_l |_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{q=1}^n N_{rlq}^0 u_l |_{\partial\Omega} u_q |_{\partial\Omega} + \dots \right) \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{irp}^0 \left(u_p |_{\partial\Omega} \left(\frac{g_{r0}}{2} - \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left(N_{rl}^0 u_l |_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{q=1}^n N_{rlq}^0 u_l |_{\partial\Omega} u_q |_{\partial\Omega} \right) \right) \right) \right] + u_r |_{\partial\Omega} \left(\frac{g_{p0}}{2} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left(N_{rl}^0 u_l |_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{q=1}^n N_{rlq}^0 u_l |_{\partial\Omega} u_q |_{\partial\Omega} \right) \right) + \dots + \dots + \dots$$

Квадратные скобки содержат выражения, соответствующие последовательным приближениям по степеням параметра.

Анализ соотношения решений ADM и НРМ непосредственно вытекает из связи операторов нелинейных ОДУ в нормальной и общей форме. В общем случае это сделать затруднительно, но, если ограничиться членами второго порядка в разложениях (15), то нормальная форма системы (12) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 & Lu_i + \sum_{j=1}^n \left(\frac{M_j}{1+F_0} u_j + \right. \\
 & \left. + \sum_{p=1}^n \frac{(N_{jip} + F_{jp})(1+F_0) - F_{0p}M_j - F_{0j}M_p}{4(1+F_0)^2} u_j u_p \right) = \\
 & = \frac{g_i}{1+F_0}, Lu_i + R_i(u_1, \dots, u_n) + N_i(u_1, \dots, u_n) = g_i, \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$M_j = N_{ij} + F_j, \quad i = \overline{2, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Иными словами, применение ADM к (17) эквивалентно применению НРМ к (12) с учетом в (15) членов не выше второго порядка.

Для нелинейного уравнения, содержащего естественный малый параметр при старшей производной ($F_0 = F_0^0 = \varepsilon - 1 = \text{const}, F_j \equiv F_{jp} \equiv 0, j, p = \overline{1, n}$) из формул (17) получаем, что в этом случае коэффициенты при степенях независимой переменной в решении НРМ представляют собой разложение коэффициентов ADM по ε в окрестности единицы.

4. Обобщенное суммирование аппроксимациями Паде

Определим область сходимости методов. Из соотношений (15)-(16) видно, что, если уравнение разрешено относительно старшей производной, то коэффициенты при одинаковых степенях переменной ξ решений ADM и НРМ стремятся друг к другу по мере возрастания порядка приближения. Поскольку в [3] показано, что решение ADM сходится к разложению истинного решения в ряд Тейлора в области его голоморфности в окрестности $\xi = 0$, то теми же свойствами будет обладать и решение НРМ в случае разрешенного уравнения. Это позволяет применить к приближениям в виде рядов мероморфное продолжение в виде аппроксимант Паде (PAs) [3,5]. Для ADM такое продолжение по параметру было предложено в [3]. В дальнейшем подобный подход был развит рядом авторов [8] и получил название модифицированного метода Адомяна и аппроксимации Паде (MADM-Pade). Таким образом, возможно использование PAs и для НРМ при его модификации путем разложения нелинейных членов в ряды по независимой переменной и искомым функциям (МНРМ-Pade).

Большие перспективы имеет использование для аналитического продолжения двумерного преобразования Паде-типа в форме В.В. Вавилова [6]. Эта методика позволяет однозначно определить коэффициенты аппроксиманты Паде с заданной структурой числителя и знаменателя, а также выполнить условия

теоремы типа Монтеессу де Болора, то есть обеспечить равномерную сходимость PAs к приближаемой функции при возрастании степени числителя и знаменателя во всей области ее мероморфности.

