Литература

1. Судьина Н. Акупунктура. – СПб.: АСТ, 2009 – 128 с.
2. Гаваа Лувсан Очерки методов восточной рефлексотерапии. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. – 432 с.
3. Котов В.Е. Сети Петри. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 160 с.
4. Васильев В.В., Кузьмук В.В. Сети Петри, параллельные алгоритмы и модели мультипроцессорных систем. – К.: Наукова думка, 1990 – 216 с.
5. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем: Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.— 264 с.
6. Лескин А.А., Мальцев П.А., Спиридонов А.М. Сети Петри в моделировании и управлении. – Л.: Наука, 1989. – 133 с.
7. Бодянский Е.В., К учеренко Е.И., Михалев А.И. Нейро-фаззи сети Петри в задачах моделирования сложных систем / Монография (научное издание). – Дніпропетровськ: Системні технології, 2005. - 311 с.

УДК 65.012.34

МЕТОДИКА ПОЛУЧЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ЗАКУПОК В МНОГОНОМЕНКЛАТУРНОЙ ПОСТАВКЕ

О.В. Серая
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра «Компьютерного мониторинга и логистики»*
Контактный тел.: (057) 707-66-28

Т.А. Клименко
Старший преподаватель
Кафедра «Автомобиле- и тракторостроения»*
Контактный тел.: (057) 707-60-66
E-mail: klimenko-t@mail.ru

*Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

У статті розглянута методика отримання раціонального розміру багатономенклатурного запасу при врахуванні обмежень на матеріальні ресурси і об'єм складських приміщень по критерію ефективності – середній чистий прибуток підприємства від реалізації запасу, що був закуплений

Ключові слова: багатономенклатурний запас, чистий прибуток, управління запасами, попит, поліноміальна апроксимація

В статье рассмотрена методика получения рационального размера многономенклатурного запаса при учете ограничений на материальные ресурсы и объем складских помещений по критерию эффективности – средняя чистая прибыль предприятия от реализации закупленного запаса

Ключевые слова: многономенклатурный запас, чистая прибыль, управление запасами, спрос, полиномиальная аппроксимация

The methodology of obtaining the rational size of multi-nomenclature stock is under study in this article, accounting for the limitations on material resources and the amount of storage space according to the criterion of efficiency – the company's average net profit from the sale of the purchased stock

Keywords:multi-nomenclature stock, average net profit, stock management, demand, polynomial approximation

Введение

Теория управления запасами, как неотъемлемая часть логистики сейчас переживает смену приоритетов в определении критериев эффективности при выполнении логистических операций. Если ранее считалось, что таким критерием должно являться минимум затрат на управление запасом, то в настоящее время в качестве более естественного критерия предлагается использовать прибыль предприятия от управления запасом [1-3]. Однако в большинстве работ авторы ограничиваются получением формул для расчета рациональной величины многономенклатурного запаса, не развивая методик, позволяющих качественно реализовать такой критерий на практике. Сформулируем задачу разработки методики управления многономенклатурным запасом по критерию – средняя прибыль предприятия.

Постановка задачи

Примем, что плотность распределения случайной величины спроса имеет вид

$$f(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=A\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}\right\}(1+\theta_3\mathrm{sign}(\theta-\theta_1)),$$

где A - нормирующий коэффициент, $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ соответственно определяют математическое ожидание, дисперсию и асимметрию случайной величины. Получим аналитическое выражение для описания критерия с целью его использования при решении задачи управления многономенклатурным запасом.

Основные результаты

Расчётная формула для вычисления средней прибыли, соответствующей однономенклатурному запасу x:

$$L(x)=(\beta-c+\alpha_2-\alpha_1)\int_0^x\theta f(\theta)d\theta-(\beta-c)\int_x^\infty\theta f(\theta)d\theta-$$

$$-(2\beta-2c+\alpha_2-\alpha_1)x\int_0^x f(\theta)d\theta+(2\beta-2c-\alpha_1)x=$$

$$=(\beta-c+\alpha_2-\alpha_1)A\int_0^x\theta\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3\mathrm{sign}(\theta-\theta_1))\right\}d\theta-$$

$$-(\beta-c)A\int_0^x\theta\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3\mathrm{sign}(\theta-\theta_1))\right\}d\theta-$$

