

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА С ПОЛУ- ПРОСТРАНСТВОМ

Н. Н. Ткачук

Младший научный сотрудник
Кафедра «Колесные и гусеничные машины
им. А.А. Морозова»*

А. Н. Ткачук

Аспирант
Кафедра «Динамика и прочность машины»*
*Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002
Контактный тел.: (057) 707-69-02
E-mail: tma@kpi.kharkov.ua

У статті поставлена та розв'язана задача про взаємодію штампa с пружним напівпростором. Задача зведена до інтегрального рівняння. Для його розв'язання застосовано метод дискретних особливостей. Проведено параметричний аналіз моделі

Ключові слова: штамп, жорсткість, параметричний аналіз

В статье поставлена и решена задача о взаимодействии плоского штампа с упругим полупространством. Задача сведена к интегральному уравнению. Для его решения использован метод дискретных особенностей. Проведен параметрический анализ модели

Ключевые слова: штамп, жесткость, параметрический анализ

Interaction of a rigid punch with the elastic semispace is considered. A singular integral equation derived is solved by the method of discrete singularities. A parametric study of the model is performed

Keywords: stamp, inflexibility, analysis

Введение

Задача о взаимодействии плоского штампа с полупространством (полуплоскостью) является классической задачей теории контактного взаимодействия [1-11]. Как известно [1-3, 4-6], для случая прямолинейной формы активной части штампа (так называемый случай контакта тел «согласованной формы» [2]) на границе зон контактного сопряжения возникают особенности в распределении контактных давлений. Для случая контакта тел «несогласованной формы» [2] при известных ограничениях на геометрию поверхностей взаимодействующих тел [1, 3] контактное давление на границе области контакта обнуляется.

Описанные случаи являются модельными, т.к. речь идет о контакте гладких (без учета шероховатости поверхностного слоя) тел с номинальной (точной или некорректированной) геометрией. В то же время элементы реальных машиностроительных конструкций [4, 6-10] обладают вполне определенными конечными параметрами жесткости поверхностного слоя и радиусами скругления на границе области возможного контакта. Эти два фактора, взятые каждый в отдельности, приводят к существенному изменению характера распределения контактных давлений. Из бесконечных они становятся на границе контакта конечными или нулевыми [1, 4, 8]. В то же время особый интерес представляет вопрос анализа совместного влияния данных факторов на характер

истики распределения контактных зон и контактных давлений. Более того, для практики большое значение имеет решение обратной задачи, т.е. обоснование таких параметров контактной жесткости и радиуса скругления, которые приводили бы к требуемым (заданным) изменениям контактных зон и контактных давлений.

Учитывая, что аналитическое решение возникающей задачи затруднительно [1, 4], а численное решение при необходимости проведения многовариантных исследований достаточно ресурсозатратно, то представляет значительный интерес, актуальность и важность задача разработки и реализации оперативных и точных методов моделирования контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством (полуплоскостью) с учетом конечной контактной жесткости и радиуса скругления края (кромки).

Постановка задачи

Целью настоящей работы является совершенствование методов численного моделирования взаимодействия плоского штампа с полупространством (полуплоскостью). С точки зрения физической постановки новыми элементами являются совместный учет конечной контактной жесткости в сопряжении «штамп – полупространство» (фактор $1 - \beta$) и конечного радиуса

скругления на кромке штампа (фактор $2 - \alpha$). С точки зрения математической постановки предлагается применение достаточно эффективного метода сведения контактной задачи к интегральному уравнению [1]. С точки зрения дискретизации новизну составляет применение метода дискретных особенностей для решения сингулярных интегральных уравнений [11]. В дополнение к этому вводится обезразмеривание геометрических и физико-механических характеристик создаваемой модели, а также параметризация геометрической и численной моделей.

Метод решения

Рассмотрим контактное взаимодействие штампа с полупространством в двумерной постановке (рис. 1).

