

ному оптимуму показателів якості маршрутів, єть множество Парето-оптимальних рішень.

2. Незважаючи на вибір маршрутів з точки зору узгодженого оптимума, багнокритеріальний підхід дає не хуе, а інога і луе результати по сравнению з багнокритеріальним підходом. При еьом в багнокритеріальном підході учитываються нескілько показателів якості.

3. Множество Парето-оптимальних рішень можна використовувати для організації багнопутевої маршрутизації, що дозволить рівномірно використовувати лінії зв'язу.

4. Для вибору єдинственного варіанта маршруту можна використовувати доповільну інформацію від експертів з використанням методів суження подмножества Парето на основі введення скалярних функцій цінності, лексикографічного підходу, теорії розмитих мноеств і др.

5. Проведені сравнительний аналіз результатів рішення задачі багнокритеріальної оптимізації і

маршрутизації на основі багнокритеріального підходу.

6. В системі управління мережею зв'язу можуть використовуватися любує із перелічених механізмів управління потоками.

Література

1. Семенов Ю.А. Алгоритми телекомунікаційних мереж ч.1. Алгоритми і протоколи каналів і мереж передачі даних. – Москва, 2007.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения багнокритеріальних задач. – М.: Высшая школа, 1982.
3. Перепелица В.А. Багнокритеріальні задачі теорії графів. Алгоритмічний підхід. – Київ УМК ВО, 1989.
4. Безрук В.М. Векторна оптимізація і статистическое моделювання в автоматизованом проектуванні системи зв'язу. – Харків: ХНУРЕ, 2002.

УДК 004.942

СТРУКТУРИЗАЦІЯ ТА ДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ СКЛАДНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ МЕРЕЖ

В.В. Пасічник

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри*
Контактний тел.: (0322) 258-25-38
E-mail: vpasichnyk@gmail.com

Н.М. Іванущак

Фахівець I категорії*

*Кафедра комп'ютерних систем та мереж
Чернівецький національний університет імені Юрія
Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58000
Контактний телефон: 096-677-13-74
E-mail: ivanuschak@yandex.ru

У роботі розглянуто основні характеристики складних мереж, правила їх генерації та моделі структуризації. Означені основні фактори впливу на ріст та генерацію вузлів мережі. Розглянуто статистичний підхід до опису складних мереж

Ключові слова: характеристики складних мереж, моделі мереж, правила генерації

В работе рассмотрены основные характеристики сложных сетей, правила их генерации и модели структуризации. Определены основные факторы влияния на рост и генерацию узлов сети. Рассмотрен статистический подход к описанию сложных сетей

Ключевые слова: характеристики сложных сетей, модели сетей, правила генерации

This article examines the main characteristics of complex networks, rules of their generation and models of their structure. There was determined the main factors that influencing growth and generation vertices in the network. The statistical approach was considered in describing complex networks

Keywords: characteristics of complex networks, network models, rules of generation

1. Вступ

Предметом огляду та дослідження статті є складні мережі, які виникають у результаті людської діяльно-

сті. У роботі розглянуті моделі та сформульовані правила структуризації складних комп'ютерних мереж. Здійснено аналіз факторів впливу на генерацію та кластеризацію складних мереж, зокрема вплив при-

родного росту мереж, соціально-виробничих закономірностей на генерацію їх вузлів. Приведені фізичні аналогії росту та динаміки досліджуваних систем.

2. Основні характеристики природних та штучних мереж

В роботі авторів [1] означені основні характеристики, які використовуються при дослідженні та моделюванні мереж.

«Лінійний розмір» мережі характеризується поняттями середнього $\langle l \rangle$ і максимального l_{\max} найкоротших шляхів. Шляхом між вузлами l_{ij} назвемо найкоротшу відстань між ними.

Для зв'язаної мережі з N вузлів середній найкоротший шлях означається як:

$$\langle l \rangle = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i>j} l_{ij}, \quad (1)$$

l_{ij} - довжина найкоротшого шляху між вузлами i та j , l_{\max} - найбільше значення з усіх l_{ij} , заданих для цієї мережі.

