17. Ларичев, О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах [Текст] / О.И. Ларичев. – М.: Логос, 2000. – 296 с.
18. Овезгельдиев, О.А. Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации / О.А. Овезгельдыев, Э.Г. Петров, К.Э. Петров. – К.: Наукова думка, 2002 . – 161 с.
19. Бескоровайный, В.В. Метод решения задачи компараторной идентификации моделей многофакторного оценивания / В.В. Бескоровайный, Э.Г. Петров, И.В. Трофименко // Бионика интеллекта. – 2006. – № 65. – С. 3-7.

Розроблено алгоритм сумісних точних статистичних оцінок декількох числових параметрів динаміки популяцій за експериментальними даними за умови, що дані реєстрації зв'язані апріорі відомими кінцевими рівняннями

Ключові слова: динаміка популяцій, апріорний зв'язок, сумісне оцінювання параметрів

Разработан алгоритм совместных точных статистических оценок нескольких числовых параметров динамики популяций по экспериментальным данным при условии, что данные регистрации связаны априорно известными конечными уравнениями

Ключевые слова: динамика популяций, априорная связь, совместное оценивание параметров

It develops the algorithm simultaneous exact statistical estimations of several numerical parameters the dynamics of population by experimental data on condition that registration data are connected priorily by well-known ultimate equations

Key words: the dynamics of population, the priori connection, the combined estimation parameters

УДК 621.321:004.942

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

И.А. Пилькевич
Доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой
Кафедра мониторинга окружающей природной среды*

А.В. Маевский*
Контактный тел. 097-403-14-96
*Житомирский национальный агроэкологический университет
бульвар Старый, 7, г. Житомир, Украина, 10008
Контактный тел. (0412) 41-56-86

1. Введение

Динамика численности популяции и ее структура (возрастной, половой состав) являются ее важнейшими характеристиками. К основным характеристикам популяции относят численность и плотность. Однако для понимания механизмов функционирования и решения вопросов использования популяций большое значение имеют сведения об их структуре. Закономерное изменение числа особей в популяции данного вида на протяжении года (сезонная) или ряда лет (многолетняя) определяется изменениями рождаемости (плодовитости) и смертности особей, а также их перемещением (эмиграцией или иммиграцией). Знание типа роста популяции и ее структуры имеет важное экологическое значение.

На практике часто подвергаются одновременной регистрации параметры (характеристики) динамики популяций с априорной связью в виде физических законов, которые описываются конечными (алгебраическими или трансцендентными) уравнениями. Дополнительная априорная информация об измеряемых параметрах, в данном случае в виде уравнений их связывающих, может служить источником повышения точности оценивания. Разработать механизм использования данной информации и оценить его эффективность – цель данной статьи.

2. Совместное оценивание параметров в фиксированный момент времени по результатам их измерений

Пусть в результате анализа динамики популяций получены оценки $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$. Будем считать, что кроме текущих измерений $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$ имеется априорная информация об оцениваемых параметрах. А именно: они не могут быть произвольными, а лишь такими, которые удовлетворяют уравнению связи, которое описывается конечным уравнением:

$$\alpha - f(t,\beta) = 0 . \tag{1}$$

Таким образом, априори известно, что точка $\{\hat{\alpha},\hat{\beta}\}$ должна лежать на плоской кривой (1) в плоскости α, β. Экспериментальная „точка" $\{\hat{\alpha}_0,\hat{\beta}_0\}$, будучи получена вне связи с уравнением (1), на эту кривую в общем случае не ляжет. Возникает вопрос: какую из точек на кривой (1) выбрать в качестве окончательной (совместной) оценки при полученной текущей оценке $\{\hat{\alpha}_0,\hat{\beta}_0\}$? Интуитивное решение вопроса очевидно: в качестве окончательной оценки $\{\hat{\alpha},\hat{\beta}\}$ следует взять точку на кривой (1), ближайшую к $\{\hat{\alpha}_0,\hat{\beta}_0\}$. Понятие „близости" определяется введенной метрикой. Интуитивное решение наполняется строгим смыслом, если в качестве метрического тензора в двумерном пространстве α, β использовать обратную корреляционную матрицу оценок $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$, или $\hat{\alpha}_0$ и $1/\hat{\beta}_0$ (это в сущности не принципиально, но создает в дальнейшем некоторые математические удобства).

