

УДК 519.2

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ВНЕШНИЕ КРИТЕРИИ

В работе проведено численное исследование двух методов прогнозирования нестационарных случайных процессов, использующих внешние критерии. Результаты исследования методов, а также сравнение их с популярным методом cross-validation показало целесообразность использования именно предлагаемых методов. Предложен метод повышения точности прогнозов в практических задачах

И. В. Кононенко

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой*

Контактный тел.: (057) 707-67-35

e-mail: kiv@kpi.kharkov.ua

А. Н. Репин

Ассистент*

Контактный тел.: (057) 707-68-24

e-mail: anton.repin@mail.ru

*Кафедра Стратегического управления
Национальный технический университет «Харьковский
политехнический институт»

1. Введение

При прогнозировании развития социально-экономических систем часто возникают задачи прогнозирования нестационарных случайных процессов по малому числу наблюдений (5-30), при этом повторные реализации процессов невозможны.

Для решения подобных задач предложен ряд методов, в которых неизвестные параметры модели оцениваются не на всех точках временного ряда, а на некотором подмножестве точек, называемом обучающей последовательностью. На оставшихся точках, не вошедших в обучающую последовательность и называемых проверочной последовательностью, определяется пригодность модели для описания временного ряда. К этим методам относят метод cross-validation [1] и Метод группового учета аргументов (МГУА) [2], предложенный А. Г. Ивахненко. Недостатком метода cross-validation является то, что для любых задач и исходных данных задается одинаковое множество разбиений данных. В МГУА, как правило, рассматривается одно разбиение данных.

В работах [3,4] предложен метод прогнозирования нестационарных случайных процессов, использующий H-критерий.

Суть данного метода заключается в следующем. Матрица исходных данных разбивается на обучающие и проверочные подматрицы g различными способами. Параметры пробных моделей оцениваются в соответствии с выбранными функциями потерь на обучающих подматрицах.

На проверочных подматрицах вычисляются отклонения моделей от прогнозируемой переменной в соответствии с выбранной функцией потерь. В качестве лучшей модели выбирается та, для которой сумма функций потерь на проверочных подматрицах минимальна.

Другой метод, представляющий интерес с точки зрения сравнения эффективности, был предложен в работе [5].

Главным его отличием является то, что выбор структуры модели производится с помощью внешнего критерия на последней точке исходной выборки и выборок, полученных с помощью бутстреп-метода.

2. Цель работы

Целью работы является сравнительное исследование точности методов прогнозирования нестационарных случайных процессов, использующих внешние критерии, в условиях малого числа наблюдений на периоде основания прогноза и выработка рекомендаций по их применению.

3. Исследование методов прогнозирования

Авторами проведено численное исследование двух методов прогнозирования нестационарных случайных процессов – метода, использующего Н-критерий, и метода, использующего бутстреп-оценивание. Первые результаты данной работы были представлены на 28-м Международном симпозиуме по прогнозированию, проходившем в июне 2008 г. в Ницце (Франция) [6].

Для исследования были выбраны следующие математические модели:

$$y = x^2 + 2x + 3, \quad y = -x^2 + 6x + 3, \quad y = 2x^2 + 8x + 3,$$

$$y = -x^2 + 16x + 3, \quad y = x^2 + 6x + 11, \quad y = -x^2 - 2x + 11,$$

$y = 2x^2 - 16x + 27, \quad y = -2x^2 - 8x + 27$, которые в дальнейшем называются истинными. На каждую из этих моделей, заданную в точках $x_i = 0,1 \cdot i, \quad i = \overline{1,10}$ накладывали аддитивный шум $\xi \sim N(0, \sigma^2)$, где

$$\sigma = 0.3 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (y_i - \sum_{i=1}^{10} y_i / 10) / 9},$$

где y_i – значение модели в точке $x_i, \quad i = \overline{1,10}$, и с помощью метода определяли лучшую прогнозирующую модель. Функция потерь выбиралась вида $F(\xi) = (\xi)^2$, как наиболее часто используемая на практике.