Глобальною характеристикою мережі є середня довжина найкоротшого шляху, а окремий вузол m характеризує локальна величина – коефіцієнт кластерності C_m [2,3], який відповідає рівню зв'язаності вузла у мережі і характеризує тенденцію до утворення груп взаємозв'язаних вузлів,

$$C_m = \frac{2E_m}{k_m(k_m - 1)}. \quad (2)$$

C_m визначається як відношення реальної кількості ребер E_m , які з'єднують найближчих сусідів даного вузла, до максимально можливої (такої, при якій всі найближчі сусіди даного вузла були б з'єднані безпосередньо один з одним).

Головною характеристикою мережі, яка задає розподіл ребер вершини, тобто ступінь вершини, є розподіл ступенів вузлів $P(k)$, що визначає ймовірність того, що вузол i має ступінь $k_i=k$, іншими словами, що випадково вибрана вершина буде мати рівно k ребер. Мережі, які характеризуються різними $P(k)$, демонструють дуже різноманітну поведінку. До найчастіше спостережуваних прикладів розподілу ступенів вузлів відносяться:

а) розподіл Пуассона

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (3)$$

б) експоненційний розподіл

$$P(k) \sim e^{-k/\langle k \rangle}, \quad (4)$$

в) степеневий розподіл

$$P(k) \sim 1/k^\gamma, \quad k \neq 0, \quad \gamma > 0. \quad (5)$$

В залежності від виду розподілу ступенів вершин (3)-(5) мережі поділяються на три різних типи – класичні випадкові графи, які є варіантом моделі Ердоша-Рені, моделі тісного світу [3] та мережі без масштабування, які мають місце для більшості реальних складних мереж.

В роботі [1] нами були проаналізовані характеристики, динамічні та кореляційні властивості основних

типів природних та штучних мереж, таких як соціальні, інформаційні та технологічні, та продемонстровано, що вони являються безмасштабними і підпорядковуються одному і тому ж степеневому закону росту. Зокрема, до таких мереж відносяться мережі співавторства у різних галузях науки, електронних повідомлень, WWW, мережі цитування, мережі громадського транспорту, Інтернет та ін.

3. Моделі структуризації та правила генерації складних мереж

Явища, що відбуваються у складних мережах, пояснюються багатьма різними моделями. Основними з них, які в основному спричинили сьгоднішнє розуміння складних мереж, є класичний випадковий граф Ердоша-Рені, мережа тісного світу Ватса-Строгаца та безмасштабна мережа Барабаші-Альберта, що є прикладом зростаючої мережі. Моделі, що описують зростаючі мережі, приводять до степеневих розподілів ступенів вузлів $P(k)$.

Граф Ердоша-Рені є рівноважним ансамблем графів зі сталою кількістю вершин N [4]. Розподіл ступенів вузлів k для цього графа визначається формулою Пуассона (3). Побудова графа здійснюється генеруванням, де до N відокремлених вершин послідовно додаються ребра, що з'єднують випадковим чином довільні пари вершин. Початково граф складатиметься із сукупності малих вершин, які в процесі генерування з часом розростаються до гігантського кластера зв'язаних вершин, кількість яких є скінченною частиною загальної кількості N . При генерації постійно зростає ймовірність зв'язування вершин, яка досягає з часом деякого критичного значення. В результаті такого процесу, який має характер фазового переходу, граф спонтанно розростається до гігантського кластера вершин, пов'язаних між собою, що нагадує конденсацію краплі води в перенасиченій парі.

Модель Ватса-Строгаца [5] є комп'ютерною моделлю тісного світу. Її побудова зводиться до наступного: розглядається одновимірний із N вершин періодичний ланцюг, замкнутий у кільце. Спочатку кожна вершину з'єднуємо з іншими сусідніми, які знаходяться на відстані не більшій за k , а потім кожне ребро з певною ймовірністю m Perez'єднується з довільною вершиною, що приводить до трансформації регулярного ланцюга у граф тісного світу (рис. 1).

