УДК 656.61.052

ВИКОРИСТАННЯ АЛГОРИТМУ ПОСЛІДОВНОГО АНАЛІЗУ НАВІГАЦІЙНИХ РЕАЛІЗАЦІЙ ДЛЯ СТВОРЕННЯ ТЕОРЕТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

С.Ю. Інфімовський
Кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
Начальник відділу розслідування, обліку та профілактики аварійних подій - старший державний інспектор
Державна морська інспекція з безпеки судноплавства
Головної державної інспекції України з безпеки судноплавства
Державна морська інспекція з безпеки судноплавства
Держфлотінспекції України
вул. Ланжеронівська 1, м. Одеса, Україна, 65026
Контактний тел.: (048)785-44-72, 050-360-82-41
E-mail: SInfimovsky_GGMI@mail.ru

Розглядається можливість застосування методу послідовного аналізу навігаційних реалізацій у навігаційному полі морської поверхні для динаміко-стохастичної моделі оцінки стану навігаційного поля на основі моделювання процесів, що відбуваються в керованому динаміко-стохастичному навігаційному полі в інтересах підвищення точності супутникового навігаційного забезпечення безпеки мореплавства

Ключові слова: навігаційні реалізації, динаміко-стохастичне навігаційне поле, безпека мореплавства

Рассматривается возможность применения метода последовательного анализа навигационных реализаций в навигационном поле морской поверхности для динамико-стохастической модели оценки состояния навигационного поля на основе моделирования процессов, происходящих в управляемом динамико-стохастическом навигационном поле в интересах повышения точности спутникового навигационного обеспечения безопасности мореплавания

Ключевые слова: навигационные реализации, динамико-стохастическое навигационное поле, безопасность мореплавания

The opportunity of application of a method of the consecutive analysis of navigating realizations in a navigating field of a sea surface for dynamics-stochastic model of an estimation of a condition of a navigating field on the basis of modeling processes that take place in an operated dynamics-stochastic navigating field in interests of increase of accuracy of a satellite navigating safety of navigation

Keywords: navigating realizations, a dynamics-stochastic navigating field, safety navigation

Рівняння статичної механіки являють собою фізичні обмеження, які накладаються на випадкові поля похибок обсервацій навігаційного поля морської поверхні. Детерміновані складові цих полів виступають як осереднені до певних просторово-часових масштабів істинні поля. Різність між осередненими та істинними полями дають випадкові складові.

Вибір теоретичної частини динаміко-стохастичної моделі еквівалентний розподіленню реальних полів похибок обсервацій навігаційного поля морської поверхні на детерміновані та випадкові складові. Інформація, необхідна для стеження за еволюцією детермінованих складових, які знаходиться у початкових та крайових умовах теоретичної частини моделі. Інформація про випадкову складову міститься у навігаційних реалізаціях полів похибок обсервацій.

Реалізації випадкових складових обираються з ансамблю навігаційних вимірів поля похибок обсервацій, які надходять у процесі його аналізу. Тому сама випадкова складова кожного з полів похибок обсерваций розподіляється на дві компоненти. Одна описує осереднену частину складової й по суті являє собою поле умовних середніх значень, по відношенню до системи навігаційних вимірювань. Інша – є чисто випадковою й вміщує в себе ту частину реального поля. Яка не тільки не може бути врахована теоретичною моделлю, але знаходиться за межами точності навігаційних вимірювальних приладів. У цю, найбільш високочастотну, компоненту повинні бути включені всілякі похибки моделювання істинного навігаційного поля морської поверхні.

Використовуючи погляди до динаміко-стохастичного підходу, які виказані у роботах А. Балакришнана [1], Ж. Ліонсу [5], Р. Калману [8], І. Сакави [11], С. Цафестасу [13], на сучасну теорію систем, у цьому та наступних підрозділах, ґрунтуючись на теорії управління здійснимо розробку оптимальних методів використання текучої навігаційної інформації про поля похибок обсервацій щодо створення теоретичних моделей стохастичних систем з розподіленими параметрами у динаміко-стохастичних моделях навігаційного поля морської поверхні.