$$-(2\beta-2c+\alpha_2-\alpha_1)xA\int_0^x\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3\mathrm{sign}(\theta-\theta_1))\right\}d\theta+$$

$$+(2\beta-2c-\alpha_1)x=a_1J_1-a_2J_2-a_1xJ_3+a_3,\qquad(1)$$

где c – закупочная цена единицы товара,

– цена единицы товара при реализации $(\beta>c)$,

α_1 – затраты на хранение единицы товара в торговом зале,

α_2 – затраты на хранение единицы товара на складе,

θ – случайный спрос на товар с плотностью распределения $f(\theta)$,

$\theta\succ 0$,

x – уровень запаса на складе $(x\succ 0)$.

Рассчитаем слагаемые соотношения (1), которые при подстановке дадут аналитическое выражение для расчёта средней прибыли для заданного уровня запаса. Это выражение будет использовано при реализации итерационной процедуры отыскания оптимального многономенклатурного запаса.

$$J_{11}=\int_0^{\theta_1}\theta\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1-\theta_3)\right\}d\theta=$$

$$=\frac{\theta_1\theta_2\sqrt{2\pi}}{(1-\theta_3)^{\frac{1}{2}}}\Phi\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}(1-\theta_3)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{\theta_2^2}{1-\theta_3}\left(e^{-\frac{\theta_1^2}{2\theta_2^2}(1-\theta_3)}-1\right),$$

$$J_{12}=\int_{\theta_1}^{x_1}\theta\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3)\right\}d\theta=$$

$$=\frac{\theta_1\theta_2\sqrt{2\pi}}{(1+\theta_3)^{\frac{1}{2}}}\Phi\left(\frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}(1+\theta_3)^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{\theta_2^2}{1+\theta_3}\left(1-e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3)}\right),$$

$$J_2=\int_{x_1}^{\infty_1}\theta\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3)\right\}d\theta=$$

$$=\frac{\theta_1\theta_2\sqrt{2\pi}}{(1+\theta_3)^{\frac{1}{2}}}\left(1-\Phi\left(\frac{(x-\theta_1)}{\theta_2}(1+\theta_3)^{\frac{1}{2}}\right)\right)+\frac{\theta_2^2}{1+\theta_3}e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3)}.$$

$$xJ_3=x\int_0^{\theta_1}\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1-\theta_3)\right\}d\theta+$$

$$+x\int_{\theta_1}^{x_1}\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3)\right\}d\theta=xJ_{31}+xJ_{32}.$$

$$xJ_{31}=x\int_0^{\theta_1}\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1-\theta_3)\right\}d\theta=$$

$$=x\frac{\theta_2\sqrt{2\pi}}{(1-\theta_3)^{\frac{1}{2}}}\Phi\left(\frac{\theta_1(1-\theta_3)^{\frac{1}{2}}}{\theta_2}\right),$$

$$xJ_{32}=x\int_{\theta_1}^{0_1}\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_1)^2}{2\theta_2^2}(1+\theta_3)\right\}d\theta=$$

$$=x\frac{\theta_2\sqrt{2\pi}}{(1+\theta_3)^{\frac{1}{2}}}\Phi\left(\frac{(1-\theta_1)(1+\theta_3)^{\frac{1}{2}}}{\theta_2}\right).$$

Если в этой задаче использовать единственное ограничение на суммарную стоимость запаса, то оптимизируемая функция при отыскании рационального запаса методом штрафных функций будет иметь вид:

$$\Phi_k(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^n L_j(x_j)-$$

$$-C_k^{(1)}\left[\min\left(0,d_0-\sum_{j=1}^n c_jx_j\right)\right]^2-\qquad(2)$$

$$-C_k^{(3)}\left[\min(0,x_1,x_2,...,x_n)\right]^2,$$

Понятно, что сформулированная таким образом оптимизационная задача управления запасами в многономенклатурной постановке является достаточно трудоемкой. Дело в том, что ввиду очевидной сложности полученного выражения, аналитические описания для градиента оптимизируемой функции еще более сложны. Это, практически, исключает возможность использования для оптимизации методов первого и второго порядка. Точно также неэффективны и методы нулевого порядка, в частности, Нелдера-Мида. Для реальных значений n (тысячи) необходимое для реализации этих методов количество вычислений функции неприемлемо велико. В связи с этим рассмотрим возможности приближённого решения задачи.