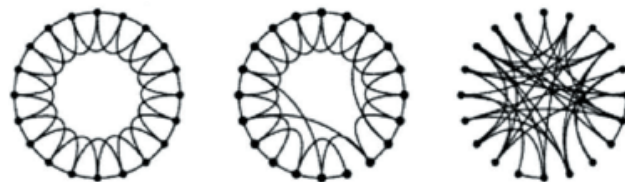


Рис. 1. Трансформація регулярного ланцюга у граф тісного світу та у випадковий граф

Оскільки в цій моделі кількість ребер є сталою, а ймовірності реалізації графів – різні, то вона зводиться до *канонічного* ансамблю графів і описує реально існуючі мережі, топологія яких не є ані цілком регулярною, ані цілком випадковою.

Більшість реальних графів підпорядковуються степеневому закону розподілу (5). Ці графи описуються моделлю переважного приєднання побудови мереж **Барабаші-Альберта** [6,7] і являються безмасштабними, так як, завдяки далекосяжним взаємодіям система не має масштабу зміни характерних величин. Зростання та переважне приєднання є основними механізмами побудови безмасштабних мереж. Ця побудова здійснюється за такими принципами: 1) до невеликої кількості вузлів (n_0) на кожному часовому кроці додається новий вузол з $n \leq n_0$ зв'язками, які з'єднують його з наявними вузлами; 2) суть переважного приєднання в тому, що ймовірність приєднання W нового вузла до вузла i залежить від ступеня k_i вузла i :

$$W(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \tag{6}$$

Існують два основних методи побудови графів зі степеневим законом розподілу $P(k)$ - це метод *рандомізації ребер* та метод *рандомізації вершин* (рис. 2).

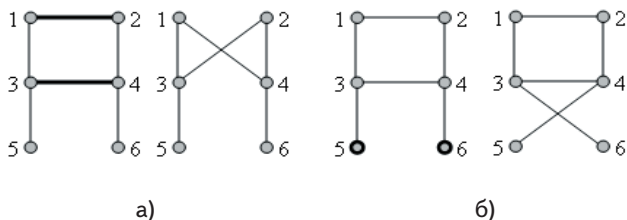


Рис. 2. Схема генерування графів методами рандомізації: а) рандомізація ребер; б) рандомізація вершин

Довільним чином вибираються два ребра і переставляються кінці кожного з них, при цьому незмінними залишаються ступені всіх вершин. Згенерований у результаті такої процедури канонічний ансамбль матиме однакові ступені вершин та різні питомі ваги $P(k)$ графів. Безмасштабні графи можуть бути згенеровані в результаті нерівноважних процесів зростання різних ансамблів мереж. При цьому вони виникають як перехідні ансамблі, що представляють мережі, утворені при переході від вихідного до кінцевого набору графів. Так, в ансамблях, енергія яких змінюється за законом $E = -\sum_i k_i \ln(k_i)$, перетворення класичного випадкового графа в повністю зв'язаний кластер відбувається через проміжну безмасштабну зіркоподібну фазу [8].

Нехай початково є ансамбль ребер, що приєднані до вершин із малими ступенями, і невелика кількість вершин, що є центрами конденсації. Зміна енергії, пов'язана з еволюцією ребер у ансамблі, є незначною, тоді як центри конденсації поглинають ребра з великою швидкістю, яка монотонно зростає зі збільшенням ступенів вершин, у яких вони сходяться. Приєднання ребра до вершини приводить до зміни енергії $\Delta E = \partial E / \partial k = -\ln k - 1$, тому швидкість конденсації визначається множителем: $v(k) \sim e^{\Delta E/T} \propto k^{1/T}$, де T - дисперсія ансамблю графів, що відіграє роль температури. Оскільки ймовірність $P(k)$ знайти вершину із заданим ступенем обернено пропорційна до швидкості конденсації, то зі знайденої оцінки відразу впливає степеневий розподіл $P(k) \propto 1/v(k) \propto k^{-\gamma}$ з показником $\gamma = 1/T$. Оскільки центри конденсації ребер утворю-

ються при температурах $T < 1$ [8], то знайдений показник обмежений значеннями $\gamma > 1$.