Одним з перших додатків теорії оптимальної фільтрації у системах з розподіленими параметрами були роботи Д. Пітерсена [9, 10]. Д. Пітерсен використовував модель поля К. Гауса – А. Маркова, яка являє собою узагальнення оптимального фільтру Р. Калману на випадкові поля.

Заснований на цьому підході **метод співставлення теоретичних оцінок та навігаційних реалізацій** можна вважати **методом послідовного аналізу навігаційних реалізацій**.

Метою даної статті є розгляд застосування методу послідовного аналізу навігаційних реалізацій для співставлення теоретичних оцінок та виконаних навігаційних реалізацій у ході точностних оцінок навігаційного поля морської поверхні.

Оскільки реальні поля похибок обсервацій у навігаційному полі морської поверхні описуються нелінійними рівняннями динаміки, то мова піде про спрощену, лінеаризовану динамічну модель поля похибок обсервацій. Основним міркуванням, що полягає в основі методу послідовного аналізу навігаційних реалізацій є існування лінійного закону, котрому підпорядкована динаміка поля похибок обсервацій, яке досліджується, або сукупність взаємопов'язаних між собою полів похибок обсервацій. Динамічна модель поля похибок обсервацій може бути використана, наприклад, для досліджень ухилень від осереднених значень реальних полів похибок обсервацій та на протязі малих, у порівнянні з часовими масштабами осереднення, інтервалів часу.

Отже, надамо рівняння динаміки лінеаризованої динамічної моделі поля похибок обсервацій у виді

$$\frac{\partial\alpha(\vec{x},t)}{\partial t}+\int\limits_{(\vec{x})}G(\vec{x},t;\vec{y},t)\alpha(\vec{y},t)=f(\vec{x},t), \qquad (1)$$

де $\alpha(\vec{x},t)$ – скалярна або векторна функція, що описує просторово-часове поле похибок обсервацій навігаційного поля морської поверхні;

$G(\vec{x},t;\vec{y},s)$, $t\rangle s$, – функція Г. Грину;

$f(\vec{x},t)$ – функція збудження, яка моделює зовнішній енергетичний вплив на поле.

Рівняння (1) є аналогом рівняння стану одномірного фільтру Р. Калману

$$\begin{aligned}\vec{x}_k&=\Phi_{k,k-1}\vec{x}_{k-1}+\vec{W}_{k-1},\\ \vec{z}_k&=H_k\vec{x}_k+\vec{V}_k.\end{aligned} \qquad (2)$$

воно описує поведінку деякої лінійної динамічної системи з розподіленими параметрами [9, 12]. Досліджуване поле похибок обсервацій $\alpha(\vec{x},t)$ є виходом цієї системи, що збуджується полем $f(\vec{x},t)$ з боку входу. Функція Г. Грину $G(\cdot)$ характеризує реакцію системи на збудження й по суті може розглядатися як еквівалент перехідної функції фільтру Р. Калману (2).

Рішення рівняння (1) можна записати у виді

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{x},t)=&\int\limits_{(\vec{x})}G(\vec{x},t;\vec{y},t_0)\alpha(\vec{y},t_0)d\vec{y}+\\ &+\int\limits_{(\vec{x})}\int\limits_{t_0}^{t}G(\vec{x},t;\vec{y},\tau)f(\vec{y},\tau)d\vec{y}d\tau\end{aligned}. \qquad (3)$$

Як і при одномірному випадку, для знаходження алгоритму оптимального фільтру необхідно, щоб функція збудження системи $f(\vec{x},t)$ мала властивості білого шуму за часом та не була корельованою зі значеннями поля похибок обсервацій

$$\begin{aligned}&E\{f(\vec{x},t)\alpha(\vec{y},t)\}=0;\\ &E\{f(\vec{x},t)\alpha(\vec{y},t)\}=F(\vec{x},\vec{y},t)\delta(t-\tau);\\ &E\{f(\vec{x},t)\}=0.\end{aligned} \qquad (4)$$