Естественное упрощение аналитического выражения оптимизируемой функции может быть достигнуто за счёт полиномиальной аппроксимации слагаемых функции суммарной прибыли для каждого из товаров с использованием параметризации по факторам, влияющим на прибыль. Важное достоинство варианта получения приближённого решения задачи с аппроксимацией состоит в том, что аппроксимации функций выигрыша могут быть рассчитаны заранее, что даёт возможность непосредственного и быстрого использования расчётных формул. Остановимся подробнее на этом подходе.

Полученные выше выражения позволяют вычислить среднее значение выигрыша, соответствующее заказу x, для любых значений параметров $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ плотности распределения случайного спроса, и значений $\beta,c,\alpha_1,\alpha_2$, задаваемых для каждого из товаров. Заметим, что для каждого из видов товаров значение средней прибыли зависит не от величины β и c в отдельности, а только от их разности. В связи с этим введём величину $\gamma=\beta-c$, определяющую прибыль, получаемую от реализации единицы товара. Таким образом, для произвольного набора $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2)$ можно рассчитать совокупность пар $(x_1,L_1;x_2,L_2;...;x_m,L_m)$ величин запаса x и соответствующих значений средней прибыли от реализации товара. Легко видеть, что для любого набора $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2)$ зависимость $L(x)$ имеет однотипный и специфический характер: с ростом величины запаса x значение средней прибыли сначала растёт, достигает максимальной величины, а затем падает. Действительно:

$$\frac{dL(x)}{dx}=(2\gamma-\alpha_1)-(2\gamma-\alpha_1+\alpha_2)\int_0^{x_1} f(\theta)d\theta.$$

Выполнив преобразования, видно, что:

$$\frac{d^2L(x)}{dx^2}=-(2\gamma-\alpha_1+\alpha_2)f(x)<0. \quad (3)$$

Таким образом, $L(x)$ - выпуклая вверх, унимодальная функция. В качестве базовой модели, описывающей $L(x)$, выберем полином второй степени.

$$L(x;\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2)=a_0(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2)+$$
$$a_1(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2)x+a_2(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2)x^2 . \quad (4)$$

Введем матрицу H, векторы A и L следующим образом:

$$H=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ - & - & - \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} a_0(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2) \\ a_1(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2) \\ a_2(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2) \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ - \\ L_m \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Найдём элементы вектора вектора A, минимизирующего сумму квадратов отклонений расчётных значений функции выигрыша, получаемых с использованием (1) от предсказываемых моделью (4). Соответствующий функционал наименьших квадратов имеет вид

$$J=(HA-L)^T(HA-L)\Rightarrow \min_A , \quad (6)$$

а вектор $\hat{A}$, минимизирующий (6) определяется по формуле

$$A=(H^TH^{-1})H^TL . \quad (7)$$

Соотношение (7) обеспечивает расчет компонентов вектора A для произвольного набора $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\gamma,\alpha_1,\alpha_2)$, что позволяет сформулировать задачи параметрического описания коэффициентов функции выигрыша (4). В целях упрощения записи выполним переобозначение параметров задачи:

$$W_1=\theta_1,\ W_2=\theta_2,\ W_3=\theta_3,\ W_4=\gamma,\ W_5=\alpha_1,\ W_6=\alpha_2 .$$

После проведения необходимых преобразований, получаем соотношения, позволяющие для любого набора $W_j=(W_{j1},W_{j2},...,W_{j6})$ рассчитать значения коэффициентов $a_0(W_j),a_1(W_j),a_2(W_j)$, определяющие, в соответствии с (4), зависимость средней прибыли от величины запаса.