4. Фактори впливу на динаміку росту комп'ютерних мереж

Розуміння структури локальної комп'ютерної мережі впливає з дослідження її еволюції в часі, топології та реального розташування. Локальні мережі створюються для оперування у невеликому географічному просторі. Вони дозволяють множинний доступ до високошвидкісного середовища та керування з допомогою локального адміністрування.

Можна виділити два способи утворення складних мереж:

1. Об'єднання більш дрібних мереж в єдину корпоративну мережу;
2. Початково спроектована та реалізована за проектом мережа.

Частіше стикаємося з першим типом мереж: традиційно мережі утворюються і організовуються розрізнено і спонтанно, а потім їх об'єднують і в результаті здійснюється перехід мережі до другого типу. Змінюється обладнання, топологія, структура окремих ділянок і мережа перетворюється в струнку ієрархічну структуру.

В даний час створені і експлуатуються різні типи локальних мереж з різними розмірами, алгоритмами роботи, архітектурою і структурною організацією. Незалежно від типу мереж, до них виставляються загальні вимоги:

1. Швидкість – найважливіша характеристика локальної мережі;
2. Адаптованість до середовища;
3. Надійність – властивість мережі зберігати повну чи часткову дієздатність незалежно від виходу з ладу деяких вузлів чи кінцевого обладнання.

Комп'ютерні мережі відносяться до мереж, що постійно ростуть і розвиваються. Аналіз розвитку комп'ютерної мережі ґрунтується на встановленні *факторів впливу* на генерацію вузлів та умов утворення і приєднання в мережі нових серверів зі своєю структурою.

Серед факторів впливу на ріст мережі в першу чергу необхідно вирізнити **розмір** або **протяжність** локальної мережі, що визначається відстанню між найбільш віддаленими станціями, при якій за нормальної роботи вузлів чітко розпізнаються колізії, та кількістю об'єднаних в мережу комп'ютерів. Для Інтернет-мережі цей розмір називається діаметром мережі і складає відстань порядку 1 км, що дозволяє отримати високу швидкість зв'язку та максимально можливий рівень сервісу. При цьому кількість вузлів в мережі складає ~ 86. Кількість під'єднаних до мережі комп'ютерів сильно впливає як на її продуктивність, так і на складність в обслуговуванні і також визначає вартість необхідних програмних засобів.

При розростанні мережі зростає число колізій, і різко падає її корисна пропусканна здатність та швидкодія передачі сигналу, тому може знадобитися використання дуже дорогого або рідкісного обладнання. Обмеження мережі за довжиною являється передумовою вибору структури мережі, розбиття її на окремі

частини, появи додаткових серверів з новою мережею зв'язків. Міжсерверні з'єднання дозволяють забезпечити підвищену стійкість, меншу затримку, зменшення вартості доступу, а також підвищення якості зв'язку для кінцевих користувачів вцілому.

Спостерігається динаміка мережі, своєрідна **кластеризація**, сервери виступають центрами утворених кластерів, відбувається просторове розміщення компонент мережі в чітку ієрархічну структуру.

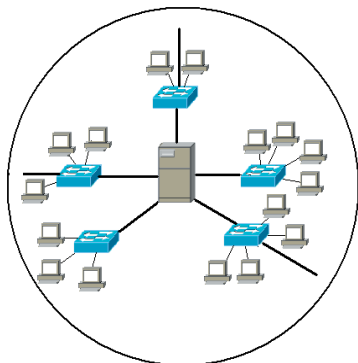


Рис. 3. Схема структуризації локальної Інтернет-мережі. Сервер з'єднаний зі світчами, що є вузлами мережі, які в свою чергу ребрами з'єднані з користувачами Інтернету

Приєднання нових вузлів диктується **економічною вигідністю**, тобто ресурсними затратами, які напряму залежать від географічного розміщення споживачів. Тому при проектуванні мережі не менш важливим фактором впливу на її ріст є врахування ефективності по відношенню ціна/якість.