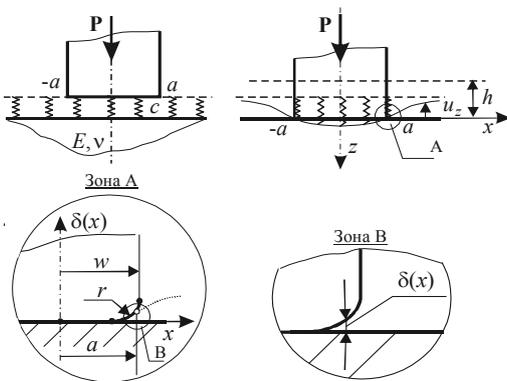


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия штампа с полупространством

Связь между контактным давлением и перемещениями представим в виде:

$$p(x) = p_0 - c[u_z(x) + \delta(x)], \tag{1}$$

где p_0 – некоторая константа; c – контактная жесткость; $u_z(x)$ – перемещение точек поверхности в зоне контакта; $\delta(x)$ – профиль штампа.

Как известно [2], в отсутствие трения контактные давления и перемещения на границе полупространства в зоне контакта $[-a, a]$ связаны сингулярным интегро-дифференциальным уравнением

$$\int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = -\frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} u_z'(x), \tag{2}$$

которое приводится только к искомому давлению (перемещение исключается):

$$\left| u_z'(x) = -\frac{1}{c} p'(x) - \delta'(x) \right| \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s} ds = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{c} p'(x) + \delta'(x) \right], \tag{3}$$

заменой

$$\{x = at_0; s = at; ds = adt \Rightarrow p'(t) = p'(s) \frac{ds}{dt} = ap'(s)\}$$

уравнение (3) приводится к интегрированию на интервале $[-1; 1]$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{t_0-t} dt = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{c \cdot a} p'(t_0) + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \delta'(at_0). \tag{4}$$

От неизвестных давлений требуем выполнения условия

$$\int_{-1}^1 p(t) dt = \frac{P}{a}, \tag{5}$$

где P – усилие, приложенное к штампу.

Вводим параметр $\kappa = \left[\frac{E}{2(1-\nu^2)} \right] (1/c \cdot a)$ и получаем окончательную систему уравнений

$$\left\{ \kappa p'(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{t_0-t} dt = g(t_0); \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) dt = \frac{1}{\pi} \frac{P}{a}, \right. \tag{6}$$

где $g(t_0) = -\left[\frac{E}{2(1-\nu^2)} \right] \delta'(at_0)$.

Для плоского штампа со скруглениями имеем

$$\delta'(x) = \begin{cases} 0, & |x| < w-r; \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{r^2 - [x - (w-r)]^2}} \right\rangle \text{sign}(x), & w-r \leq |x| \leq w, \end{cases}$$

где w – полуширина штампа; r – радиус скругления.

Видим, что в скруглении

$$\delta'\left(\frac{x}{w}\right) = \delta'\left(\frac{x}{w}\right) = \delta'\left(\left[\frac{x}{w} - \left(1 - \frac{r}{w}\right) \right] / \left[\sqrt{\left(\frac{r}{w}\right)^2 - \left[\frac{x}{w} - \left(1 - \frac{r}{w}\right) \right]^2} \right] \right) \text{sign}\left(\frac{x}{w}\right);$$

$$\delta'(\varphi t_0) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - [\varphi t_0 - (1-\alpha)]^2}} \right\rangle \text{sign}(t_0),$$

где r/w – безразмерный параметр, полностью характеризующий степень скругленности; $\varphi = a/w$ – неизвестное отношение ширины зоны контакта и ширины штампа ($a \leq w$).

