УДК 539.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА РЕЙССНЕРА ДЛЯ РАСЧЕТА НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК С РАЗВЕРТЫВАЮЩЕЙСЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.И. Олевский
Кандидат технических наук, заместитель директора
ТД ДЗСМ
ул. Мониторная, 2а, г. Днепропетровск, Украина, 49130
Контактный тел.: (056) 780-22-07
E-mail: volevnew@gmail.com

Представлена методика нелінійного розрахунку статики і динаміки оболонок з серединною поверхнею, що розгортається, прямою мінімізацією функціонала Рейсснера. Рішення будується методом продовження по параметру. Використано узагальнене підсумовування рядів апроксимаціями Паде

Ключові слова: оболонки, поверхня, що розгортається, функціонал Рейсснера, продовження по параметру, апроксимації Паде

Представлена методика нелинейного расчета статики и динамики оболочек с развертывающейся срединной поверхностью прямой минимизацией функционала Рейсснера. Решение строится методом продолжения по параметру. Использовано обобщенное суммирование рядов аппроксимациями Паде

Ключевые слова: оболочки, развертывающаяся поверхность, функционал Рейсснера, продолжение по параметру, аппроксимации Паде

The method of nonlinear calculation of static and dynamics of shells with the developable middle surface by direct minimization of functional of Reissner is presented. A decision is constructed by the method of continuation on a parameter. The generalized summation of rows by approximations of Pade is used

Keywords: shells, developable surface, functional of Reissner, continuation on a parameter, approximation of Pade

1. Введение

Оболочки с развертывающейся срединной поверхностью, изготавливаемые из листовых материалов путем соединения обечаек, являются наиболее широким классом тонкостенных конструкций, используемых в машиностроении и строительстве. С точки зрения дифференциальной геометрии эти оболочки являются поверхностями нулевой гауссовой кривизны [1]. Постоянный интерес исследователей к расчету статики и динамики оболочек с развертывающейся срединной поверхностью не привел к настоящему времени к корректному решению этой задачи для ряда практически важных случаев [2]. Поэтому возникает необходимость разработки и применения новых методов расчета, позволяющих рассмотреть поведение конструкций в усложненной неоднородной, моментной и геометрически нелинейной постановке, наиболее адекватной их реальному поведению.

Изучение деформирования тонкостенных структур в большинстве работ основано на приближенном интегрировании нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких упругих оболочек. Наиболее часто используется техническая теория оболочек Доннелла–Муштари–Власова [2] в различных модификациях [3]. Как было показано в [4, 5], анализ точности входящих в уравнения геометрически нелинейной теории членов по отношению к естественным малым параметрам конструкции позволяет получить ряд упрощений для практически важных расчетных схем. Это дает возможность применить для расчета таких конструкций методы возмущения по естественным малым параметрам, что и было произведено в [4].

Вместе с тем, если конструкция и испытываемое ей напряженно-деформированное состояние не имеют явно выраженной асимметрии, использование естественных малых параметров приводит к значительным погрешностям в расчетах или к необходимости значительного их усложнения, в основном, за счет использования большего числа приближений. Использование численных методов – конечных элементов, конечных разностей или продолжения по параметру [6], – позволяет получить приемлемые результаты, однако их анализ и обобщение затруднены.