5. Модифицированный метод продолжения по параметру

Предлагаемый метод совпадает с НРМ при $F \equiv 0$, а с ADM – при $g \equiv 0$, и, таким образом, обобщает их. Метод не подразумевает введение в уравнение «пробных» функций, удовлетворяющих граничным условиям, – это происходит в процессе построения приближений и позволяет решать задачу при сложных граничных условиях [3]. Введем параметр λ по следующей схеме:

$$u_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij}^M \lambda^j, \quad Lu_i = \lambda(g_i - R_i - N_i),$$

$$G_i(u_1|_{\partial\Omega}, \dots, u_n|_{\partial\Omega})|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при степенях параметра λ , получим:

$$i = \overline{1, n} : u_i = \xi^0 \left([u_i|_{\partial\Omega}] + [0] + [0] + \dots \right) + \xi^1 \left([0] + [g_{i0} - \sum_{r=1}^n \left(N_{ir}^0 u_r|_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{irp}^0 u_r|_{\partial\Omega} u_p|_{\partial\Omega} + \dots \right)] + [0] + \dots \right) + \xi^2 \left([0] + \left[\frac{g_{i1}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left(N_{ir}^1 u_r|_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{irp}^1 u_r|_{\partial\Omega} u_p|_{\partial\Omega} + \dots \right) \right] + \left[- \sum_{r=1}^n \left(N_{ir}^0 \left(\frac{g_{r0}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left(N_{rl}^0 u_l|_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{q=1}^n N_{rlq}^0 u_l|_{\partial\Omega} u_q|_{\partial\Omega} + \dots \right) \right) + \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^n N_{irp}^0 \left(u_p|_{\partial\Omega} \left(\frac{g_{r0}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left(N_{rl}^0 u_l|_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{q=1}^n N_{rlq}^0 u_l|_{\partial\Omega} u_q|_{\partial\Omega} + \dots \right) \right) + u_r|_{\partial\Omega} \left(\frac{g_{r0}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left(N_{rl}^0 u_l|_{\partial\Omega} + \frac{1}{2!} \sum_{q=1}^n N_{rlq}^0 u_l|_{\partial\Omega} u_q|_{\partial\Omega} + \dots \right) \right) \right] + \dots \right] + \dots \right) + \dots$$

В [3] показано, что приближение по предлагаемому методу является разложением точного решения в ряд Маклорена и позволяет осуществить его аналитическое продолжение в область мероморфности при помощи аппроксимант Паде. Анализ полученного приближения говорит о том, что оно, в отличие от ADM и НРМ, дает (с точностью до разложения в ряд по искомым функциям) точные выражения для коэффициентов при степенях независимой переменной до степени, равной порядку приближения. Это гарантирует устойчивость вычислений последовательных приближений.

Уравнения статики геометрически нелинейных тонкостенных конструкций приводятся к разрешающим уравнениям, содержащим произведения и квадраты искоемых функций и их производных [9]. В этом

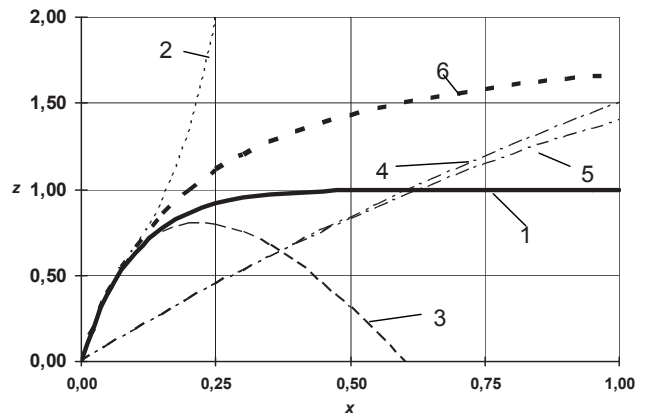
случае в решении (19) должны быть удалены все троечотия, кроме последнего.

6. Численные результаты

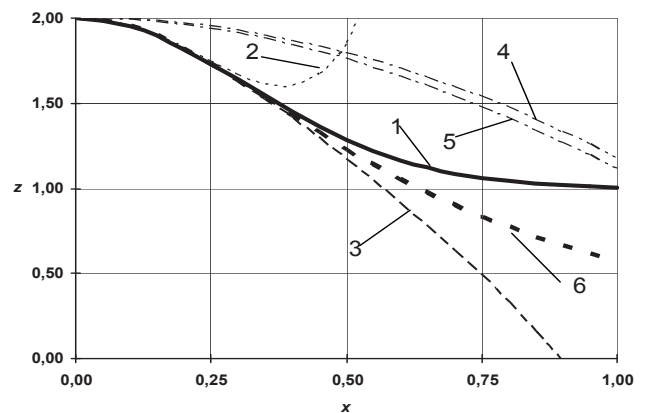
Характерное поведение приближений для граничной задачи (1) и задачи для линейного ОДУ с переменными коэффициентами вида

$$\varepsilon \frac{dz}{dx} + xz = x, \quad z(0) = 2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (20)$$

в случае $\varepsilon = 0,1$ показано на рис.1.