Оптимальною, відносно середньоквадратичної похибки, оцінкою поля похибок обсервацій у майбутній момент часу t є поле умовних середніх значень $\hat{\alpha}(\vec{x},t)$, яке індуційовано всіма доступними навігаційним вимірам значеннями $\alpha(\vec{x},t_0)$ при $t\rangle t_0$. Знаходячи умовне середнє значення виразу (3) з врахуванням (4) маємо

$$\hat{\alpha}_0(\vec{x},t)=E_0\{\alpha(\vec{x},t)\}=\int\limits_{(\vec{x})}G(\vec{x},t;\vec{y},t_0)E_0\{\alpha(\vec{y},t_0)\}d\vec{y}, \qquad (5)$$

де через $E_0\{\alpha(\vec{y},t_0)\}$ позначено умовне математичне очікування поля похибок обсервацій по відношенню до усіх навігаційних спостережень, які надійшли на момент часу t_0 включно.

У межах корельованості моделі поля похибок обсервацій рівнянням (5) можна прогнозувати його значення. Для цього, як слідує з (5), необхідно вирішити рівняння динаміки (1) з початковими умовами $E_0\{\alpha(\vec{y},t_0)\}$, які являють собою мапу просторових розподілень поля похибок обсервацій у початковий момент часу t_0.

У [2, 3] було показано, що мапи просторових полів похибок обсервацій доцільно будувати на основі методу об'єктивного аналізу. Таким чином, оптимальний прогноз поля похибок обсервацій знаходиться шляхом застосування рівняння (5) до мапи поля похибок обсервацій, розрахованої за допомогою оптимальної інтерполяції виміряних значень навігаційного параметру у вузлах сітки. Оптимальна інтерполяція за простором та оптимальний прогноз за часом послідовно виконуються для кожного інтервалу часу $[t_0,t]$.

Слідує врахувати, що як і при інтерполяції, так і при прогнозуванні поля похибок обсервацій неминучі похибки, які виникають за рахунок недостатнього об'єму навігаційних спостережень та спрощеної динамічної моделі поля похибок обсервацій (за часом). Тому на кожному кроці екстраполяції поля похибок обсервацій необхідна послідовна корекція оцінок його значень. Виправлення похибок обсервацій у методі фільтрації Р. Калману – Д. Петерсена відбувається завдяки використанню навігаційної інформації, яка міститься у текучих значеннях навігаційних вимірів поля похибок обсервацій. Процедура виправлення похибок обсервацій складає основу **методу послідовного аналізу навігаційних спостережень**.

Уявимо навігаційні спостереження поля похибок обсервацій $\vec{\alpha}(x,t)$ у виді лінійної операції, застосованої до миттєвого просторового розподілення значень поля похибок обсервацій [9]:

$$\beta_k(t)=\int_{(\vec{x})}\alpha(\vec{y},t)g_k(\vec{y},t)d\vec{y}+n_k(t). \qquad (6)$$

Функцію $n_k(t)$, яка враховує похибки навігаційних вимірювань, будемо вважати білим шумом. Функція $g_k(\vec{y},t)$ враховує одночасно просторове осереднення та інерційні властивості навігаційного пристрою або методу навігаційного виміру поля похибок обсервацій.

За аналогією з рівнянням (5) запишемо вираз для прогнозованої на момент часу t величини виміру поля похибок обсервацій у точці $\vec{x}_k$:

$$\hat{\beta}_k(t)=\int_{(\vec{x})}\hat{\alpha}(\vec{y},t)d_k(\vec{y},t)d\vec{y}. \qquad (7)$$

Позначимо t_{-1} – момент часу, у який надійшли найбільш пізні навігаційні виміри перед текучим моментом часу t_0. Якщо усі ці навігаційні виміри були використані для створення мапи поля похибок обсервацій на момент часу t_{-1}, то значення мапи позначимо $\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_{-1})$. Прогностична мапа, яка створена на момент часу t_0 при використанні тих самих навігаційних спостережень, буде позначена як $\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)$.