Таким чином, на утворення нових зв'язків у мережі впливають різні фактори, кожному з яких можна присвоїти свою вагу, а вузлам мережі – певне значення енергії, яка залежить від способу об'єднання вузлів у графі.

5. Фізичні аналогії росту складних мереж

Досліджувані комп'ютерні мережі незмірно складніші за кристалічну систему, однак, розглянуті тут аналогії підказують одну цілком здійсненну ідею: знайти спочатку для найбільш чітко сформованих мереж відповідний аналог серед кристалографічних систем, який таким чином, буде абстрактною, спрощеною, але достатньо наглядною моделлю комп'ютерної мережі. Тоді, на основі «кристалізаційних» уявлень можна розробити різні способи наглядного графічного, динамічного зображення росту складної мережі і розвитку її компонент. Для цього можуть бути залучені двомірні або трьохмірні моделі росту кристалів, сферолітів, кристалодендритів і їх природних мінеральних і синтетичних агрегатів, які вибираються в залежності від складності системи або специфіки задачі.

Аналіз топології та росту локальних комп'ютерних мереж, які являються об'єктом наших досліджень, демонструє їх чітку ієрархічну структуру. Центрами росту та кластеризації мережі являються сервери, від яких географічно в різних напрямках розходяться кабелі та підключаються користувачі.

Аналогічним чином відбувається процес кристалізації твердого тіла, який починається з утворення

кристалічних зародків (центрів кристалізації) і продовжується в процесі росту їх числа і розмірів.

При затвердінні система понижуює свою енергію на величину $\Delta f_v V$, що, однак не вичерпує всієї зміни енергії. При зародженні кристалів виникає границя розділу між твердою і рідкою фазами, яка володіє енергією $S\sigma$ (S - поверхня зародків, σ - питома поверхнева енергія). Зміна вільної енергії для зародка у вигляді кулі записується у вигляді:

$$\Delta F = -\frac{4}{3}\pi r^3 m \Delta f_v + 4\pi r^2 m \sigma,$$

тут m - число зародків, r - їх радіус, $\Delta f_v V = F_p - F_t$ - різниця вільних енергій рідкого і твердого металів. Критичне значення ΔF_k відповідає зародку з розміром r_k . Із умови екстремуму функції ΔF отримується значення критичного радіуса зародка:

$$r_k = \frac{2\sigma T_s}{Q} \cdot \frac{1}{\Delta T},$$

Q - тепловий ефект затвердіння на одиницю об'єму.

З одного боку, чим менша флуктуація енергії, необхідна для утворення зародка критичного радіусу, тим більша ймовірність W_1 його утворення. Згідно з статистичними уявленнями термодинаміки:

$$W_1 \sim e^{-\frac{\Delta F_k}{kT}}.$$

Ймовірність переходу атома з рідкої фази в тверду при утворенні зародка $W_2 \sim e^{-\frac{U}{kT}}$, де U - енергія активації самодифузії. Швидкість утворення зародків n пропорційна до ймовірності W складної події, яка складається з виникнення флуктуації необхідного розміру і переходу атомів із рідкої фази в тверду: $W = W_1 \cdot W_2$.

Виходячи з аналогій між процесами кристалізації та ростом локальної мережі, можна уподібнити поняття критичного радіуса зародку r_k до радіуса кластера мережі, а ймовірність утворення зародка до повної ймовірності реалізації графа.

Кристали, що утворюються в процесі затвердіння металу, можуть мати різну форму. Частіше в процесі кристалізації утворюються розгалужені або деревовидні кристали, що отримали назву дендритів (рис. 4).