а)



б)

Рис. 1. Поведение решений начальных задач для ОДУ 1—точное решение, 2—ADM, 3—MADM-Pade по ε_1 , 4—НРМ, 5—МНРМ-Pade по x , 6—MADM-Pade по x , МНРМ-Pade по ε_1 , двумерные PAs по всем методам и одномерные по предлагаемому методу а) для задачи (1), б) для задачи (20)

Приближение ADM хорошо описывает точное решение только на отрезке, сравнимом с величиной естественного малого параметра. Погрешность решения НРМ существенно меньше, чем ADM, но оно плохо отражает характер точного решения, а именно явление погранслоя вблизи нуля. В то же время, аппроксиманта Паде по независимой переменной по ADM и по предложенному методу дает удовлетворительный количественный и качественный результат на всем рассматриваемом интервале.

Более сложная картина соотношения между различными приближениями возникает при рассмотрении существенно нелинейного неоднородного ОДУ, например, типа общего уравнения Риккати. К уравнению Риккати, не разрешаемому в квадратурах, приводит ряд задач теории оптимального управления, в ряде случаев к ним сводятся нелинейные дифференциальные уравнения Пенлеве [10], успешно используемые сейчас в теории солитонов. Рассмотрим уравнение, сингулярно возмущенное по естественному малому параметру ϵ в нуле совместно с начальным условием вида

$$\epsilon z' = z^2 + x, z(1) = 1, 0 < \epsilon \ll 1 \tag{21}$$

Общее решение задачи может быть получено только в специальных функциях в виде

$$z = -\epsilon \frac{\frac{1}{2x} + \frac{\frac{d}{dx} Y_\alpha \left(\frac{2}{3\epsilon} x^{\alpha+1} \right) - k \frac{d}{dx} J_\alpha \left(\frac{2}{3\epsilon} x^{\alpha+1} \right)}{Y_\alpha \left(\frac{2}{3\epsilon} x^{\alpha+1} \right) - a J_\alpha \left(\frac{2}{3\epsilon} x^{\alpha+1} \right)},$$

$$k = \frac{\left(\frac{2+\epsilon}{2\epsilon} Y_\alpha \left(\frac{2}{3\epsilon} \right) + \frac{d}{dx} Y_\alpha \left(\frac{2}{3\epsilon} \right) \right)}{\left(\frac{2+\epsilon}{2\epsilon} J_\alpha \left(\frac{2}{3\epsilon} \right) + \frac{d}{dx} J_\alpha \left(\frac{2}{3\epsilon} \right) \right)}, \alpha = \frac{1}{3},$$

где J_α, Y_α - функции Бесселя порядка α соответственно первого и второго рода.

Проведем замену переменной и получим эквивалентную (21) задачу вида

$$\epsilon z' = -z^2 + x - 1, z(0) = 1, 0 < \epsilon \ll 1. \tag{22}$$

Приближенное решение (22) по ADM получим в виде

$$z = 1 - \frac{2x}{\epsilon} + \left(\frac{1}{2\epsilon} + \frac{2}{\epsilon^2} \right) x^2 +$$

$$+ \frac{1}{60\epsilon^3} (-3x^5 + 15x^4 - 40x^3) - \frac{1}{60\epsilon^5} \left(\frac{3x^8}{8} + 3x^7 - \right.$$

$$\left. - \frac{(3\epsilon + 55)^2 x^6}{6} + (18\epsilon + 16)x^5 - \right.$$

$$\left. - (15\epsilon^2 + 50\epsilon)x^4 + 80\epsilon^2 x^3 \right).$$

Диагональные аппроксиманты Паде первого порядка для него имеют вид

$$z_\epsilon = 1 - \frac{x}{\epsilon} + \frac{x^2}{2\epsilon} + \frac{1}{60\epsilon^3} (3x^5 + 15x^4 -$$