Введемо до розгляду похибки у передріканні навігаційних вимірювань на момент часу t_0

$$\tilde{\beta}_k(t)=\beta_k(t_0)-\hat{\beta}_{k-1}(t). \qquad (8)$$

Оскільки величини $\vec{\beta}_k(t_0)$, за допомогою геометричної інтерпретації методу найменших квадратів [4, 6, 7], ортогональні множині даних навігаційних спостережень, які отримано на момент часу t_{-1} та, отже, містять усю нову навігаційну інформацію про поле похибок обсервацій на момент часу t_0. Це означає, що оптимальна оцінка поля похибок обсервацій у момент часу t_0 повинна складатися з прогностичної мапи $\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)$, до якої оптимальним способом додані значення поля нев'язок прогнозу

$$\hat{\alpha}_0(\vec{x},t_0)=\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)+\sum_{k=1}^{N_0}\Delta_k(\vec{x},t_0)\tilde{\beta}_k(t_0). \qquad (9)$$

Вагові коефіцієнти $\Delta_k(\vec{x},t_0)$ повинні вибиратися з умови мінімуму похибки

$$\varepsilon_0(\vec{x},t_0)=E\left\{\left|\alpha(\vec{x},t_0)-\hat{\alpha}_0(\vec{x},t_0)\right|^2\right\}. \qquad (10)$$

Для знаходження вагових коефіцієнтів надамо умову ортогональності лінійної середньоквадратичної оцінки

$$E\left\{\left[(\alpha\vec{x},t)-\hat{\alpha}_0(\vec{x},t_0)\right]\beta_k(t_m)\right\}=0,$$
$$k=1,2,\ldots,N_m;\quad m=0,\,-1,\,-2,\ldots. \qquad (11)$$

Підставляючи (9) у (11), отримаємо

$$E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)-\sum_{l=1}^{N_0}\Delta_l(\vec{x},t_0)\tilde{\beta}_l(t_0)\right]\beta_k(t_m)\right\}=0, \qquad (12)$$
$$k=1,2,\ldots,N_m;\quad m=0,\,-1,\,-2,\ldots.$$

Для моменту часу рівняння (12) має вид

$$E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)-\sum_{l=1}^{N_0}\Delta_l(\vec{x},t_0)\tilde{\beta}_l(t_0)\right]\beta_k(t_m)\right\}, \qquad (13)$$
$$k=1,2,\ldots,N_0.$$

Визначимо кореляційну функцію похибок прогнозу

$$P_0(\vec{x},\vec{y})=E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)\right]\left[\alpha(\vec{y},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{y},t_0)\right]\right\}. \qquad (14)$$

Будемо вважати, що похибки проведених навігаційних реалізацій $n_k(t)$ некорельовані зі значеннями поля похибок обсервацій. Тоді, підставляючи (6) – (8) у (13) отримаємо

$$\int_{(\vec{x})}g_k(\vec{y},t_0)P_0(\vec{x},\vec{y})d\vec{y}=\sum_{l=1}^{N_0}\Delta_l(\vec{x},t_0)\times$$
$$\times\left[\int_{(\vec{x})}\int_{(\vec{x})}g_k(\vec{z},t_0)g_l(\vec{y},t_0)P_0(\vec{y},\vec{z})d\vec{y}d\vec{z}+R_{kl}(t_0)\right]; \qquad (15)$$

$$R_{kl}(t_0)\equiv E\left\{n_k(t_0)n_l(t_0)\right\}. \qquad (16)$$

Позначимо у рівнянні (15) вираз у квадратних дужках K_{kl}. Тоді маємо

$$K_{kl}(t_0)=\int_{(\vec{x})}\int_{(\vec{x})}g_k(\vec{z},t_0)g_l(\vec{\omega},t_0)P_0(\vec{y},\vec{\omega})d\vec{y}d\vec{\omega}+R_{kl}(t_0)=$$
$$=\left\{\left[\int_{(\vec{x})}g_k(\vec{z},t_0)\left[\alpha(\vec{z},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{z},t_0)\right]d\vec{z}+n_k(t_0)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\int_{(\vec{x})}g_l(\vec{\omega},t_0)\left[\alpha(\vec{\omega},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{\omega},t_0)\right]d\vec{\omega}+n_l(t_0)\right]\right\}= \qquad (17)$$
$$=E\left\{\left[\beta_k(t_0)-\hat{\beta}_{k,-1}(t_0)\right]\left[\beta_l(t_0)-\hat{\beta}_{l,-1}(t_0)\right]\right\}=$$
$$=E\left\{\tilde{\beta}_k(t_0)\tilde{\beta}_l(t_0)\right\}$$