В общем будем считать, что располагаем компонентами обратной корреляционной матрицы $g_{\alpha\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$, $g_{\beta\beta}$ $(g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha})$. „Расстояние" между точками $\{\hat{\alpha}_0,\hat{\beta}_0\}$ и $\{\hat{\alpha},\hat{\beta}\}$ запишется квадратичной формой:

$$\Re_0 = g_{\alpha\alpha}\left(\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}\right)^2 + 2g_{\alpha\beta}\left(\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}\right)\left(\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}\right) + g_{\beta\beta}\left(\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}\right)^2 . \tag{2}$$

Минимум этого расстояния при совместной нормальности оценок $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$ означает максимум правдоподобия оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, а вместе с этим достаточность, состоятельность и эффективность [1]. Это говорит о строгости и правильности интуитивно выбранного пути объединения экспериментальной информации $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$ с априорной в виде уравнения связи (1).

Задача минимизации „расстояния" (2) при условии связи (1) представляет собой задачу на условный экстремум. Классический путь ее решения – методом неопределенных множителей Лагранжа. Он приводит к системе уравнений относительно оценок $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Re}{\partial\hat{\alpha}} = 2g_{\alpha\alpha}\left(\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}\right) + 2g_{\alpha\beta}\left(\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}\right) - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial\Re}{\partial\hat{\beta}} = 2g_{\alpha\beta}\left(\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}\right) + 2g_{\beta\beta}\left(\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}\right) + \lambda\dfrac{\partial f\left(t, r, \hat{V}\right)}{\partial\hat{V}} = 0; \\ \hat{\alpha} = f\left(t,\hat{\beta}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Найдем решение (3) для уравнения связи (часто используемая связь между параметрами [3]):

$$\alpha = f(t,\beta) = K(t)\cdot\frac{1}{\beta} . \tag{4}$$

Подстановка (4) в (3) с последующим решением системы (3) приводит к кубическому уравнению, и поэтому не дает практически пригодного аналитического результата. Его можно получить при линейной связи между оцениваемыми величинами. Это значит, что в качестве оцениваемых величин удобно взять α и $1/\beta$, тогда линейная связь между ними дается уравнением (4). Однако в (3) следует использовать уже элементы обратной корреляционной матрицы величин α и $1/\beta$. Система (3) принимает вид:

$$\begin{cases} 2g_{\alpha\alpha}\left(\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}\right) + 2g_{\alpha\frac{1}{\beta}}\left(\dfrac{1}{\hat{\beta}_0} - \dfrac{1}{\hat{\beta}}\right) - \lambda = 0; \\ 2g_{\alpha\beta}\left(\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}\right) + 2g_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}}\left(\dfrac{1}{\hat{\beta}_0} - \dfrac{1}{\hat{\beta}}\right) + \lambda K = 0; \\ \hat{\alpha} = K\cdot\dfrac{1}{\hat{\beta}}. \end{cases} \tag{5}$$

Решение системы (5) приводит к оценкам:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\hat{\beta}} = \dfrac{\left(g_{\alpha\frac{1}{\beta}} + Kg_{\alpha\alpha}\right)\hat{\alpha}_0 + \left(g_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}} + Kg_{\alpha\frac{1}{\beta}}\right)\dfrac{1}{\hat{\beta}_0}}{g_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}} + 2Kg_{\alpha\frac{1}{\beta}} + K^2 g_{\alpha\alpha}}; \\ \hat{\alpha} = K\cdot\dfrac{1}{\hat{\beta}}. \end{cases} \tag{6}$$