Приближенное решение системы уравнений (6) с помощью квадратурных формул приводит к выражению

$$\left\{ \kappa p'(t_{0j}^n) + \sum_{k=1}^N \frac{p(t_k^n) \sqrt{1-(t_k^n)^2}}{t_k^n - t_{0j}^n} \cdot \frac{1}{n} = g(t_{0j}^n), j = \overline{1, n-1}; \right. \tag{7}$$

$$\left. \sum_{k=1}^N p(t_k^n) \sqrt{1-(t_k^n)^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \frac{P}{a} \right.$$

Здесь использованы квадратурная формула для сингулярного интеграла ([11])

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_{2n}(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=1}^N \frac{p_{2n}(t_k^n)}{t_k^n - t_0} \cdot \frac{1}{n} + \frac{p_{2n}(t_0)}{T_n(t_0)} U_{n-1}(t_0) \tag{8}$$

в точках $t_0 = t_{0j}^n, j = \overline{1, n-1}$ корней чебышевских полиномов T, U , и

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p_{2n-1}(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=1}^N p_{2n}(t_k^n) \cdot \frac{1}{n} \tag{9}$$

для регулярного.

Чтобы однозначно записать систему уравнений относительно n неизвестных узловых значений $\{p(t_k^n)\}_{k=1}^n$, необходимо выразить через них

$p'(t_{0j}^n)$, $j=1, n-1$. Если искать приближенное решение как интерполяционный полином $p(t) \approx \sum_{k=1}^N L_{n-1,k}^1(t) \cdot p(t_k^n)$, где $L_{n-1,k}^1(t) = T_n(t) / [T_n'(t_k^n) \cdot (t - t_k^n)]$, то

$$p'(t_{0j}^n) \approx \sum_{k=1}^N \left(L_{n-1,k}^1(t) \right)' \Big|_{t=t_{0j}^n} \cdot p(t_k^n), \quad (10)$$

и для нахождения приближенных значений его производных нас интересуют коэффициенты

$$d_{jk} = \left(L_{n-1,k}^1(t) \right)' \Big|_{t=t_{0j}^n}; \quad (11)$$

$$\left(L_{n-1,k}^1(t) \right)' = \frac{T_n'(t)(t - t_k^n) - T_n(t) T_n'(t_k^n)}{T_n'(t_k^n) \cdot (t - t_k^n)^2} = \frac{1}{n} (-1)^{j-k} \frac{\sqrt{1 - (t_k^n)^2}}{(t_{0j}^n - t_k^n)^2} =: d_{jk}. \quad (12)$$

Отсюда $p'(t_{0j}^n) = \sum_{k=1}^N d_{jk} \cdot p(t_k^n)$. В итоге первое $(n-1)$ уравнение системы (7) можем записать как

$$\kappa \sum_{k=1}^N \frac{1}{n} (-1)^{j-k} \frac{\sqrt{1 - (t_k^n)^2}}{(t_{0j}^n - t_k^n)^2} p(t_k^n) + \sum_{k=1}^N \frac{p(t_k^n) \sqrt{1 - (t_k^n)^2}}{t_k^n - t_{0j}^n} \cdot \frac{1}{n} = g(t_{0j}^n), \quad j=1, n-1$$

Таким образом, получаем окончательно

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \frac{1}{n} \sqrt{1 - (t_k^n)^2} \left\{ \kappa \frac{(-1)^{j-k}}{(t_{0j}^n - t_k^n)^2} + \frac{1}{t_k^n - t_{0j}^n} \right\} p(t_k^n) = g(t_{0j}^n); \\ \sum_{k=1}^N p(t_k^n) \sqrt{1 - (t_k^n)^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\pi a} P, \end{cases} \quad (13)$$

что является разрешающей системой линейных алгебраических уравнений, состоящей из n уравнений с неизвестными узловыми значениями $\{p(t_k^n)\}_{k=1}^n$.