Аналогічним чином знаходимо

$$\int_{(\vec{x})}g_k(\vec{y},t_0)P_0(\vec{x},\vec{y})d\vec{y}=$$
$$=\int_{(\vec{x})}g_k(\vec{y},t_0)E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\alpha(\vec{y},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{y},t_0)\right]\right\}d\vec{y}= \qquad (18)$$
$$=E\left\{\tilde{\beta}_k(t_0)\left[\alpha(\vec{x},t_0)\right]-\left[\hat{\alpha}(\vec{x},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)\right\}=$$
$$=E\left\{\tilde{\beta}_k(t_0)\tilde{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)\right\}$$

Вираз (16) являє собою коефіцієнт кореляції у полі похибок прогнозу між двома точками $\vec{x}_k$ та $\vec{x}_l$, у яких були здійснені навігаційні виміри. Формула (18) дає вираз для взаємної кореляційної функції поля похибок прогнозу між точкою $\vec{x}_k$ та довільною точкою.

З врахуванням цих двох рівнянь рівняння (15) може бути розв'язане відносно вагових коефіцієнтів

$$\Delta_k(\vec{x},t_0)=\sum_{l=1}^{N_0}\left[K^{-1}(t_0)\right]_{kl}\int_{(\vec{x})}g_l(\vec{z},t_0)P_0(\vec{x},\vec{z})d\vec{z}=$$
$$=\sum_{l=1}^{N_0}\left[K^{-1}(t_0)\right]_{kl}E\left\{\tilde{\beta}_l(t_0)\tilde{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)\right\}. \qquad (19)$$

Як слідує з останнього рівняння, вагові коефіцієнти інтерполяції у полі похибок прогнозу пропорційні величині кореляції між аномаліями навігаційних вимірів $\tilde{\beta}_1(t_0)$ та нев'язками прогнозу $\tilde{\alpha}_{-1}(\vec{x},t_0)$. Якісні зміни, виконані поблизу точки $\bar{X}$, у якій уточнюється прогноз по формулі (9), будуть враховані з більшою вагою, ніж навігаційні виміри, слабо корельовані з полем похибок обсервацій $\alpha(\vec{x},t)$.

На практиці для обрахування величин $\Delta_k(\vec{x},t_0)$ необхідно знати функцію кореляції $P_0(\vec{x},\vec{z})$ на момент часу t_0.Покажемо, що ця функція пов'язана рекурсійним співвідношенням з функцією $P_{-1}(\vec{x},\vec{z})$ та, таким чином може бути знайдена з аналізу статистики поля похибок прогнозу на попередньому етапі розрахунків, тобто у момент часу t_{-1}.

Введемо кореляційну функцію похибок прогнозу, яку буде мати поле після виконання корегування прогнозу по формулі (9)

$$\begin{aligned} P_0'(\vec{x},\vec{y}) &= E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t_0)-\hat{\alpha}_0(\vec{x},t_0)\right]\left[\alpha(\vec{y},t_0)-\hat{\alpha}_0(\vec{y},t_0)\right]\right\}= \\ &= E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t_0)-\hat{\alpha}_0(\vec{x},t_0)\right]\alpha(\vec{y},t_0)\right\}= \\ &= E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t_0)-\hat{\alpha}(\vec{x},t_0)\right]\left[\alpha(\vec{y},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{y},t_0)\right]\right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Підставляючи (6) – (9) у (20) й враховуючи визначення $P_0(\vec{x},\vec{y})$, знаходимо