Уравнения теории гибких упругих оболочек могут быть получены из общих вариационных принципов механики деформируемого твердого тела [7] – Лагранжа, Кастильяно, Рейсснера, Ху-Васидзу, – путем построения соответствующего функционала и нахождения точек его стационарности или экстремальности. Эта задача может быть решена либо путем составления аналитических условий стационарности (уравнений Эйлера), либо путем применения вариационных методов непосредственно к рассматриваемому функционалу [2]. Если из принципа Лагранжа вытекают уравнения равновесия и естественные граничные условия в напряжениях, то из принципа Рейсснера следуют уравнения равновесия, соотношения упругости и естественные граничные условия в напряжениях и перемещениях. Известно, что принцип Рейсснера представляет собой гамильтонову форму принципа Лагранжа и, таким образом, допускает введение обобщенных переменных [8, 9]. Уменьшение размерности функционала может быть достигнуто путем задания вида решения по двум координатам, а также путем использования гипотез прикладных теорий. Принцип Рейсснера позволяет использовать независимые приближения усилий и прогибов [7, 8, 9], удовлетворяющие граничным условиям. Все это делает метод Рейсснера наиболее пригодным для построения приближенного аналитического решения задачи о нелинейном деформировании тонких оболочек.

Ниже изложена методика использования функционала принципа Рейсснера в форме Алумяэ [3] к расчету оболочек нулевой гауссовой кривизны, основанная на предположениях нелинейной теории пологих оболочек, записанных в смешанной форме в криволинейной ортогональной системе координат. Решение сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Приближенное решение строится на основе модифицированного метода продолжения по параметру, предложенного в [10]. Получаемое в результате приближение аналитически суммируется на основе дробно-рационального преобразования Паде по переменной интегрирования, обеспечивая равномерную сходимость приближения к точному решению во всей области мероморфности последнего [11, 12].

2. Основные соотношения

Рассмотрим деформирование тонкой упругой оболочки нулевой гауссовой кривизны постоянной толщины h, изготовленной из упругого изотропного материала. Введем на поверхности оболочки S криволинейный ортогональный базис с осями x,y,z. При этом координатные линии x,y совпадают с линиями главной кривизны поверхности, ось z нормальна к ней. Свяжем координатное направление оси x с линией главной нулевой кривизны. Ограничимся случаем малых по сравнению с единицей деформаций, конечных перемещений, конечных, но умеренных углов поворота нормали. Примем также кинематическую гипотезу Кирхгофа о плоских сечениях. Тогда деформации ε_{ij} и изменения кривизны k_{ij} развертывающейся срединной поверхности будут выражаться через перемещения по направлению введенных осей u,v,w следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{11}=u_{,x}+\frac{1}{2}\left(w_{,x}^{2}+\frac{1}{4A_2^2}\left(\left(A_2v\right)_{,x}-u_{,y}\right)^2\right),\\
\varepsilon_{22}=\frac{v_{,y}}{A_2}+\frac{A_{2,x}}{A_2}u+\frac{w}{R}+\\
+\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{w_{,y}}{A_2}+\frac{v}{R}\right)^2+\frac{1}{4A_2^2}\left(\left(A_2v\right)_{,x}-u_{,y}\right)^2\right),\\
\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\frac{1}{2}\left[v_{,x}+\frac{u_{,y}}{A_2}-\frac{A_{2,x}}{A_2}v-w_{,x}\left(-\frac{w_{,y}}{A_2}+\frac{v}{R}\right)\right],\\
k_{11}=-w_{,xx},\quad k_{22}=\frac{1}{A_2}\left(-\frac{w_{,y}}{A_2}+\frac{v}{R}\right)_{,y}-\frac{A_{2,x}}{A_2}w_{,x},\\
k_{12}=k_{21}=\\
=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{w_{,y}}{A_2}+\frac{v}{R}\right)_{,x}-\frac{w_{,xy}}{A_2}-\frac{A_{2,x}}{A_2}\left(-\frac{w_{,y}}{A_2}+\frac{v}{R}\right)+\frac{\left(A_2v\right)_{,x}-u_{,y}}{2A_2R}\right]
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где R - радиус кривизны недеформированной срединной поверхности в направлении координатной лини переменной y и перемещения v; $R=R(x,y)$;

