

Литература

1. Делимарский Ю.К. Химия ионных расплавов / Делимарский Ю.К. – К. : Наукова думка, 1980. – 328 с.
2. Массоперенос при электролизе ионных расплавов / С.А. Воденников, В.А. Скачков, В.И. Иванов [и др.] // Теория и практика металлургии. – 2007. – № 2–3 (57–58). – С. 135–138.
3. О влиянии распределения ионов в объёме расплава электролита на структуру и свойства покрытий пористых материалов / С.А. Воденников, Г.И. Слынько, В.А. Скачков [и др.] // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. - 2008. - № 1. - С. 128-131.

УДК 519.63

ЯВНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА НА НЕСТРУКТУ- РИРОВАННЫХ СЕТКАХ

А. В. Русанов

Доктор технических наук, заведующий отделом
Отдел гидроаэромеханики энергетических машин
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного
НАН Украины
ул. Дм. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046
Контактный тел.: (057) 752-33-88
E-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua

Д. Ю. Косьянов

Аспирант
Национальный технический университет «Харьковский
политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 6100
Контактный тел.: (0572) 95-95-21
E-mail: kosyanovdima@rambler.ru

Запропоновано спосіб побудови реконструкції високого порядку точності на неструктурованих сітках. Створено явну різницеву схему для чисельного інтегрування диференціальних рівнянь у часткових похідних гіперболічного типу. Виконано апробацію для ряду модельних задач

Ключові слова: неструктурована сітка, метод контрольного об'єму, реконструкція, явна схема

Предложен способ построения реконструкции высокого порядка точности на неструктурированных сетках. Создана явная разностная схема для численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Выполнена апробация для ряда модельных задач

Ключевые слова: неструктурированная сетка, метод контрольного объёма, реконструкция, явная схема

A high-order reconstruction method on unstructured grids is presented. The explicit finite volume scheme for hyperbolic conservation laws is constructed. The numerical approximation is executed for several model tasks

Key words: unstructured grid, finite volume method, reconstruction, explicit scheme

1. Введение

При моделировании различных физических процессов с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) гиперболического типа в областях сложной геометрической формы наиболее удобно выполнять отображение физической области на расчётную с помощью неструктурированной сетки. Такие сет-

ки допускают автоматизацию процесса построения и адаптации к решению (например, области больших градиентов и разрывных решений) [1, 2].

В большей части используемых вычислительных методов для неструктурированных сеток применяется линейная реконструкция, что обеспечивает порядок точности не выше второго [3, 4]. Однако, как показывает опыт, повышение порядка точности разностных схем может увеличить общую эффектив-

ность вычислительного процесса, в том числе и для неструктурированных сеток [5]. Кроме того, схемы низкого порядка аппроксимации требуют существенного измельчения сетки в областях нестационарных процессов (вихревых течений), но при этом все же не обеспечивают необходимой точности решений. Таким образом, повышение порядка точности является актуальной задачей [6].

Основные принципы построения вычислительных методов для неструктурированных сеток изложены в работах А. Harten & S. R. Chakravarthy [7], T.J. Barth & P.O. Fredrickson [3], С. Ollivier-Gooch [8], С.-W. Shu [5, 6], Z.J. Wang [9, 10] и других. Наиболее популярными являются схемы, опирающиеся на метод контрольного объёма, т.к. его применение обеспечивает локальное выполнение свойства консервативности для каждой ячейки.

В статье предложен подход к построению реконструкции произвольного порядка точности на неструктурированной сетке, на основе которого с применением метода контрольного объёма построена явная разностная схема высокого порядка аппроксимации по пространству. Выполнена численная оценка порядка аппроксимации реконструкции и порядка сходимости разностной схемы для ряда модельных задач.

2. Численный метод интегрирования модельных уравнений газогидродинамики

Рассматривается численное решение двумерных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа (модельные уравнения газовой динамики):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = h(u), (x,y) \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

где x, y, t – декартовы координаты на плоскости и время; $u = u(x, y, t)$ – искомое решение уравнения (1); $f = f(u), g = g(u)$ – потоковые функции; $h = h(u)$ – правая часть уравнения; Ω – расчётная область с кусочно-линейной границей.

Уравнение (1) решается с применением метода контрольного объёма для неструктурированной сетки, при котором расчётная область Ω отображается на сетку $T = \{P\}_{P \in T}$, состоящую из ограниченного числа произвольно расположенных (неупорядоченных между собой) многоугольников (ячеек) P (треугольников, выпуклых четырёхугольников и т.д.). Рассматривается случай согласованной дискретизации, при котором пересечение двух различных ячеек либо отсутствует, либо является отрезком или точкой.

Дискретизация по времени. На временной оси задаётся сетка узлов вида $t_n = \tau \cdot n, \tau > 0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, τ – шаг временной сетки. Линеаризация потоков выполнена следующим образом:

$$s = \beta \cdot s^{n+1} + (1 - \beta) \cdot s^n = s^n + \beta \cdot M^n \delta u^n, t \in [t_n, t_{n+1}], \beta \in [0, 1],$$

$$\text{где } s = [f, g], M = [A, B] \equiv \left[\frac{\partial f(u)}{\partial u}, \frac{\partial g(u)}{\partial u} \right], \delta u^n = u^{n+1} - u^n.$$

Введенные сокращения означают, что линеаризация для потока f получается в случае $s = f$ и $M = A$, а для потока g при $s = g$ и $M = B$. Верхним индексом обозна-

чается номер временного слоя. Для случая стационарного решения справедливо допущение $\delta u^n \approx \delta \bar{u}^n = \bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n$.

Аппроксимация производной по времени определяется выражением

$$\frac{d\bar{u}_p}{dt} \approx \frac{(1 + \gamma)\delta\bar{u}_p^n - \gamma\delta\bar{u}_p^{n-1}}{\tau}.$$

β, γ являются коэффициентами схемы.