После выражения элементов обратной корреляционной матрицы g_{ij} через моменты: $\left\langle\hat{\alpha}_0^2\right\rangle = \sigma_\alpha^2$; $\left\langle\dfrac{1}{\hat{\beta}_0^2}\right\rangle = \sigma_{\frac{1}{\beta}}^2$; $\left\langle\hat{\alpha}_0\cdot\dfrac{1}{\hat{\beta}_0}\right\rangle = \rho_{\alpha\frac{1}{\beta}}$, окончательно получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\hat{\beta}} = \dfrac{\left(\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}} + K\sigma_{\frac{1}{\beta}}^2\right)\hat{\alpha}_0 + \left(\sigma_\alpha^2 + K\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}}\right)\dfrac{1}{\hat{\beta}_0}}{\sigma_\alpha^2 + 2K\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}} + K^2\sigma_{\frac{1}{\beta}}^2}; \\ \hat{\alpha} = K\cdot\dfrac{1}{\hat{\beta}}. \end{cases} \tag{7}$$

Формула (7) представляет собой рабочую формулу. Она наглядно интерпретируется для случая независимых измерений $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$, т.е. при $\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}} = 0$. Формула (7) упрощается:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\hat{\beta}} = \dfrac{\sigma_{\frac{1}{\beta}}^2\hat{\alpha}_0 + \sigma_\alpha^2\dfrac{1}{\hat{\beta}_0}}{\sigma_\alpha^2 + K^2\sigma_{\frac{1}{\beta}}^2}; \\ \hat{\alpha} = K\cdot\dfrac{1}{\hat{\beta}}. \end{cases} \tag{8}$$

Оценка $\dfrac{1}{\hat{\beta}}$ дается весовым суммированием оценок $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$, причем веса учитывают точность оценок: при низкой точности оценки $\dfrac{1}{\hat{\beta}_0}$ с большим весом суммируется оценка $\hat{\alpha}_0$, и наоборот.

На рис. 1 представлена структурная схема устройства, реализующего разработанный алгоритм.

Устройство содержит датчики 1 и 2 для получения первичных оценок параметров $\hat{\alpha}_0$ и $\dfrac{1}{\hat{\beta}_0}$, масштабные усилители 3...8 и сумматор 9.

Датчики 1 и 2, работающие автономно, получают в процессе измерения первичные оценки параметров $\hat{\alpha}_0$ и $\frac{1}{\hat{\beta}_0}$, которые в виде уровней электрического напряжения поступают на входы усилителей 3...6: с выхода датчика 1 – на входы усилителей 3, 4; с выхода датчика 2 – на входы усилителей 5, 6. В усилителях входные напряжения доводятся до уровня к соответствующему масштабу с помощью коэффициентов усиления (см. (6)):

для усилителя 3 – $Kg_{\alpha\alpha}$;

для усилителя 4 – $g_{\alpha 1/\beta}$;

для усилителя 5 – $Kg_{\alpha 1/\beta}$;

для усилителя 6 – $g_{1/\beta 1/\beta}$.

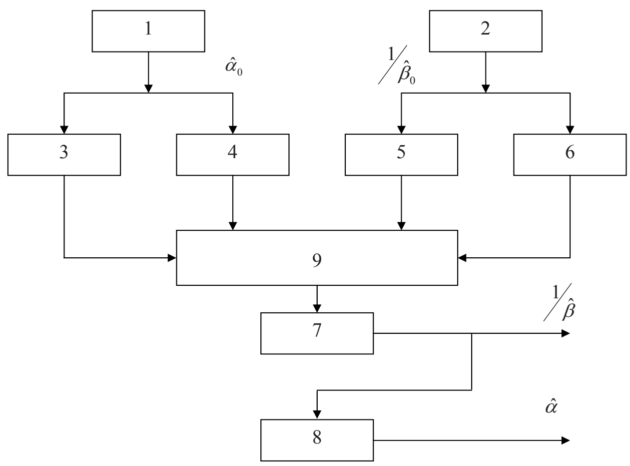

Рис. 1.