У напрямку відводу тепла кристал росте швидше, ніж в іншому напрямку. Це приводить до того, що спочатку утворюються довгі гілки – осі першого порядку (I). Одночасно на ребрах осей першого порядку зароджуються і зростають перпендикулярні до них такі ж гілки другого порядку (II) і так далі. В кінцевому рахунку утворюються кристали у формі дендритів.

Причини утворення дендритних форм є різноманітними: в одних випадках причиною таких утворень є нерівномірний приплив речовини у зв'язках рідинах, в інших – домішки у розчинах, в третіх – швидкість тепловіддачі. Відокремлення тепла, а відповідно, і ріст кристалу відбувається інтенсивніше у вершинах кристалу, ніж в області його ребер і граней.

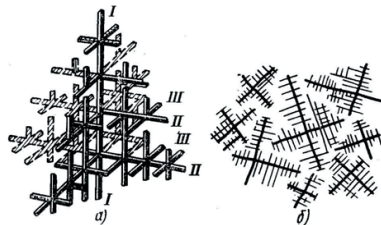


Рис. 4. Схема дендритного кристалу (а) і росту дендритів (б)

За механізмом утворення складні мережі повторюють в процесі своєї еволюції ріст дендритних кристалів. Вони проходять однакові стадії зародження і розвитку: мають свій початок відліку, свій зміст і форму, виступають як оформлені цілісні об'єкти, що мають свою історію розвитку.

Таким чином модель структуризованого твердого тіла являється абстрактною, спрощеною, але досить наглядною гомоморфною моделлю складної мережі.

6. Статистичний підхід до опису складних мереж

Оскільки випадковий граф містить велику кількість вершин і ребер, то його кількісний опис потребує використання статистичного підходу [9]. Вершинам графів приписується певне значення енергії E_i , тоді ймовірність P_i , що вершина має енергію E_i , визначається з умови максимуму ентропії

$$S = -\sum_i P_i \cdot \ln P_i$$

При цьому повинні виконуватися умови нормування $\sum P_i = 1$, а внутрішня енергія $U = \sum E_i P_i$. В результаті приходимо до канонічного розподілу Гіббса

$$P_i = Z^{-1} \cdot \exp(-E_i T), \quad Z = \sum_i \exp(-E_i T) \quad (7)$$

- статистична сума.

Згідно з розподілом Гіббса зростання енергії мікростанів веде до експоненційного спадання ймовірності їх реалізації.

Для більшості реальних складних мереж кількість вершин і ребер є змінними величинами, тому для опису таких систем використовується великий канонічний ансамбль графів:

$$P_a = Z^{-1} \cdot e^{-(E_a - \mu M_a)/T}$$

P_a задає ймовірність того, що граф із змінним числом ребер (часток) містить M_a ребер і знаходиться в a -мікростані. Статистична сума задається виразом

$$Z = \sum_b e^{-(E_b - \mu M_b)/T}$$

сумування здійснюється за всіма мікростанами, тобто за всіма можливими реалізованими графами.

Великий канонічний ансамбль характеризується заданими значеннями температури T і хімічного потенціалу μ , а енергія E_a і кількість ребер (частинок) M_a можуть змінюватися.

Можливі різні означення енергії графів:

1. Оскільки будь-який граф об'єднує деяку множину вершин, то логічно присвоїти кожній з них певне значення енергії $E(k_i)$, тоді повна енергія графа визначається сумою за всіма вершинами:

$$E = \sum_{i=1}^N E(k_i)$$

2. Якщо присвоювати значення енергії не вершинам, а ребрам, то повна енергія графа визначається сумою за найближчими сусідами:

$$E = \sum_{i=1}^N E(k_i, k_j)$$

У найпростішому випадку, коли функція, яка задає кореляцію між вершинами $E(k_i, k_j) = \eta \cdot \delta_{k_i,1} \delta_{k_j,1}$, є сталою η , генерується граф, який зображено на рис. 5, де δ - символи вказують, що в даному випадку реалізується єдино можливе з'єднання вузлів k_i чи k_j з іншим вузлом.