При исследовании мы рассматривали все сочетания по одной, две, три функции из списка $x^{1/2}, x, x^{3/2}, x^2, x^{5/2}, x^3, x^{-1}, x^{-1/2}, x^{-3/2}$ в виде линейных комбинаций. Исследовали свойства метода при прогнозировании на d точек, $d = 1, 2, 3, 5, 10$. Для каждой из полученных прогнозирующих моделей, вычисляли следующие характеристики:

- относительную ошибку на предыстории

$$\theta = \sum_{i=1}^{10} |z_i - \hat{y}_i| / \sum_{i=1}^{10} |z_i|;$$

где $z_i = y_i + \xi_i, \quad \hat{y}_i$ – значение полученной прогнозирующей модели в точке $i, \quad i = \overline{1,10}$;

- ошибку относительно истинной модели на предыстории

$$E = \sum_{i=1}^{10} |y_i - \hat{y}_i| / \sum_{i=1}^{10} |y_i|;$$

- ошибку относительно истинной модели на периоде упреждения прогноза

$$E1_d = \sum_{i=1}^{10+d} |y_i - \hat{y}_i| / \sum_{i=1}^d |y_i|;$$

- оценку математического ожидания квадрата ошибки на периоде упреждения прогноза

$$D_d^m = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{10+d} (z_i - \hat{y}_i)^2;$$

- оценку математического ожидания квадрата ошибки относительно истинной модели на периоде упреждения прогноза

$$D_d^t = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{10+d} (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Исследование проведено на $N = 1000$ реализациях шума.

Для метода, использующего Н-критерий, разбиение данных на обучающую и проверочную подматрицы осуществлялось в соответствии с правилами, заданными матрицами.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 12121212 \\ 12121212 \\ 12121212 \\ 12121221 \\ 12211221 \\ 21211221 \\ 21212121 \\ 21212121 \\ 21212121 \\ 21212121 \\ 21212121 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 21212121 \\ 21212121 \\ 21212121 \\ 12212121 \\ 12211221 \\ 12211212 \\ 12121212 \\ 12121212 \\ 12121212 \\ 12121212 \\ 12121212 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 111111112 \\ 111111121 \\ 111111211 \\ 111112111 \\ 111121111 \\ 111121111 \\ 111211111 \\ 111211111 \\ 112111111 \\ 121111111 \\ 211111111 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \begin{bmatrix} 2121211212 \\ 2112221122 \\ 1111112111 \\ 1222121112 \\ 2121222111 \\ 2121221212 \\ 1211111121 \\ 2121221121 \\ 1112121111 \\ 1221112112 \end{bmatrix},$$

Каждый j -й столбец матриц $R_d, d = \overline{1,4}$ соответствует j -му способу разбиения данных, $j = \overline{1,8}$ для R_1, R_2 и $j = \overline{1,10}$ для R_3, R_4 . Каждый $r_{ij}^{(d)}$ -й элемент матриц $R_d, j = \overline{1,10}$ определяет, в какую подматрицу – обучающую ($\Gamma_{об}$) или проверочную ($\Gamma_{пр}$) – попадает i -я точка предыстории. При этом $r_{ij}^{(d)} = 1$ означает использование точки в подматрице $\Gamma_{об}, r_{ij}^{(d)} = 2$ означает использование точки в подматрице $\Gamma_{пр}$.

Матрица R_3 соответствует процедуре cross-validation [1], с которой производилось сравнение.

Матрица R_4 – случайно сгенерированная матрица. Для метода, использующего бутстреп-оценивание, число бутстреп-итераций выбиралось от 10 до 50.

Вычисляли:

- среднюю относительную ошибку на предыстории

$$\bar{\theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \theta_k;$$

- среднюю ошибку относительно истинной модели на предыстории

$$\bar{E} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E_k ;$$

- среднюю ошибку относительно истинной модели на периоде упреждения прогноза

$$\bar{E}1_d = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E1_{dk} ;$$

- среднюю оценку математического ожидания квадрата ошибки на периоде упреждения прогноза

$$\bar{D}_d^m = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D_{dk}^m ;$$

- среднюю оценку математического ожидания квадрата ошибки относительно истинной модели на периоде упреждения прогноза

$$\bar{D}_d^t = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D_{dk}^t ,$$

где θ_k , E_k , $E1_{dk}$, D_{dk}^m и D_{dk}^t – значения ошибок при k -ой реализации шума, $k = 1, N$. Оценены 95%-е доверительные интервалы для $\bar{\theta}$, \bar{E} , $\bar{E}1_d$, \bar{D}_d^m и \bar{D}_d^t .