$$\begin{aligned} P_0'(\vec{x},\vec{y}) &= E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t_0)-\hat{\alpha}_0(\vec{x},t_0)\right]-\sum_{k=1}^{N_0}\Delta_k(\vec{x},t_0)\times\right. \\ &\times\int_{(\vec{x})} g_k(\vec{z},t_0)\left[\alpha(\vec{z},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{z},t_0)\right]d\vec{z}\left.\left[\alpha(\vec{y},t_0)-\hat{\alpha}_{-1}(\vec{y},t_0)\right]\right\}= \\ &P_0(\vec{x},\vec{y})-\sum_{k=1}^{N_0}\Delta_k(\vec{x},t_0)\int_{(\vec{x})} g_k(\vec{z},t_0)P_0(\vec{z},\vec{y})d\vec{z}. \end{aligned} \quad (21)$$

Виведені співвідношення дозволяють написати рекурсійне співвідношення, яке пов'язує кореляційні функції (матриці) $P_0(\vec{x},\vec{y})$, $P^{-1}(\vec{x},\vec{y})$ та $P_1(\vec{x},\vec{y})$ для двох послідовних моментів часу t_0 та t_1 [9]

$$\begin{aligned} P_1(\vec{x},\vec{y}) &= E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t_1)-\hat{\alpha}_0(\vec{x},t_1)\right]\left[\alpha(\vec{y},t_1)-\hat{\alpha}_0(\vec{y},t_1)\right]\right\}= \\ &= \int_{(\vec{x})}\int_{(\vec{x})} G(\vec{x},t_1;\vec{z},t_0)G(\vec{y},t_1;\vec{\omega},t_0)P_0'(\vec{z},\vec{\omega})d\vec{z}d\vec{\omega}+ \\ &+\int_{(\vec{x})}\int_{(\vec{x})}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} G(\vec{x},t_1;\vec{z},\tau)G(\vec{y},t_1;\vec{\omega},\sigma)E\left\{f(\vec{z},\tau)f(\vec{\omega},\sigma)\right\}d\vec{z}. \end{aligned} \quad (22)$$

Це співвідношення є аналогом рівняння (3.86) одномірного фільтру Р. Калману. За його допомогою проводиться прогнозування статистики похибок методу послідовного аналізу навігаційних вимірів на момент часу t_1.

Таким чином, у кореляційний алгоритм послідовного аналізу для просторово-часових полів похибок обсервацій навігаційного поля морської поверхні включаються у якості основних рівнянь формули (15), (20) та (22).

Як і у одномірному фільтрі Р. Калману, процедура аналізу полягає у послідовності ітерацій, у ході яких алгоритм приходить до стійкого стану й дає на кожний момент часу картину прогностичних значень, а також відкориговану за рахунок останніх навігаційних спостережень картину текучих значень поля похибок обсервацій.

При аналізі на ПЕОМ реальних полів похибок обсервацій навігаційного поля морської поверхні формули послідовного аналізу навігаційних вимірів заміняються еквівалентними їм кінцево-різнісними співвідношеннями. Тому на практиці замість функції Грину може бути застосована деяка підпрограма, яка дає рішення рівняння динаміки навігаційного поля морської поверхні.

Важливою властивістю лінійної динамічної моделі є рекурсійний зв'язок просторово-часової кореляційної матриці поля похибок обсервацій $K(\vec{x},t)$ з функцією Г. Грину

$$K(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)=\int_{(\vec{x})} G(\vec{x}-\vec{z};t-\rho)K(\vec{z}-\vec{y},\rho-\tau)d\vec{z} \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} &K(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)= \\ &=E\left\{\left[\alpha(\vec{x},t)-E\{\alpha(\vec{x},t)\}\right]\left[\alpha(\vec{y},\tau)-E\alpha(\vec{y},\tau)\right]^T\right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Введемо просторово-часовий та просторовий спектри поля похибок обсервацій

$$\Phi(\vec{v},\vec{\omega})=\int_{(\vec{x})}\int_{-\infty}^{\infty} K(\vec{x},t)\exp\left[-i\vec{x}^T\vec{v}-i\omega t\right]dxdt \quad . \quad (25)$$

$$\Phi_t(\vec{v},\vec{\omega})=\int_{(\vec{x})} K(\vec{x},t)\exp\left[-i\vec{x}^T\vec{v}\right]d\vec{x} \quad . \quad (26)$$