Напряжения с выходов масштабных усилителей 3...6 поступают на входы сумматора, где суммируются. Результирующее напряжение с выхода сумматора 9 поступает на вход масштабного усилителя 7 с коэффициентом усиления

$$K_{yc} = \left(g_{1/\beta 1/\beta} + 2Kg_{\alpha 1/\beta} + K^2 g_{\alpha\alpha} \right)^{-1}, \tag{9}$$

с выхода которого поступает на вход масштабного усилителя 8 и одновременно на выход устройства в виде напряжения остаточной оценки $\frac{1}{\hat{\beta}}$. Коэффициент усиления усилителя 8 соответствует K. Напряжение с его выхода выдается на выход устройства как конечная оценка $\hat{\alpha}$.

Вычисление дисперсии оценки (8) дает:

$$D_0\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right) = \left\langle \frac{1}{\hat{\beta}^2} \right\rangle = \frac{\sigma_\alpha^2 \cdot \sigma_{\frac{1}{\beta}}^2}{\sigma_\alpha^2 + K^2 \sigma_{\frac{1}{\beta}}^2}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что дисперсия (10) оказывается меньше дисперсий каждой из оценок $\hat{\alpha}_0$ и $\frac{1}{\hat{\beta}_0}$, что свидетельствует о повышении точности оценивания за счет использования априорной связи измеряемых величин (4).

Для случая полной корреляции измерений $\left(\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}} = \sigma_\alpha \cdot \sigma_{\frac{1}{\beta}}\right)$:

$$D_1\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right) = \frac{4\sigma_\alpha^2 \cdot \sigma_{\frac{1}{\beta}}^2}{\left(\sigma_\alpha + K\sigma_{\frac{1}{\beta}}\right)^2}; \tag{11}$$

для случая равноточных измерений $\left(\sigma_\alpha = K\sigma_{\frac{1}{\beta}} = \sigma\right)$:

$$D_1 = \frac{\sigma^2}{K^2}; \tag{12}$$

$$D_0 = \frac{\sigma^2}{2K^2}. \tag{13}$$

Таким образом, для равноточных измерений наличие полной корреляции увеличивает дисперсию оценки по сравнению с полностью некоррелированной выборки $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\beta}_0$ в 2 раза. Это значит, что выгодно иметь независимые измерения. Корреляция между измерениями уменьшает информацию, содержащуюся в выборке и, как следствие, снижает точность оценивания.

На рис. 2, 3 представлены зависимости ошибки совместной оценки от ошибки поточной оценки параметра $\frac{1}{\beta}$ при разных корреляционных связях ошибок измерений параметров α и $\frac{1}{\beta}$.

Анализ графиков показывает, что на среднеквадратическую ошибку условного совместного оценивания коэффициент корреляции влияет незначительно (рис. 3).

Если первичные измерения величин α и $\frac{1}{\beta}$ равноточные, то независимо от корреляции между ошибками этих измерений использование алгоритма условного совместного оценивания повышает точность оценок по среднему квадрату ошибки в два раза (рис. 4).

Для независимых измерений величин α и $\frac{1}{\beta}$ при любых соотношениях их среднеквадратических ошибок погрешность условной оценки не превосходит наименьшей из погрешностей первичных оценок (рис. 5).

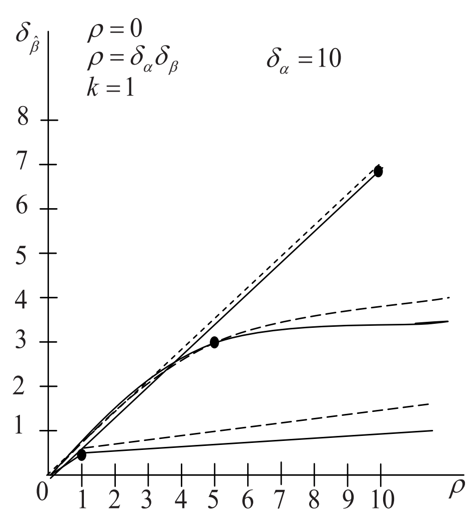

Рис. 2.