Данная система разрешающих уравнений имеет плотно заполненную матрицу коэффициентов. Для этой матрицы характерно (в силу особенностей дискретизируемых сингулярных уравнений [11]) диагональное преобладание. Таким образом, применение прямых и итерационных методов решения системы линейных алгебраических уравнений (13) не приводит к численной неустойчивости, хотя требует больших вычислительных затрат, т.к. получаемые матрицы являются матрицами общего вида. Следует отметить, что получаемое решение будет распределением давлений при заданном φ , т.е. при определенной ширине зоны контакта. В целом же эта величина является неизвестной и находится путем интегрирования из условий обнуления распределения контактных давлений на краях зоны контакта, т.е. $p(\pm 1) = 0$.

Интерес представляет влияние указанных выше факторов на характер распределения контактных давлений. С этой целью вводятся безразмерные варьируемые параметры: $\alpha = \frac{r}{w}$; $\beta = \frac{E}{2(1-\nu^2) c \cdot w} \cdot \frac{1}{\gamma}$; $\gamma = \frac{P}{c w^2}$, где α описывает степень скругленности; β – относительную величину контактной жесткости, а γ – относительную интегральную нагруженность поверхности штампа.

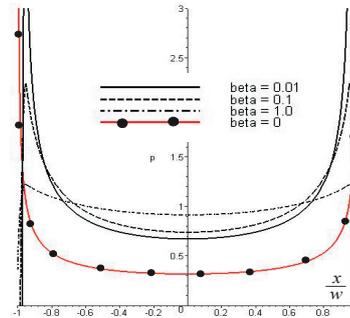


Рис. 2. Распределение относительных контактных давлений при различной контактной жесткости; относительный радиус скругления равен 0.05, уровень нагрузки - 0.1

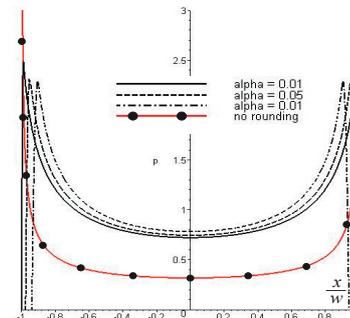


Рис. 3. Распределение относительных контактных давлений при различной степени скругленности; уровень контактной жесткости 0.1, уровень нагрузки - 0.05

Уравнения (13) приводим к виду:

$$\begin{cases} \beta \frac{1}{\varphi} p'(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(t)}{t - t_0} dt = -\beta c w \delta'(\varphi t_0); \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(t) dt = \frac{1}{\pi a} P. \end{cases} \quad (15)$$

Эту систему удобно решать относительно $\tilde{p}(t)$:

$$p(t) = \frac{P}{2w} \tilde{p}(t), \quad (16)$$

являющегося распределением концентрации контактных давлений.

Окончательная система

$$\begin{cases} \beta \frac{1}{\varphi} \tilde{p}'(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{p}(t)}{t - t_0} dt = -\frac{2\beta}{\gamma} \delta'(\varphi t_0); \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{p}(t) dt = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\varphi}, \end{cases} \quad (17)$$

решается численно описанным выше способом.

Численные результаты

Численное решение задачи контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством обеспечивает возможность получения семейства распределений контактных давлений, в качестве параметров которых выступают контактная жесткость (или параметр β) и радиус скругления (или параметр α). На рис. 2, 3 приведены некоторые характерные распределения относи-

тельных контактных давлений. Кроме того, представляется возможным построение обобщенных зависимостей характеристик контактных давлений (например, максимальных давлений p_{max} как функции аргументов α, β), одна из которых приведена на рис. 4.

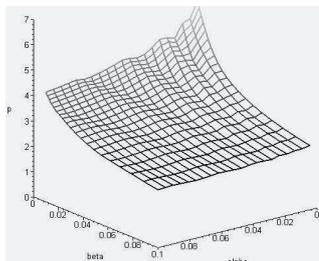


Рис. 4. Зависимость максимальной концентрации контактных давлений от степени скругленности и контактной жесткости, уровень нагрузки - 0.05

С учетом того, что для различных радиусов скругления и различных интегральных усилий внедрения штампа получается различная ширина контактной области $2a$, то при этом изменяется искомый характер распределения контактных давлений, удовлетворяющих системе уравнений (6). При этом также изменяются положения узлов дискретизации в формулах (8), (9). Таким образом, в ходе итерационного уточнения области контакта изменяется также и базис дискретизации. Однако для задачи с малыми относительными радиусами скругления данный эффект миграции узлов дискретизации (при достаточно большом их количестве) сказывается несущественно.