A_1,A_2 - параметры Ламе срединной поверхности, соответствующие координатам x,y; для оболочек с развертывающейся поверхностью $A_1\equiv 1$;

$$\frac{d}{dx}=(\ )_{,x};\ \frac{d}{dy}=(\ )_{,y}.$$

Для упругого изотропного тела связи приведенных по толщине оболочки усилий T_{ij}, моментов M_{ij} и деформаций имеют вид

$$
\begin{gathered}
T_{11}=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{11}+\mu\varepsilon_{22}\right),T_{22}=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{22}+\mu\varepsilon_{11}\right),\\
T_{12}=\frac{Eh}{1+\mu}\varepsilon_{12},M_{11}=\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\left(k_{11}+\mu k_{22}\right),\\
M_{22}=\frac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\left(k_{22}+\mu k_{11}\right),M_{12}=\frac{Eh^3}{12\left(1+\mu\right)}k_{12},
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где E - модуль упругости материала; μ - коэффициент поперечной деформации.

При рассмотрении задачи в смешанной постановке вводится функция напряжений F так, что

$$
\begin{gathered}
T_{11}=\frac{1}{A_2}\left[\left(\frac{F_{,y}}{A_2}\right)_{,y}+A_{2,x}F_{,x}\right],\\
T_{22}=F_{,xx},\quad T_{12}=\frac{1}{A_2}\left[\left(\frac{F_{,x}}{A_2}\right)_{,y}+\frac{A_{2,x}}{A_2}F_{,x}\right].
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Если пренебречь влиянием тангенциальных перемещений u,v на углы поворота нормали в точке, что соответствует теории пологих оболочек [2, 3], то уравнения (1) упростятся следующим образом

$$\varepsilon_{11}=u_{,x}+\frac{1}{2}w_{,x}^2,$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{v_{,y}}{A_2}+\frac{A_{2,x}}{A_2}u+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{w_{,y}}{A_2}\right)^2,$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2A_2}\left[A_2 v_{,x} + u_{,y} - A_{2,x} v + w_{,x} w_{,y}\right], \quad (4)$$

$$k_{11} = -w_{,xx}, \quad k_{22} = \frac{1}{A_2}\left(-\frac{w_{,y}}{A_2}\right)_{,y} - \frac{A_{2,x}}{A_2} w_{,x},$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{w_{,y}}{A_2}\right)_{,x} - \frac{w_{,xy}}{A_2} + \frac{A_{2,x}}{A_2^2} w_{,y}\right]$$

3. Построение функционала

В соответствии с принципом Рейсснера для динамических задач [13], действительное напряженно-деформированное состояние однородного изотропного тела соответствует вариационному уравнению

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta(\Re - T) - \delta A\right] dt = 0, \quad (5)$$

где $\Re$ - функционал Рейсснера,
T - кинетическая энергия тела,
A - работа внешних сил,
t - время,
t_0, t_1 - начальное и конечное время движения тела.
Таким образом, необходимо найти функционал

$$\Re_0 = \Re - T - A \quad . \quad (6)$$

Воспользуемся частным случаем функционала Рейсснера для пологих оболочек $\Re_A$ в форме Алумяэ [3]. В случае статического напряженно-деформированного состояния свободно опертой оболочки с развертывающееся срединной поверхностью, нагруженной только поперечной нагрузкой интенсивностью $q(x,y)$ он имеет вид

$$\Re_A = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \iint_S \left[(\nabla^2 w)^2 - (1+\mu) L(w,w)\right] dxdy -$$
$$- \frac{1}{2Eh} \iint_S \left[(\nabla^2 F)^2 - (1+\mu) L(F,F)\right] dxdy + \quad (7)$$
$$+ \frac{1}{2} \iint_S \left\{T_{11} w_{,x}^2 + T_{22} w_{,y}^2 - 2T_{12} w_{,x} w_{,y} + 2w \nabla_k F - 2qw\right\} dxdy,$$