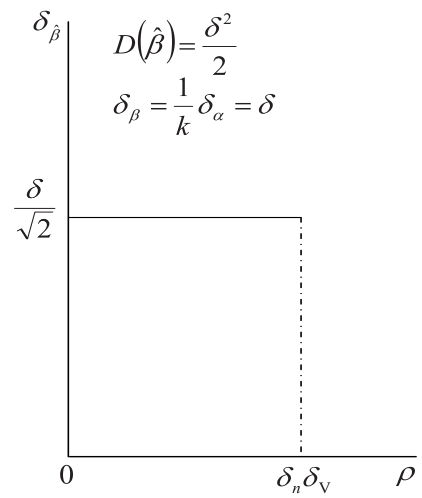

Рис. 3.

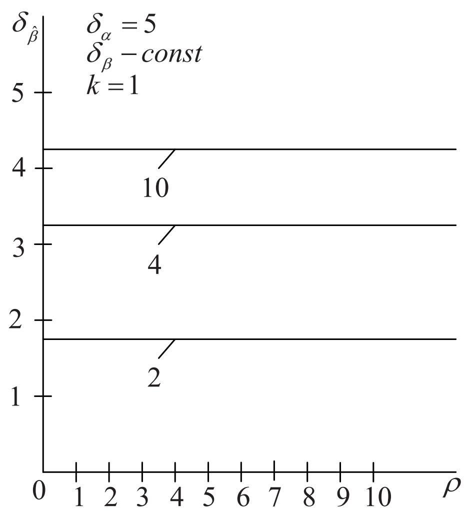

Рис. 4.

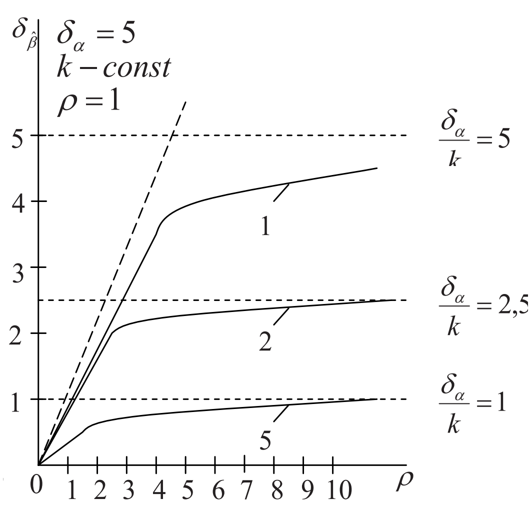

Рис. 5.

Для практического использования оценочных формул (7) необходимо располагать величинами ковариаций обратных величин $\rho_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}}$, $\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}}$, в то время как практически доступным, как правило, является оценка ковариаций „собственно” величин $\rho_{\beta\beta}$, $\rho_{\alpha\beta}$. В связи с этим возникает задача по имеющимся данным относительно $\rho_{\beta\beta}$ и $\rho_{\alpha\beta}$ получить оценки $\rho_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}}$ и $\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}}$.

3. Оценка ковариаций величин α и $\frac{1}{\beta}$ по известным ковариациям величин α и β

По определению ковариаций [1]:

$$\rho_{\beta\beta}=\int_{-\infty}^{\infty}(\beta-\bar\beta)^2 f(\beta)\,d\beta; \tag{14}$$

$$\rho_{\alpha\beta}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha-\bar\alpha)(\beta-\bar\beta)f(\alpha,\ \beta)\,d\alpha d\beta, \tag{15}$$

где $f(\beta)$ и $f(\alpha,\ \beta)$ – функции расспределения плотности вероятности β и совместно α и β тветственно; $\bar\beta$, $\bar\alpha$ – средние значения величин α и β.