$$- 40x^3 + 60\epsilon x^2 - 60\epsilon^2 x) (3x^5 + 15x^4 -$$

$$- 40x^3 + 60\epsilon x^2 - 60\epsilon^2 x + \left(-\frac{3x^8}{8} + 3x^7 - \right.$$

$$\left. - \frac{(3\epsilon + 55)^2 x^6}{6} + (18\epsilon + 16)x^5 - (15\epsilon^2 + \right.$$

$$\left. + 50\epsilon)x^4 + 80\epsilon^2 x^3 - 60\epsilon^3 x^2 \right)^{-1},$$

$$z_x = \frac{4\epsilon + (\epsilon - 6)x}{4\epsilon + (\epsilon + 2)x}, z_2 = \frac{4\epsilon + (2\epsilon - 6)x}{4\epsilon + (2\epsilon + 2)x}.$$

Приближенное решение (22) по НРМ получим в виде

$$z = 1 - 2(2 - \epsilon)x + \frac{(6 - \epsilon)}{2} x^2. \tag{23}$$

Диагональные аппроксиманты Паде первого порядка для (23) имеют вид:

$$z_\epsilon = 1 + \frac{3}{2} \frac{x(x-4)^2}{2x^2 + (3\epsilon - 12)x - 12\epsilon},$$

$$z_x = \frac{4(2 - \epsilon) + (-26 + 31\epsilon - 8\epsilon^2)x}{4(2 - \epsilon) + (6 - \epsilon)x},$$

$$z_2 = \frac{4\epsilon - (\epsilon - 4)x + 4\epsilon(\epsilon - 1)}{4\epsilon - (\epsilon - 4)x + 4x(2\epsilon - 1)}.$$

В соответствии с предлагаемым методом приближение имеет вид

$$z = 1 - \frac{2x}{\epsilon} + \left(\frac{1}{2\epsilon} + \frac{2}{\epsilon^2} \right) x^2 - \frac{x^3}{3\epsilon^2},$$

что в полном соответствии с [3] совпадает с первыми членами выражения для ADM. Диагональные аппроксиманты Паде первого порядка для предлагаемого метода имеют вид

$$z_\epsilon = 1 + \frac{3}{2} \frac{x(x-4)^2}{2x^2 + (3\epsilon - 12)x - 12\epsilon},$$

$$z_x = z_2 = \frac{4\epsilon + (\epsilon - 4)x}{4\epsilon + (\epsilon + 4)x}.$$

Видно, что Z_ϵ совпадает с аналогичным приближением НРМ.

Как видно из приведенных выражений, в существенно нелинейном случае практически все приближения различны. Это происходит из-за быстрого роста порядка исходного ряда, поэтому аппроксиманты Паде по искусственному параметру являются аналогом недиагонального 2-D PAs. Они оценивают решение снизу, что хорошо видно из анализа численных результатов при $\epsilon = 0, 2$, представленных на рис. 2. В целом же поведение приближений соответствует описанию для линейных задач.

Предложенный метод был применен для расчета деформирования и устойчивости длинной гибкой упругой круговой цилиндрической оболочки радиуса R с половинным центральным углом β_0 в случае цилиндрического изгиба под действием равномерного внешнего давления при шарнирном опирании продольных торцов. Соответствующая система разрешающих уравнений в нормальной форме приведена в [9]. Зависимости «безразмерная интенсивность давления P – относительный прогиб w/R » для вершины поперечного сечения оболочки при различных половинных углах и безразмерной гибкости $S = 10^{-4}$ приведены на рис. 3а, а зависимость безразмерной интенсивности предельной нагрузки $P_{кр}$ от величины половинного угла β_0 – на рис. 3б.