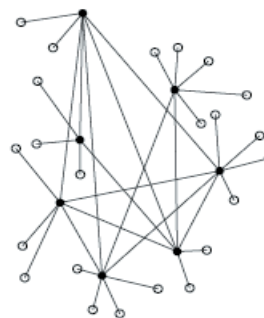


Рис. 5.

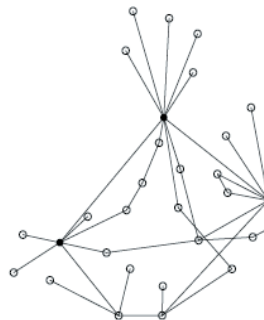


Рис. 6.

3. Енергія, яка визначається властивостями графа. Розмір мережі, який визначається кількістю вершин, що входять до її компонент, є глобальною статистичною характеристикою графа. Оскільки частинкам ставляться у відповідність ребра, то ця характеристика зводиться до кількості ребер s_i , які входять в i -ту компоненту. Енергія в цьому випадку $E = \sum_{i=1}^n E(s_i)$, де n - кількість компонент графа.

Завдання оптимізації графів зводиться до зменшення їх діаметра d . В цьому випадку треба використовувати енергію виду $E = -\sum_{ij} d_{ij}$, тут сумування здійснюється за всіма парами вершин, найменша кількість зв'язків між якими дорівнює d_{ij} . Побудований за цим виразом граф, зображений на рис.6.

Статистика неорієнтованих графів [9] із фіксованою кількістю вершин N , що не мають петель, підпорядковується великому канонічному ансамблю, поведінка якого визначається енергією

$$E = \mu M, \quad (8)$$

тут μ - хімічний потенціал, а M - кількість ребер графа. Використовуючи елементи матриці суміжності $A_{i,j} = 0; 1$ кількість ребер визначається виразом

$$M = \sum_{i < j}^N A_{ij}.$$

Враховуючи його у співвідношенні для енергії (8), статистичну суму знайдемо згідно з (7):

$$Z \equiv \sum_{\{A_{i,j}\}} \exp\left(-\frac{\mu \sum_{i < j} A_{ij}}{T}\right) = \prod_{i < j} \sum_{A_{ij}=0}^1 \exp\left(-\frac{\mu A_{ij}}{T}\right) = (1 + e^{-\mu/T})^N$$

де степінь $N = C_N^2 \equiv \frac{N!}{2!(N-2)!}$ визначає кількість пар вершин. У результаті середню кількість ребер знаходимо за формулою середньостатистичного значення за великим канонічним розподілом:

$$\langle M \rangle \equiv \frac{1}{Z} \sum_M M \exp\left(-\frac{\mu M}{T}\right) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial (\mu/T)} = \frac{\partial (F/T)}{\partial (\mu/T)} = \frac{N}{e^{\mu/T} + 1}. \quad (9)$$

Відповідно до останньої формули, середня кількість ребер $\langle M \rangle$ випадкового графа дорівнює їх загальній кількості N , помноженій на ймовірність реалізації одного зв'язку

$$m \equiv \frac{1}{e^{\mu/T} + 1}. \quad (10)$$

Повна ймовірність реалізації графа із використанням (10) набуває вигляду біномного розподілу:

$$P \equiv \frac{\exp(-E/T)}{Z} = \frac{e^{-\mu M/T}}{(1 + e^{-\mu/T})^N} = m^M (1 - m)^{N-M}. \quad (11)$$