где T_{ij} имеют вид (3),

∇^2 - оператор Лапласа,

$$\nabla^2 \varphi = A_2^{-1}\left[\left(A_2 \varphi_{,x}\right)_{,x} + \left(A_2^{-1} \varphi_{,y}\right)_{,y}\right],$$

$$L(\varphi, \psi) = \varphi_{,xx}\psi_{,yy} + \varphi_{,yy}\psi_{,xx} - 2\varphi_{,xy}\psi_{,xy},$$

$$\nabla_k \varphi = A_2^{-1}\left(A_2 R^{-1} \varphi_{,x}\right)_{,x}.$$

Для решения динамических задач функционал необходимо дополнить кинетической энергией T и работой A_Γ внешних сил $T_{11}^*, T_{12}^*, Q^*, M_{11}^*, M_{12}^*$ на контуре Γ (при наличии нагрузки только на торцах, совпадающих с направлением оси y). Если пренебречь величиной скорости в тангенциальном направлении, то T будет определяться выражением

$$T = \frac{1}{2} \iint_S \int_{-h/2}^{h/2} \rho \dot{w}^2 dz dx dy, \quad (8)$$

где ρ - плотность материала оболочки, точка означает дифференцирование по времени. Для работы внешних сил на торцах получим выражение

$$A_\Gamma = \int_\Gamma \left[T_{11}^* u + T_{12}^* v + Q^* w + M_{11}^* w_{,x} + M_{12}^* w_{,y}\right] dy. \quad (9)$$

Общее выражение для функционала $\Re_0$ для данного вида конструкций и типа нагрузки получим из (7)-(9) по формуле

$$\Re_0 = \Re_A - T - A_\Gamma. \quad (10)$$

4. Решение вариационной задачи

Полученный функционал (10) можно непосредственно подставить в уравнение принципа Рейсснера (5) и получить после преобразований систему нелинейных дифференциальных уравнений теории перемещений пологих оболочек с граничными условиями на контуре для рассматриваемого типа тонкостенных конструкций. Точное решение такой динамической граничной системы для практически важных случаев на сегодняшний день еще не получено. Приближенное интегрирование уравнений связано с использованием того или иного вида аппроксимации искомых функций [2], допускающих последующую редукцию задачи до систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если выбранную аппроксимацию искомых функций подставить непосредственно в функционал, то его вариация будет включать только вариации параметров приближения. Это эквивалентно применению подхода Гамильтона с использованием обобщенных переменных [8] и значительно снижает объем вычислений. При этом необходимо использовать преимущество принципа Рейсснера, который допускает использование независимых приближений усилий и прогибов, удовлетворяющих граничным условиям.

Рассмотрим наиболее часто используемое при расчете динамических задач представление решения вида

$$w = \sum_{i=0}^{N_1} w_i(t)\varphi_i(x,y), \quad F = \sum_{i=0}^{N_2} F_i(t)\psi_i(x,y), \quad (11)$$

где φ_i, ψ_i - заданные функции.

После последовательной подстановки (11) в (7)-(10) и интегрирования по переменным x, y, получим выражение вида

$$\Re_0 = \sum_{\substack{i,j,k,l,m,n,p,q \\ (j,l,n,q)\in(0\cup1)}} \left(\Re^W_{ijklmnpq} w_i^j w_k^l w_m^n w_p^q + \right.$$
$$\left. + \Re^F_{ijklmnpq} F_i^j F_k^l F_m^n F_p^q + \Re^{Fw}_{ijklmnpq} F_i^j F_k^l w_m^n w_p^q\right) - T \quad (12)$$

Подробная детализация коэффициентов в (12) нецелесообразна без точного задания вида оболочки, нагрузки и функций в (11) в виду громоздкости вычислений.