Произведено сравнение эффективности предложенных методов и метода cross-validation. Путем применения алгоритма исследования и исходных данных таких же, как и при исследовании предложенных методов, было проведено исследование и получены значения характеристик $\bar{\theta}$, \bar{E} , $\bar{E}1_d$, \bar{D}_d^m , \bar{D}_d^t для метода cross-validation, а также построены 95%-ые доверительные интервалы для этих характеристик.

Сравнение характеристик произведено с помощью критерия сравнения средних значений в двух нормальных совокупностях, который применительно к рассматриваемой задаче имеет следующий вид

$$P\{|v| \geq V(N,Q)\} \approx 2 \cdot Q ,$$

где $V(N,Q)$ – величина, определяемая по таблице, соответствующей уровню значимости Q , v – величина, рассчитываемая по следующей формуле

$$v = \eta \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{N}} ,$$

где $\eta = \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2$, $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ – сравниваемые характеристики, s_1 и s_2 – оценки среднеквадратических отклонений $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ соответственно, $N = 1000$.

Уровень значимости Q принят равным 2,5 %. Для $Q = 2,5$ и $N = 1000$ $V(N,Q) = 1,96$.

Проанализированы значения величины v , вычисленные для пар сравниваемых характеристик (для метода, использующего N -критерий, выбраны матрицы R_1, R_3, R_4).

4. Результаты исследования методов прогнозирования

Значения всех характеристик предложенных методов прогнозирования оказались значимо меньше (с доверительной вероятностью 95 %) на периоде упреждения прогноза, чем значения характеристик метода cross-validation для всех рассматриваемых истинных моделей и интервалов упреждения прогноза.

На рисунке 1 показан график средней ошибки относительно истинной модели на периоде упреждения прогноза $\bar{E}1_d$ для математической модели $y = x^2 + 2x + 3$ в зависимости от числа разбиений g . В данном случае $d = 10$, т.е. прогнозирование осуществляется на 10 точек.

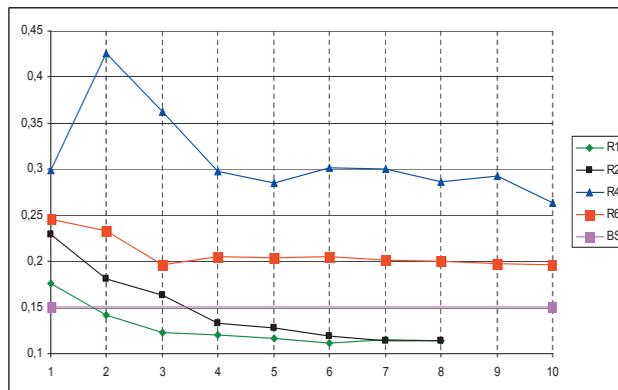


Рисунок 1. Средняя ошибка относительно истинной модели на периоде упреждения прогноза

На рисунке показаны графики средней ошибки относительно истинной модели на периоде упреждения прогноза при использовании матриц R_1 и R_2 , случайной матрицы R_6 , процедуры cross-validation (R_4), а также при использовании бутстреп-метода (BS). Так как бутстреп-метод не зависит от числа разбиений, то на данном графике он представлен константой со значением 0,151.