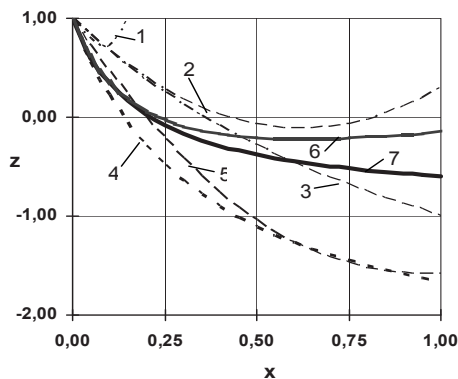


Рис. 2. Поведение решений начальных задач для уравнения Риккати
 1—ADM, 2—НРМ, 3—МНРМ-Pade по x, 4—MADM-Pade по x, 5— MADM-Pade по ε_1 , 6—МНРМ-Pade и PAs по предлагаемому методу по ε_1 , 7- PAs по x и 2-D PAs по предлагаемому методу

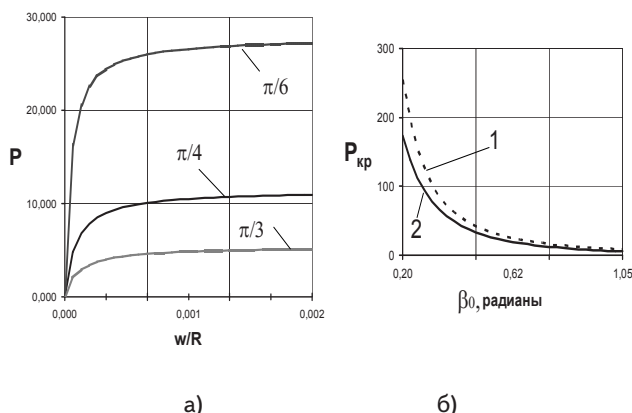


Рис. 3. Расчет оболочки при равномерно распределенной радиальной нагрузке. а) зависимость интенсивности давления P от прогиба w при различных значениях β_0 (величина указана возле кривых); б) зависимость предельных нагрузок $P_{кр}$ от β_0 (1 — данные [9], 2 — расчет)

Для сравнения на рис. 3б приведена также зависимость от β_0 критических нагрузок для нерастяжимой оболочки, полученная С.П. Тимошенко [9]. Видно, что зависимости хорошо согласуются, при этом учет продольного деформирования оси существенно влияет на величину критических нагрузок конструкции.

Предложенный метод может быть применен в комбинации с известными асимптотическими методами. Рассмотрим свободные колебания гибкой упругой круговой цилиндрической оболочки радиуса R, толщины h, и длины L, равномерно подкрепленной набором стрингеров, при шарнирном опирании по торцам.

Расчет произведем на основании смешанных динамических уравнений теории оболочек после расщепления их по естественным малым параметрам [11]. Форма радиального прогиба прогиба w, удовлетворяющая граничным условиям, задается в виде

$$w = f_1(t) \sin s_1 x_1 \cos s_2 x_2 + f_2(t) \sin^2 s_1 x_1.$$

Здесь f_1, f_2 - временные функции, связанные условием непрерывности перемещений $f_2 = 0,25R^{-1}s_2^2 f_1^2$, $s_1 = \pi m l^{-1}, s_2 = n$ - параметры, характеризующие волно-

образование вдоль образующей и направляющей соответственно. Разрешающие уравнения сводятся методом Бубнова – Галеркина к начальной задаче относительно $\xi = f_1 / R$ по $t_1 = t \sqrt{\frac{B_1}{\rho R^2}}$ (здесь все обозначения взяты в соответствии с [11])

$$\ddot{\xi} + \alpha \xi \left[\left(\dot{\xi} \right)^2 + \xi \ddot{\xi} \right] + A_1 \xi + A_2 \xi^3 + A_3 \xi^5 = 0,$$

$$\left(\dot{\cdot} \right) \equiv \frac{d(\cdot)}{dt_1}, t_1 = 0: \xi = f, \dot{\xi} = 0. \tag{24}$$

Применение к задаче (24) предлагаемого метода продолжения по параметру позволяет получить приближение второго порядка по искусственному параметру для частоты нелинейных колебаний Ω в виде

$$\Omega = \sqrt{\frac{1 + f^2(A_2/A_1) + f^4(A_3/A_1)}{(1 + \alpha f)}}$$

Видно, что колебания являются неизохронными. Это хорошо согласуется с ранее полученными результатами (рис. 4), при этом существенно сокращает объем вычислений (в [11] для получения близкого результата потребовалось приближение четвертого порядка).