Подставим (12) в уравнение условия Рейсснера (5) и произведем варьирование функционала $\Re_0$.

$$\delta\Re_0=\sum_{\substack{i,j,k,l,m,n.p.q\\(j,l,n,q)\in(0\cup1)}}\Big(\Re^{W}_{ijklmnpq}\left(w_i^j w_k^l w_m^n \delta w_p^q + w_i^j w_k^l \delta w_m^n w_p^q+\right.$$
$$\left.+w_i^j\delta w_k^l w_m^n w_p^q+\delta w_i^j w_k^l w_m^n w_p^q\right)+\Re^{F}_{ijklmnpq}\left(F_i^j F_k^l F_m^n \delta F_p^q+\right. \quad (13)$$
$$\left.+F_i^j F_k^l \delta F_m^n F_p^q + F_i^j \delta F_k^l F_m^n F_p^q+\delta F_i^j F_k^l F_m^n F_p^q\right)+\Re^{FW}_{ijklmnpq}\left(F_i^j F_k^l w_m^n \delta w_p^q+\right.$$
$$\left.F_i^j F_k^l \delta w_m^n w_p^q + F_i^j \delta F_k^l w_m^n w_p^q+\delta F_i^j F_k^l w_m^n w_p^q\right)\Big)-\delta T$$

Преобразуем вариацию кинетической энергии следующим образом

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T dt=\iint_S\int_{-h/2}^{h/2}\rho\delta\left(\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\dot w^2 dt\right)dzdxdy=$$
$$=\iint_S\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(\int_{t_0}^{t_1}\dot w\delta\dot w dt\right)dzdxdy= \quad (14)$$
$$=\iint_S\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(\dot w\delta w\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\ddot w\delta w dt\right)dzdxdy.$$

Поскольку уравнение (5) справедливо для любого промежутка (t_0,t_1), то его можно подобрать так, что будут известны перемещения (или скорости перемещений) в начальный и конечный момент времени, т. е. первый член подынтегрального выражения в (14) можно не учитывать. Получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T dt=-\int_{t_0}^{t_1}\iint_S\int_{-h/2}^{h/2}\rho\ddot w dzdxdy\delta w dt\,. \quad (15)$$

После подстановки (13) с учетом (11) и (15) в вариационное уравнение принципа Рейсснера (5) и замены порядка интегрирования, получим

$$\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\sum_{\substack{i,j,k,l,m,n.p.q\\(j,l,n,q)\in(0\cup1)}}\Big(\Re^{W}_{ijklmnpq}\left(w_i^j w_k^l w_m^n \delta w_p^q + w_i^j w_k^l \delta w_m^n w_p^q+\right.$$
$$\left.+w_i^j\delta w_k^l w_m^n w_p^q+\delta w_i^j w_k^l w_m^n w_p^q\right)+\Re^{F}_{ijklmnpq}\left(F_i^j F_k^l F_m^n \delta F_p^q+\right.$$
$$\left.+F_i^j F_k^l \delta F_m^n F_p^q + F_i^j \delta F_k^l F_m^n F_p^q+\delta F_i^j F_k^l F_m^n F_p^q\right)+ \quad (16)$$
$$+\Re^{FW}_{ijklmnpq}\left(F_i^j F_k^l w_m^n \delta w_p^q+F_i^j F_k^l \delta w_m^n w_p^q + F_i^j \delta F_k^l w_m^n w_p^q+\right.$$
$$\left.+\delta F_i^j F_k^l w_m^n w_p^q\right)\Big)+\sum_{i,j}\Re^{T}_{ij}\ddot w_i\delta w_j\Bigg]dt=0$$