Анализируя результаты исследования, можно сделать ряд выводов:

- при увеличении числа разбиений в случае использования матриц R_1 и R_2 наблюдается тенденция к уменьшению $\bar{E}1_d$ с некоторыми колебаниями относительно этой тенденции, зависящими от способов разбиения данных;
- применение разбиений в соответствии с процедурой cross-validation, в которой проверочные точки оказываются внутри интервала наблюдения, дает существенно менее точные прогнозы. Сравнение эффективности различных разбиений с матрицей R_4 , сгенерированной по случайному закону, показало, что разумный выбор последовательностей разбиений позволяет получить более точный долгосрочный прогноз;
- метод, использующий бутстреп-оценивание, суть которого не предусматривает формирования обучающих и проверочных подматриц, дает более точный прогноз, чем процедура cross-validation;
- сравнение двух предложенных методов позволяет говорить, что метод, использующий бутстреп-оценивание, позволяет получать более точные долгосрочные прогнозы по сравнению с методом, использующим N -критерий, лишь при небольшом количестве разбиений. В противном случае, использование выбранных матриц R_1 и R_2 позволяет получить более точные прогнозы. Тем не менее, метод, использующий бутстреп-оценивание, оказался более точным, чем метод, использующий N -критерий, при использовании матрицы R_4 .

Похожие графики можно наблюдать и для остальных семи математических моделей, применяемых при исследовании.

Было определено число бутстреп-итераций, целесообразное для использования в соответствующем методе. В случае с анализируемыми моделями, число бутстреп-итераций, позволяющее уменьшить среднюю ошибку относительно истинной модели на периоде упреждения прогноза, составляло 40. Изменяя число бутстреп-итераций от 10 до 40 значение средней ошибки снижалось, достигнув минимума при 40, а в дальнейшем стало увеличиваться, когда число итераций достигло 50.

5. Совместное использование предлагаемых методов прогнозирования

При решении различных задач прогнозирования важно определить целесообразность использования того или иного метода. Результаты исследования показали, что метод, использующий H -критерий, при большом числе разбиений дает более точные долгосрочные прогнозы по сравнению с методом, использующим бутстреп-оценивание. Однако в реальных задачах, метод, использующий бутстреп-оценивание, в ряде случаев может оказаться более точным.

Так, из рисунка 1 видно, что при численном исследовании бутстреп-метод дал более точные прогнозы, чем метод, использующий H -критерий, при числе разбиений равно 1 для любых примененных матриц разбиения. Также бутстреп-метод оказался более точным, чем метод, использующий H -критерий, при применении случайной матрицы (R_6).

Для получения более точных прогнозов в различных практических ситуациях рекомендуется использовать следующий метод прогнозирования. Разрабатываются прогнозы с помощью обоих методов раздельно. Затем каждому результату, полученному с помощью метода, использующего H -критерий и метода, использующего бутстреп-оценивание, необходимо придать вес, исходя из априорных оценок точности методов. Итоговый прогноз формируется в виде сред-

невзвешенного значения отдельных прогнозов, полученных разными методами.

6. Выводы

В результате численного исследования может быть сделан вывод, что предложенные методы прогнозирования значимо точнее на периоде упреждения прогноза, чем метод cross-validation. Такой вывод позволяет рекомендовать их для прогнозирования нестационарных случайных процессов при малом количестве точек в периоде основания прогноза.

Выявлена зависимость между точностью прогноза и числом используемых бутстреп-итераций в соответствующем методе, а также выявлен диапазон итераций, превышение которого оказывает негативное влияние на точность прогноза.

Предложен метод прогнозирования, основанный на совместном использовании результатов исследованных методов для увеличения точности прогнозов.

Литература

1. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. Кн. 2. – М.: Финансы и статистика. 1987. – 351 с.
2. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. – К.: Техника, 1975. – 312 с.
3. Кононенко И.В. Алгоритм помехоустойчивого выбора структуры прогнозирующих моделей // Автоматика. – 1986. – № 1. – С. 23–26.
4. Кононенко И.В. Компьютеризация управления развитием производственно-экономических систем. Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 239 с.
5. Кононенко И.В. Исследование алгоритма выбора структуры прогнозирующих моделей, основанного на использовании H -критерия // Автоматика. – 1990. – № 6. – С. 28–34.
6. Igor Kononenko, Anton Ryepin. Forecasting methods of non-stationary stochastic processes that use external criteria // The 28th International Symposium on Forecasting (ISF 2008). Nice. France. 22-25 June 2008. p. 30.