Тогда задача отыскания оптимального многономенклатурного запаса может быть сформулирована следующим образом: найти набор $X=(x_j)$, $j=1,2,...,n$, максимизирующий среднюю прибыль

$$L(x)=\sum_{j=1}^{n} L_j(x_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{2}\alpha_{ij}x_j^i \quad (8)$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j=d_0 , \quad (9)$$

$$x_j\ge 0 ,\ j=1,2,...,n . \quad (10)$$

Для решения задачи используем метод неопределённых множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$\Phi(X)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{0j}+\alpha_{1j}x_j+\alpha_{2j}x_j^2)-\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} c_jx_j-d_0\right).$$

Выполнив преобразования, получим искомый набор $X=(x_j)$:

$$x_j=\frac{d_0+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_ja_{1j}}{2a_{2j}}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j^2}{2a_{2j}}}\cdot\frac{c_j}{2a_{2j}}-\frac{a_{1j}}{2a_{2j}}, \quad (11)$$

Как известно, метод неопределённых множителей Лагранжа не гарантирует получение неотрицательного решения задачи. При этом, если в полученном наборе (11) имеется отрицательная компонента, то этот факт обычно трактуется следующим образом. Соответствующий товар не следует заказывать; напротив, если он имеется в наличии, его целесообразно реализовать, используя полученные средства на закупку других товаров.

Предложения выше квадратическая аппроксимация (4) зависимости средней прибыли от величины запаса может быть использована и в случае, когда в многономенклатурной задаче, кроме ограничения на суммарную стоимость, необходимо учесть дополнительное ограничение, например, на суммарный объём товаров. При этом задача формулируется следующим образом: найти набор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^n)$, максимизирующий

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{2} \alpha_{ij} x_j^i$$

и удовлетворяющий ограничениям (9) и

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j = v_0\,, \qquad (12)$$

где V_j - объём единицы товара j-го вида, $j = 1, 2, \ldots, n$, V_0 - допустимый суммарный объём.

Для решения задачи вновь используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид

$$\Phi(X) = L(x) - \lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - d_0\right) - \lambda_2\left(\sum_{j=1}^{n} v_j x_j - v_0\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(\alpha_{0j} + \alpha_{1j}x_j + \alpha_{2j}x_j^2) -$$
$$-\lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - d_0\right) - \lambda_2\left(\sum_{j=1}^{n} v_j x_j - v_0\right).$$

Выполняя преобразования, с целью упрощения записи введем:

$$d_{11} = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_j^2}{2\alpha_{2j}}\,,\; d_{12} = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_j v_j}{2\alpha_{2j}}\,,\; d_{10} = d_0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_{1j}c_j}{2\alpha_{2j}}\,,$$
$$d_{21} = d_{12}\,,\; d_{22} = \sum_{j=1}^{n}\frac{v_j^2}{2\alpha_{2j}}\,,\; d_{20} = v_0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_{1j}v_j}{2\alpha_{2j}}\,.$$

В итоге получим искомое решение многономенклатурной задачи:

$$x_j = \frac{c_j\dfrac{d_{10}d_{22} - d_{20}d_{12}}{d_{11}d_{22} - (d_{12})^2} + v_j\dfrac{d_{11}d_{20} - d_{12}d_{10}}{d_{11}d_{22} - (d_{12})^2} - \alpha_{1j}}{2\alpha_{2j}} = \qquad (13)$$
$$= \frac{c_j(d_{10}d_{22} - d_{20}d_{12}) + v_j(d_{11}d_{20} - d_{12}d_{10}) - \alpha_{1j}(d_{11}d_{22} - (d_{12})^2)}{2\alpha_{2j}(d_{11}d_{22} - (d_{12})^2)}$$

Отметим, что ограничения на искомый план X были введены, как равенства и при решении задачи были использованы только два ограничения: на суммарную стоимость запаса и суммарный объём. Вместе с тем, реальное число ограничений может быть существенно большим, что необходимо учитывать при определении рационального размера многономенклатурного запаса, что будет рассмотрено в следующих публикациях на эту тему.

Выводы

Получено аналитическое выражение для расчета средней прибыли при заданном уровне многономенклатурного запаса, использующее трехпараметрическое семейство плотностей распределения спроса. Показано, что существенное упрощение возникающей при этом задачи математического программирования может быть достигнуто за счет полиномиальной аппроксимации слагаемых функции суммарной прибыли с использованием параметризации по факторам, влияющим на величину прибыли.

Литература

1. Серая О.В., Самородов В.Б., Клименко Т.А / Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами. Вестник ХНАДУ. №45. ХНАДУ – 2009. – С.31-34. 2. Материалы логистического форума http://logistic-forum.lv/statji-po-logistike/skladskaya-logistika/. 3.Постан М.Я. / О влиянии теории управления запасами на развитие логистики. Логистика: проблемы и решения. №3(10). Пресса – 2007. – С.76-81.