Поскольку уравнение (16) справедливо для любого промежутка (t_0,t_1), то оно эквивалентно условию равенства нулю подынтегрального выражения

$$\sum_{\substack{i,j,k,l,m,n.p.q\\(j,l,n,q)\in(0\cup1)}}\Big(\Re^{W}_{ijklmnpq}\left(w_i^j w_k^l w_m^n \delta w_p^q + w_i^j w_k^l \delta w_m^n w_p^q+\right.$$
$$\left.+w_i^j\delta w_k^l w_m^n w_p^q+\delta w_i^j w_k^l w_m^n w_p^q\right)+\Re^{F}_{ijklmnpq}\left(F_i^j F_k^l F_m^n \delta F_p^q+\right.$$
$$\left.+F_i^j F_k^l \delta F_m^n F_p^q + F_i^j \delta F_k^l F_m^n F_p^q+\delta F_i^j F_k^l F_m^n F_p^q\right)+ \quad (17)$$
$$+\Re^{FW}_{ijklmnpq}\left(F_i^j F_k^l w_m^n \delta w_p^q+F_i^j F_k^l \delta w_m^n w_p^q + F_i^j \delta F_k^l w_m^n w_p^q+\right.$$
$$\left.+\delta F_i^j F_k^l w_m^n w_p^q\right)\Big)+\sum_{i,j}\Re^{T}_{ij}\ddot w_i\delta w_j=0$$

Такой подход соответствует применению к (5) принципа Даламбера. Просуммируем в (17) члены с одинаковыми вариациями $\delta w_i,\delta F_i$. Приравнивая их к нулю, получим две системы уравнений - обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени при δw_i и алгебраических уравнений при δF_i. Система обыкновенных дифференциальных уравнений должна быть дополнена начальными условиями, задающими перемещения и их скорости в начальный момент времени.

Решение полученных систем может быть получено рядом приближенных методов. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений наиболее часто используется метод Линштедта-Пуанкаре [5]. Вместе с тем, в [12] было показано, что для решения таких задач эффективным является модифицированный метод продолжения по параметру, использующий мероморфное продолжение решения на основе двумерных аппроксимаций Паде. Особенно эффективным он может быть для решения указанной задачи, поскольку ее нелинейность является степенной.

5. Применение расчетной методики

Предложенный метод был применен для расчета свободных колебаний гибкой упругой круговой цилиндрической оболочки радиуса R, длиной L и толщиной h при шарнирном опирании торцов. В этом случае $A_2=1, R=\text{const}$.

Соответствующая система соотношений имеет вид

$$\varepsilon_{11}=u_{,x}+\frac{1}{2}w_{,x}^2,\ \varepsilon_{22}=v_{,y}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2}w_{,y}^2,$$
$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=\frac{1}{2}\left[v_{,x}+u_{,y}+w_{,x}w_{,y}\right],$$
$$k_{11}=-w_{,xx},\quad k_{22}=-w_{,yy},\ k_{12}=k_{21}=-w_{,yx}, \quad (18)$$
$$T_{11}=F_{,yy},\quad T_{22}=F_{,xx},\quad T_{12}=F_{,xy},$$
$$\nabla^2\varphi=\varphi_{,xx}+\varphi_{,yy},\ \nabla_k\varphi=R^{-1}\varphi_{,xx}.$$

Формы радиального прогиба прогиба w и функции усилий F, удовлетворяющие граничным условиям, задаются в виде

$$w=A(t)\sin m_1x\cos n_1y+0{,}25n_1^2R\left(A(t)\right)^2\sin^2 m_1x,$$
$$F=B(t)\sin m_1x\cos n_1y. \quad (19)$$

Здесь $A(t),B(t)$ - временные функции, связанные условием непрерывности перемещений, $m_1=\pi mL^{-1}, n_1=nR^{-1}$ - параметры, характеризующие волнообразование вдоль образующей и направляющей соответственно, m,n - натуральные числа.