Искомые ковариации определяются аналогично:

$$\rho_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar\beta}\right)^2 f(\beta)\,d\beta; \tag{16}$$

$$\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha-\bar\alpha)\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar\beta}\right)f(\alpha,\ \beta)\,d\alpha d\beta. \tag{17}$$

Как правило, случайные ошибки измерений являются гауссовскими, что для определения плотностей вероятностей их распределения $f(\alpha,\beta)$ делает достаточным лишь знание средних $\bar\alpha$, $\bar\beta$, дисперсий $\rho_{\alpha\alpha}$, $\rho_{\beta\beta}$ и взаимной ковариации $\rho_{\alpha\beta}$.

Поскольку указанные величины считаются известными, то для нахождения ковариаций $\rho_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}}$ и $\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}}$ достаточно воспользоваться соотношениями (16), (17). Неудобным является тот факт, что аналитическое решение задачи, несмотря на нормальность плотности $f(\alpha,\beta)$ невозможно, что связано с интегрированием функций, терпящих разрыв второго рода (на бесконечность) внутри области интегрирования. В таких условиях можно воспользоваться любым из известных численных методов. В частности, при вычислении искомых статистических характеристик $\rho_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}}$ и $\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}}$ удобным может оказаться метод статистического моделирования на ЭВМ [4].

Вместе с этим, указанные трудности в интегрировании (16) и (17) не исключают приближенного аналитического метода, достоинством которого является простая связь между исходными $\rho_{\alpha\alpha}$, $\rho_{\beta\beta}$ и искомыми $\rho_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}}$, $\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}}$ величинами, позволяющая быстро провести необходимые вычисления без привлечения ЭВМ. Метод состоит в линеаризации функций $\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar\beta}\right)$ и $\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar\beta}\right)^2$ путем разложения в ряд по степеням $\beta-\bar\beta$ и выделением первых членов разложения. Такое разложение приводит к окончательным расчетным формулам:

$$\rho_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}}\cong\frac{1}{\bar\beta^4}\rho_{\beta\beta}; \tag{18}$$

$$\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}} \cong -\frac{1}{\bar{\beta}^2}\rho_{\alpha\beta}. \quad (19)$$

Погрешность в (18) вызвана заменой

$$\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar{\beta}}\right)^2 \cong \frac{1}{\bar{\beta}^4}\left(\beta-\bar{\beta}\right)^2. \quad (20)$$

Равенство (20) обращается в точное в точке $V=\bar{V}$ и нарушается по мере удаления от нее. Поскольку плотность вероятности $f(\beta)$ сосредоточена практически в интервале $\beta\in\left(\bar{\beta}-3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}, \bar{\beta}+3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}\right)$, то самую большую по модулю погрешность приближения (20) следует ожидать на концах этого интервала. Она в этих точках соответственно равна:

$$\delta_1=\left|\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar{\beta}}\right)^2-\frac{1}{\bar{\beta}^4}\left(\beta-\bar{\beta}\right)\right|_{\beta=\bar{\beta}-3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}}=\frac{\left|9\rho_{\beta\beta}\left(6\bar{\beta}\sqrt{\rho_{\beta\beta}}-9\rho_{\beta\beta}\right)\right|}{\bar{\beta}^4\left(\bar{\beta}-3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}\right)^2}; \quad (21)$$

$$\delta_1=\left|\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar{\beta}}\right)^2-\frac{1}{\bar{\beta}^4}\left(\beta-\bar{\beta}\right)\right|_{\beta=\bar{\beta}+3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}}=\frac{\left|9\rho_{\beta\beta}\left(6\bar{\beta}\sqrt{\rho_{\beta\beta}}+9\rho_{\beta\beta}\right)\right|}{\bar{\beta}^4\left(\bar{\beta}+3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}\right)^2}. \quad (22)$$

Погрешность интеграла (16) при аппроксимации (20) не превосходит интеграла от максимальной из погрешностей (21) и (22), которые приблизительно равны

$$\int_{-\infty}^{\infty}\max(\delta_1,\delta_2)f(\beta)d\beta \cong \int_{\bar{\beta}-3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}}^{\bar{\beta}+3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}}\max(\delta_1,\delta_2)f(\beta)d\beta \cong \max(\delta_1,\delta_2), \quad (23)$$

так как $\int_{\bar{\beta}-3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}}^{\bar{\beta}+3\sqrt{\rho_{\beta\beta}}} f(\beta)d\beta \cong 1$.