Як відомо з теорії ймовірностей, у межі безмежно малого значення $m = \langle M \rangle / N \ll 1$ даний розподіл набуває стандартної форми Пуассона:

$$P = e^{-\langle M \rangle} \frac{\langle M \rangle^M}{M!}. \quad (12)$$

Незважаючи на малу величину одиничної ймовірності m , у термодинамічній границі $N = N(N-1)/2 \rightarrow \infty$ середня кількість ребер $\langle M \rangle$ виявляється скінченною величиною, яка відіграє роль масштабу розподілу Пуассона. В границі, коли $\langle M \rangle \rightarrow \infty$, розподіл за випадковими графами, що визначається кореляціями на довільних масштабах, стає самоподібним, безмасштабним і ймовірність реалізації графа (12) набуває степеневі форми:

$$P \sim \langle M \rangle^{-\gamma}. \quad (13)$$

Останній результат отриманий завдяки переходу від експоненційного розподілу до степеневому шляхом деформування експоненціальної функції [10]

$$\exp_q(x) \equiv \left[1 + (1-q)x\right]_+^{\frac{1}{1-q}},$$

де $[y]_+ \equiv \max(0, y)$.

Степеневі розподіли важливі тому, що вони описують самоподібні системи з відсутнім будь-яким масштабом зміни випадкової величини. Самоподібний розподіл ймовірностей $P(x)$ визначається рівністю

$$P\left(\frac{x}{a}\right) = a^\gamma P(x). \quad (14)$$

Використання масштабованої змінної $y \equiv \frac{x}{a}$ і функції $\pi(y) \equiv y^\gamma P(y)$ переводить умову самоподібності (14) в однорідний розподіл ймовірностей:

$$P(x) = x^{-\gamma} \pi(y), \quad (15)$$

який означає, що зменшення аргументу функції $\pi(y)$ в a разів приводить до факторизації ймовірності випадкової змінної x , піднесеної до степеня $-\gamma$.

В границі, коли $a \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0$, яка відповідає відсутності масштабування, $\pi(y) \rightarrow \text{const}$, а розподіл (15) набуває степеневі форми, що продемонстровано в (13) для розподілу ймовірностей випадкового графа.

Таким чином, виходячи із статистичних закономірностей, яким підпорядковані графи комп'ютерних локальних мереж, продемонстровано, що вони відносяться до систем без масштабування зміни характерних величин мережі, а зростання та переважне приєднання цих безмасштабних складних мереж відбувається за степеневим законом (13).

Висновки

Продемонстровано ріст кристалічного агрегату у вигляді графічної схеми і побудовані за кристалографічними законами моделі і графічні схеми розвитку структури локальних комп'ютерних мереж. Таке «кристалізаційне» моделювання дало можливість дослідити топологію і ріст мережевих систем, ввести глобальні характеристики мереж, визначити фактори впливу на динаміку їх росту та розвитку, застосувати статистичний підхід для кількісного опису еволюції змодельованої комп'ютерної мережі, яка являється статистичною моделлю зростання та переважного приєднання безмасштабних складних мереж, та визначити степеневий закон її розвитку.

Література

1. Пасічник В.В., Іванушак Н.М. Дослідження та моделювання складних мереж // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2010. – 2/3 (44), с. 43-48.
2. Головач Ю., Олемскої О., К. фон Фербер, Головач Т., Мриглюд О., Олемскої І., Пальчиков В. Складні мережі. // Журнал фізичних досліджень. – 2006. – т.10, №4, с. 247-289.
3. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective dynamics of “small-world” networks. // Nature. - 1998. - Vol. 393. pp. 440-442.
4. Erdos P., Renyi A. Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 5, 17(1960).
5. Watts D.J., Strogatz S.H. Nature (London) 393, 440 (1998).
6. Barabasi A.-L., Albert R. Science 286,509 (1999).
7. Barabasi A.-L., Albert R., Jeong H. Physica A 281, 69 (2000).
8. Palla G., Derenyi I., Farkas I., Vicsek T. Phys. Rev. E, 69, 046117 (2004).
9. Park J., Newman M. E. J. Phys. Rev. E., 70, 066117 (2004).
10. Gell-Mann M., Tsallis C. Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications (Oxford University Press, Oxford, 2004).