Функционал метода Рейсснера будет в этом случае иметь вид

$$\Re_0=\frac{Eh^3}{24\left(1-\mu^2\right)}\pi RL\left[\frac{A^2}{2}\left(m_1^2+n_1^2\right)^2+A^4R^2m_1^4n_1^4\right]-$$
$$-\frac{\pi RL}{4Eh}B^2\left(m_1^2+n_1^2\right)+\frac{1}{6}A^3BLm_1n_1^4-\frac{\pi}{2}ABLm_1^2-T, \quad (20)$$

а разрешающие уравнения будут такими

$$
\begin{aligned}
&\frac{Eh^3}{24\left(1-\mu^2\right)}\pi R\left[A\left(m_1^2+n_1^2\right)^2+4A^3R^2m_1^4n_1^4\right]+\\
&+\frac{1}{2}A^2Bm_1n_1^4-\frac{\pi}{2}Bm_1^2-\frac{\pi}{2}\rho hR^2n_1^2\left(\dot{A}^2+A\ddot{A}\right)=0,\\
&-\frac{\pi R}{Eh}B\left(m_1^2+n_1^2\right)+\frac{1}{3}A^3m_1n_1^4-\pi Am_1^2=0,\\
&t_0=0:A=f,\dot{A}=0.
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

Применение к задаче (21) предложенного в [10, 12] модифицированного метода продолжения по параметру с использованием аппроксимаций Паде позволяет получить приближение второго порядка по искусственному параметру для безразмерной частоты нелинейных колебаний Ω в виде

$$
\Omega=\sqrt{1+A_1\left(\frac{f}{R}\right)^2+A_2\left(\frac{f}{R}\right)^4},
$$

где A_1,A_2 - коэффициенты, зависящие от параметров оболочки и величин m,n.

Видно, что колебания являются неизохронными. Это хорошо согласуется с ранее полученными результатами [14], при этом существенно сокращает объем вычислений.

6. Выводы

В настоящей работе дано систематизированное изложение прямого применения вариационного принципа Рейсснера к расчету статических и динамических задач деформирования оболочек с развертывающейся срединной поверхностью. Приведены выражения для аналитического расчета коэффициентов функционала по указанному методу.

Предложено использовать модифицированный метод продолжения по параметру для приближенного аналитического решения полученных систем со степенной нелинейностью. Показана эффективность такого подхода на примере расчета свободных колебаний шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки.

Литература

1. Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 2nd edition. Boca Raton. FL, USA : CRC Press Inc, 1998. 1053°p.
2. Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. М. Изд-во Наука. 1988. 208с.
3. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань Академия наук. 1957. 432с.
4. Андрианов И. В., Холод Е. Г. Упрощенные соотношения нелинейной динамики гладких оболочек//Межведомственный научный сборник "Динамические системы". 1983. Вып. 2. с. 60-64.
5. Andrianov, I.V., Kholod, E.G., Olevsky, V.I. "Approximate non-linear boundary value problems of reinforced shell dynamics», J. Sound Vibr., 1996. vol. 194, N 3, pp. 369 - 387.
6. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 232 с.
7. Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 288 с.
8. Трач В.М. Применение вариационного принципа для построения систем уравнений о напряженно-деформированном состоянии анизотропных композиционных конструкций.//Наукові нотатки Збірник наукових праць. 2006. №18. С. 394-404.
9. Reissner O. On a variational theorem in elasticity //J. Math. And Phys. 1950. Vol. 29, N2. P.90-95.
10. Андрианов И.В., Олевский В.И., Токажевский С. Модифицированный метод декомпозиции Адомяна//ПММ. 1998. Том 62, №.2. С. 334-339.
11. Андрианов И.В. Применение метода Паде-аппроксимант для устранения неоднородностей асимптотических разложений // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. №3. С.166-167.
12. Андрианов И.В.,Мильцын А.М., Олевский В.И., Плетин В.В Расчет нелинейного деформирования оболочек с развертывающейся срединной поверхностью приближенными аналитическими методами// Восточно-европейский журнал передовых технологий. 2010. №3/9 (45). С. 27-34.
13. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. К.: Вища шк. Головне изд-во, 1986. 191 с.
14. Эвенсен Д.А. Нелинейные колебания круговых цилиндрических оболочек//Тонкостенные оболочечные конструкции. М.: Машиностроение, 1980. с. 156-176.