Поэтому для оценки погрешности дисперсии (16) окончательно имеем:

$$\delta_{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta}} \le \max(\delta_1,\delta_2), \quad (24)$$

где δ_1 и δ_2 вычисляются по формулам (21) и (22). Анализ (21) и (22) показывает, что при неограниченном возрастании среднего $\bar{\beta}$ погрешность формулы (18) стремится к нулю. При неограниченном возрастании дисперсии $\rho_{\beta\beta}$ ошибка неограниченно растет. Среднее $\bar{\beta}$ и дисперсия $\rho_{\beta\beta}$ являются единственными факторами, влияющими на точность соотношений (18) и (19). Чем больше среднее $\bar{\beta}$, тем нелинейность функций $\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar{\beta}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar{\beta}}\right)^2$ менее проявляется, и линеаризация более справедлива. Кроме того, нелинейность сказывается тем меньше, чем меньше область аргумента, на котором функция рассматривается. Поэтому минимальный разброс около среднего $\rho_{\beta\beta}$ означает наибольшую точность (18) и (19).

Следует отметить, что более строго „линеаризация” относится к функции $\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar{\beta}}\right)$, так как именно она заменяется линейной. В то время как функция $\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\bar{\beta}}\right)^2$ – квадратичной.

Оценка погрешности для ковариации (17) по формуле (19) таким путем неприемлема потому, что фиксация переменной β исключает статистическую взаимозависимость α и β и приводит значение ковариации $\rho_{\alpha\frac{1}{\beta}}$ к нулю. Поэтому для ее получения предлагается использовать численные методы на ЭВМ [4].

Выводы и практические рекомендации

1. Уравнение связи оцениваемых параметров, отображая физическую природу объекта, несет в себе информацию о возможных значениях этих параметров и тем самым ограничивают область их возможной локализации. Эту информацию можно использовать при совместном экспериментальном оценивании характеристик (параметров) динамики популяций для повышения точности оценивания.

2. Способ учета априорной информации об оцениваемых параметрах в виде связывающих их уравнений состоит в том, что после получения первичных оценок в результате натурных измерений как конечные оценки берется такая совокупность параметров, которая, во-первых, отвечает уравнению связи и, во-вторых, наиболее близкая к набору оценок, полученных в результате первичного оценивания. Понятие „близости” целесообразно определить введением квадратичной метрики в пространстве параметров путем задания квадрата нормы вектора в виде квадратичной формы с матрицей, которая равна обратной корреляционной матрице вектора оцениваемых параметров. При такой метризации пространства параметров их комплексная оценка обладает свойством наименьшего среднего квадрата отклонения для истинного значения, а в случае нормальности ошибок составляет оценку максимальной правдоподобности.

3. Разработанный метод условного оценивания характеристик (параметров) динамики популяций по экспериментальным данным универсальный, так как он не привязан к физическим свойствам конкретного объекта или явления, про параметры которого идет речь. Поэтому описанный алгоритм условного оценивания может быть рекомендован для практического использования при мониторинге динамики популяций любого происхождения.

Литература

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т.2. / Б.Р.Левин. – М.: Сов. радио, 1975. – 392 с.
2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1981. – 544 с.
3. Принципи моделювання та прогнозування в екології: [підруч.] / В.В.Богобоящий, К.Р.Чурбанов, П.Б.Палій, В.М.Шмандій. – К.: Центр навч. л-ри, 2004. – 216 с.
4. Рыжиков Ю.И. Вычислительные методы / Ю.И.Рыжиков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.