Використовуючи умову некорельованості за часом функції збудження $f(\vec{x},t)$, яка входить до рівняння (1), можна показати, що просторово-часовий спектр поля похибок обсервацій $\Phi(\vec{v},\omega)$ вказується через функцію Г. Грину й часто просторовий спектр $\Phi_t(\vec{v},\omega)$. Для цього підставимо у рівняння (24) вираз (3) й виконаємо операції осереднення. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} &K(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)= \\ &=\int_{(\vec{x})}\int\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{x}-\vec{z};t-\sigma)F(\vec{z}-\vec{\omega})G^T(\vec{y}-\vec{\omega};\tau-\sigma)d\vec{z}d\vec{\omega}d\sigma. \end{aligned} \quad (27)$$

Застосовуючи до цього виразу теорему Парсеваля й виконуючи перетворення Ж. Фур'є у просторі й часі, знаходимо [10]

$$\begin{aligned} &\Phi(\vec{v},\omega)=H(\vec{v},\omega)\Psi(\vec{v})H^T(-\vec{v},-\omega)= \\ &=H(\vec{v},\omega)\Psi(\vec{v})H^{T*}(\vec{v},\omega) \end{aligned} \quad . \quad (28)$$

де $H(\vec{v},\omega)$ – перетворення Ж. Фур'є від функції Г. Грину;

$\Psi(\vec{v})$ – перетворення Ж. Фур'є від $F(\vec{x})$.

У той же час чисто просторове перетворення Ж. Фур'є від $K(\cdot)$ дає

$$\Phi_t(\vec{v},t)=\int_{-\infty}^{\infty} H_t(\vec{v},t-\rho)\Psi(\vec{v})H_t^{\ T}(-\vec{v},-\rho)dp\,. \quad (29)$$

Використаємо тепер властивість функцій Г. Грину

$$\begin{aligned} &G(\vec{x}-\vec{z},t-\rho)=\int_{(\vec{x})} G(\vec{x}-\vec{y};t-\sigma)G(\vec{y}-\vec{z},\sigma-\rho)d\vec{y} \\ &\qquad t\geq\sigma\geq\rho \end{aligned} \quad (30)$$

Для цього спочатку застосуємо до нього перетворення Ж. Фур'є

$$\begin{aligned} &H_t(\vec{v},t-\rho)=H_t(\vec{v},t-\sigma)H_t(\vec{v},\sigma-\rho) \\ &\qquad t\geq\sigma\geq\rho \end{aligned} \quad (31)$$

Покладаючи $\tau=0$ в останній формулі й підставляючи її у вираз (29), знаходимо

$$\begin{aligned} &\Phi_t(\vec{v},t)=H_t(\vec{v},t)\Phi_t(\vec{v},0), \qquad t\rangle 0, \\ &\Phi_t(\vec{v},t)=\Phi_t(\vec{v},0)H_t^{\ T}(-\vec{v},-t), \quad t\langle 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким чином, для лінійної динамічної моделі поля похибок обсервацій можна виказати просторово-часовий спектр поля похибок обсервацій $\Phi(\vec{\nu},\omega)$ у термінах чисто просторового спектру поля похибок обсервацій $\Phi_t(\vec{\nu},0)$ й функції Г. Грину

$$\Phi(\vec{\nu},\omega)= H(\vec{\nu},\omega)\Phi_t(\vec{\nu},0)+\Phi_t(\vec{\nu},0)H^T(-\vec{\nu},-\omega). \qquad (33)$$

Наведений результат, який належить Д. Петерсену [10], виказує основну притаманність алгоритму послідовного аналізу навігаційних вимірювань: взаємозв'язок просторового та просторово-часового спектрів поля похибок обсервацій зі спектром функції збудження. Ця властивість означає, що за умови відомої динаміки поля похибок обсервацій немає необхідності дослідження його статичної структури у різні моменти часу. Подібні навігаційні виміри поля похибок обсервацій у початковий момент часу дають можливість оцінити його кореляційні та спектральні характеристики у всі наступні моменти часу. Виміри поля похибок обсервацій фактично використовуються лише для текучої корекції прогнозу або для компенсації похибок ідеалізованої динамічної моделі навігаційного поля морської поверхні.