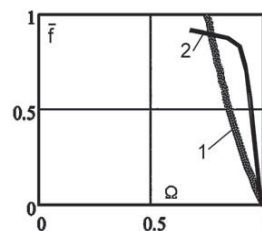


Рис. 4. Зависимость частоты колебаний стрингерной оболочки от амплитуды начального возмущения 1 - по предлагаемому методу, 2 - [11]

7. Выводы

В настоящей работе дано систематизированное изложение методов Адомяна и гомотопического возмущения. Получены выражения для аналитического расчета коэффициентов приближений по указанным методам. Проведено сравнение полученных приближений и определены условия их совпадения.

Предложен модифицированный метод продолжения по параметру, объединяющий оба подхода. Метод позволяет упростить процесс вычислений как на этапе построения модели, так и при ее дальнейшем использовании за счет получения точных значений коэффициентов ряда Тейлора решения с номером не превышающим номер приближения. Приведены выражения для расчета приближений по данному методу в общем случае и для нелинейности типа произведения и квадратов искомых функций.

Проанализировано применение дробно-рационального преобразования полученных полиномиальных приближений по схеме Паде для ускорения их сходимости и аналитического продолжения в область мероморфности. Сделан вывод о правомочности та-

кого преобразования по независимой переменной. Применена двумерная аппроксимация Паде по независимой переменной и искусственному параметру по схеме В.В. Вавилова. Показано, что такое преобразование позволяет выбрать наилучшую форму аппроксимации, обеспечивает удовлетворительное качественное поведение приближения и минимизирует его погрешность.

Проведено исследование численных результатов применения методов на трех модельных примерах при наличии возмущения по естественному малому параметру. Показано, что применение преобразования

Паде обеспечивает их достаточную точность на рассматриваемом участке. Сделан вывод о преимуществе приближений, полученных на основе предложенного в настоящей работе метода.

Произведены расчеты нелинейного деформирования и устойчивости гибкой упругой круговой цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении и свободных колебаний шарнирно опертой струнгерной оболочки, демонстрирующие эффективность и точность предлагаемого метода.

Эта работа была частично поддержана грантом Немецкого исследовательского фонда № WE736/25-1.

Литература

1. Дородницын А.А. Применение метода малого параметра к численному решению дифференциальных уравнений // *Соврем. проблемы матем. физики и вычисл. матем.* М.: Наука, 1982. С.145-155.
2. Adomian G. A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations// *Comp. Math. Appl.* 1989. Vol. 21. P.101-127.
3. Андрианов И.В., Олевский В.И., Токажевский С. Модифицированный метод декомпозиции Адомяна//*ПММ.* 1998. Том 62, №.2. С. 334-339.
4. He J.H. Recent developments of the homotopy perturbation method// *Top. Meth. Nonlin. Anal.* 2008. Vol.31. P. 205-209.
5. Андрианов И.В. Применение метода Паде-аппроксимант для устранения неоднородностей асимптотических разложений // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1984. №3. С.166-167.
6. Vavilov V.V., Tchobanou M.K., Tchobanou P.M. Design of multidimensional Recursive Systems through Padé Type Rational Approximation// *Nonlinear Analysis: Modelling and Control.* 2002. Vol. 7, № 1. P. 105-125.
7. Wasov W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations.* New York: John Wiley & Sons, 1965. 464 p.
8. Chrysos M., Sanchez F., Cherruault Y. Improvement of convergence of Adomian's method using Padé approximants//*Kybernetes.* 2002. Vol. 31, № 6. P. 884-895.
9. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. *Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела.* М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 232 с.
10. Орлов В.Н. Критерий существования подвижных особых точек решений дифференциального уравнения Риккати // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.* 2006. №6/1(46). С. 64-69.
11. Andrianov, I.V., Kholod, E.G., Olevsky, V.I. "Approximate non-linear boundary value problems of reinforced shell dynamics», *J. Sound Vibr.*, 1996. vol. 194, N 3, pp. 369 - 387.