Заключение

Анализ представленных результатов дает основание сделать вывод о том, что каждый из варьируемых факторов (и контактная жесткость, и радиус скругления кромки) очень сильно влияет на распределение контактных давлений. Как и ожидалось, контактные давления на границе области контакта становятся конечными (нулевыми).

При увеличении жесткости контактного слоя и уменьшении радиуса скругления кромки распределения контактных давлений стремятся к распределению в предельном случае. При этом такое стремление наблюдается по любому произвольному пути в плоскости параметров (α, β) .

В то же время существует качественная особенность по параметру α : при любом его ненулевом значении контактные напряжения на границе равны нулю, а при нулевом возможны 2 случая (конечность при $0 < c < \infty$ и стремление к бесконечности при $c \rightarrow \infty$).

Таким образом, если принять в качестве контролируемого параметра p_a значение контактного давления на границе области контакта, то для функции $p_a(\alpha, \beta)$ неприменим предельный переход по параметру α .

Упомянутая особенность в распределении p_a не присуща зависимости $p_{max}(\alpha, \beta)$. При этом полученная обобщенная зависимость дает возможность оперативного решения как прямой, так и обратной задачи (т.е. определение p_{max} по заданным α, β , а также определение сочетаний α, β , соответствующих заданному p_{max}).

Если существует ограничение $p_{max} \leq [p]$, где $[p]$ – некоторое заданное предельное значение контактных давлений, то оно в плоскости (α, β) определяет некоторую область K . В пределах этой области можно решать любую оптимизационную процедуру, в которой данное неравенство является ограничением.

Таким образом, предложенный полуаналитический метод моделирования контактного взаимодействия плоского штампа с полупространством (полуплоскостью) предоставляет в руки исследователя удобный, точный, экономичный инструмент анализа влияния факторов жесткости контактного слоя и радиуса скругления кромки на контактные давления, а также решение обратной задачи синтеза параметров по критерию ограничения контактного давления.

Поскольку никаких принципиальных ограничений на количество и природу варьируемых факторов не накладывалось, то предложенный подход естественным образом может быть обобщен на большее множество параметров. Потребуется только модификация выражений в исходном интегральном уравнении. При этом необходимо иметь в виду возможность появления особенностей в распределении контролируемых величин от варьируемых параметров в областях, примыкающих к координатным псевдоплоскостям или координатным псевдоосям, а также к «началу координат».

В дальнейшем планируется применить предложенный подход к решению прикладных задач анализа контактного взаимодействия.

Литература

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 303 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
3. Александров В.М. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В.М. Александров, М.И. Чебаков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 304 с.
4. Механика контактных взаимодействий. / Отв. ред. И.И. Ворович, В.М. Александров – М.: Физматлит, 2001. – 672с.
5. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
6. Коваленко Е.В. Контактные задачи для тел с покрытиями / Е.В. Коваленко. – М.: Физматлит, 2001. – С.459–475.
7. Крагельский И.В. Основы расчетов на трение и износ / Крагельский И.В., Добычин М.Н., Камбалов В.С. – М.: Машиностроение, 1977. – 576 с.
8. Бабешко В.А. Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах / Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. // Докл. АН СССР, 1981. – Т. 257, № 2. – С. 289-294.
9. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей / Н.Б. Демкин. – М.: наука, 1970. – 228 с.
10. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел / И.Г. Горячева // Прикл. матем. и мех., 1979. – Т 43. – Вып. 1. – С. 99-105.
11. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю.В. Гандель. – Харьков: ХНУ, 2001. – 92 с.