Комбінуючи вираз (28) та (33), неважко отримати формулу для визначення спектру функції збудження $f(\vec{x},t)$ у рівнянні динаміки поля похибок обсервацій

$$\Psi_t(\vec{\nu})=$$
$$=\left[H^{-1}(\vec{\nu},\omega)H(\vec{\nu},\omega)\Phi_t(\vec{\nu},0)+\Phi_t(\vec{\nu},0)H^T(-\vec{\nu},-\omega)\right]\times \qquad (34)$$
$$\times H^{T-1}(-\vec{\nu},-\omega)=H^{-1}(\vec{\nu},\omega)\Phi_t(\vec{\nu},0)+\Phi_t(\vec{\nu},0)H^{T*-1}(\vec{\nu},\omega).$$

Висновки та перспектива подальшої роботи з даного напряму

Таким чином, формула (34) дуже важлива з наступних аспектів. Перш за все – вона дає практичний спосіб оцінки спектру функції збудження через просторовий спектр поля похибок обсервацій, який може бути отримано з безпосередніх навігаційних спостережень. По друге, експериментальна перевірка рівняння (34), як і рівняння (33), дозволяє судити про адекватність використаної лінійної динамічної моделі реальному полю похибок обсервацій навігаційного поля морської поверхні.

Література

1. Балакришнан А. Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве./ Балакришнан А. – М.: Мир, 1974.– 258 с.
2. Інфімовський С.Ю. Моделювання просторово-часових полів похибок обсервацій методом оптимальної фільтрації // Інфімовський С.Ю. Матеріали науково-методичної конференції "Сучасні проблеми підвищення безпеки судноводіння" 7 – 8 жовтня 2009 р. в ОНМА.– Одеса.– С. 60 – 62.
3. Інфімовський С.Ю. Моделювання процесів у просторових випадкових полях похибок обсервацій методом оптимальної фільтрації // Інфімовський С.Ю. Східно-Європейський журнал передових технологій.– 2010.– № 1/5 (43).– С. 55 – 57.
4. Коломийчук Н.Д. Гидрография. / Коломийчук Н.Д. Л.: ГУНиО МО, 1975. – 485 с.
5. Лионс Ж. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных./ Лионс Ж. М., Мир, 1974.– 287 с.
6. Яглом А.А. Введение в теорию стационарных случайных функций. / Яглом А.А. – Успехи мат. наук, 1952, 7, № 5, С. 3 – 168.
7. Яглом А.А. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных функций. / Яглом А.А. – Тр. Моск. общ-ва, 1955, 4, С. 24 – 79.
8. KALMAN R.E. On partial realization of linear input/output map./ KALMAN R.E. – Guillemin Anniv. Vol., Holt, 1970, p. 211 – 234.
9. PETERSEN D.P. On the concept and implementation of sequential analysis for linear random fields. / PETERSEN D.P. – Tellus, 1968, 20, p. 78 – 93.
10. PETERSEN D.P. Static and dynamic constraints on the estimations of space-time covariance and wave-number-frequency spectral fields. / PETERSEN D.P. – J. Atmos. Sci., 1973, 30, p. 141 – 152.
11. SAKAWA Y. Optimal filtering in linear distributed-parameter systems./ SAKAWA Y. – Int. J. Control, 1972, 16, № 1, p. 115 – 127.
12. TZAFESTAS S.G. On the distributed parameter least-squares state estimation theory. / TZAFESTAS S.G. – Int. J. Systems Sci., 1973, 4, № 6, P. 883 – 858.
13. TZAFESTAS S.G. State-observer design for linear sequential machines./ TZAFESTAS S.G. – Int. J. Systems Sci., 1973, 4, № 1, P. 33 – 41.