Уравнение (2) после линеаризации потоков и замены производной по времени на соответствующее аппроксимирующее выражение примет вид

$$\frac{(1 + \gamma)\delta\bar{u}_p^n - \gamma\delta\bar{u}_p^{n-1}}{\tau} + \frac{\beta}{|P|} \oint_{\partial P} (A^n \cdot n_x + B^n \cdot n_y) \delta\bar{u}_p dl = \text{RSH}_P(\bar{u}^n), \quad (3)$$

$$\text{RSH}_P(\bar{u}^n) \equiv \bar{h}_p^n - \frac{1}{|P|} \oint_{\partial P} (f^n \cdot n_x + g^n \cdot n_y) dl. \quad (4)$$

Разностная аппроксимация исходных уравнений в форме (3) – (4) в общем случае соответствует неявной трёхслойной схеме. Правая часть $\text{RSH}_P(\bar{u}^n)$ определяет явный оператор, а левая – неявный. При $\gamma = 0$ схема является двухслойной по времени, а при $\beta = 0$ – явной схемой. Более подробное описание аппроксимации уравнения (3) и применение трёхслойной полностью неявной схемы с коэффициентами $\gamma = \frac{1}{2}$ и $\beta = 1$ описано в [11]. В статье будет рассмотрен случай явной двухслойной схемы первого порядка аппроксимации по времени, соответствующей $\gamma = 0$ и $\beta = 0$.

Дискретизация по пространству. Граница ячейки $P \in T$ задаётся набором из n_p рёбер, т.е. $\partial P = \bigcup_{i=1}^{n_p} \Gamma_i$. Интеграл в (4) по свойству аддитивности принимает вид

$$\oint_{\partial P} (f^n \cdot n_x + g^n \cdot n_y) dl = \sum_{i=1}^{n_p} \int_{\Gamma_i} (f^n \cdot n_x + g^n \cdot n_y) dl.$$

Параметризация ребра Γ_i задаётся линейной функцией

$$r(\Gamma_i, s) = \frac{r_{\Gamma_i}^{(1)} + r_{\Gamma_i}^{(2)}}{2} + s \cdot \frac{r_{\Gamma_i}^{(2)} - r_{\Gamma_i}^{(1)}}{2}, r = [x, y], s \in [-1, 1],$$

где $r_{\Gamma_i}^{(1)}, r_{\Gamma_i}^{(2)}$ – координаты вершин ребра в порядке, согласованном с ориентацией ребра к внешней нормали. При этом $|\Gamma_i| = \sqrt{(x_{\Gamma_i}^{(2)} - x_{\Gamma_i}^{(1)})^2 + (y_{\Gamma_i}^{(2)} - y_{\Gamma_i}^{(1)})^2}$ – длина ребра Γ_i ; $n_{x,i} = \frac{y_{\Gamma_i}^{(2)} - y_{\Gamma_i}^{(1)}}{|\Gamma_i|}$, $n_{y,i} = -\frac{(x_{\Gamma_i}^{(2)} - x_{\Gamma_i}^{(1)})}{|\Gamma_i|}$ – компоненты вектора внешней единичной нормали. После применения параметризации интеграл в (4) определяется как

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial P} (f^n \cdot n_x + g^n \cdot n_y) dl = \\ & = \sum_{i=1}^{n_p} \frac{|\Gamma_i|}{2} \int_{-1}^1 (f(u(x(\Gamma_i, s), y(\Gamma_i, s), t_n)) \cdot n_{x,i} + \\ & \quad + g(u(x(\Gamma_i, s), y(\Gamma_i, s), t_n)) \cdot n_{y,i}) ds. \end{aligned}$$

Приближённое вычисление искомых интегралов с необходимым порядком точности обеспечивает трёхточечная квадратурная формула Гаусса [4]

$$\int_{-1}^1 q(u(x(\Gamma_i, s), y(\Gamma_i, s), t_n)) ds \approx \sum_{j=1}^3 \omega_j q(u(x(\Gamma_i, s_j), y(\Gamma_i, s_j), t_n)), q = [f, g],$$

$$\omega_1 = \frac{8}{9}, \omega_2 = \frac{5}{9}, \omega_3 = \frac{5}{9}, s_1 = 0, s_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}, s_3 = -\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Тогда явный оператор (4) примет вид

$$RSH_p(\bar{u}^n) \equiv \bar{h}_p^n - \frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^3 \frac{\omega_j |\Gamma_i|}{2} (f(u_i^n) \cdot n_{x,i} + g(u_j^n) \cdot n_{y,i}), \quad (5)$$

где $u_j^n = u(x(\Gamma_i, s_j), y(\Gamma_i, s_j), t_n)$ – значение неизвестной функции в точках интегрирования на грани ячейки. Для определения этого значения необходимо построить реконструкцию нужного порядка точности по заданным осредненным величинам $\{\bar{u}_p\}_{p \in T}$. Исходными данными для определения u_j^n являются два интерполированных в точку $(x(\Gamma_i, s_j), y(\Gamma_i, s_j))$ значения: u_{jL}^n из P и u_{jR}^n из P_i (рис. 1). Здесь P_i – смежная по i -му ребру ячейка. Величина u_j^n находится из условия обеспечения «разностей против потока»:

$$u_j^n = \begin{cases} u_{jL}^n, & \text{при } (n_{x,i}A + n_{y,i}B)_{u=(u_{jL}^n + u_{jR}^n)/2} \geq 0, \\ u_{jR}^n, & \text{при } (n_{x,i}A + n_{y,i}B)_{u=(u_{jL}^n + u_{jR}^n)/2} < 0. \end{cases}$$

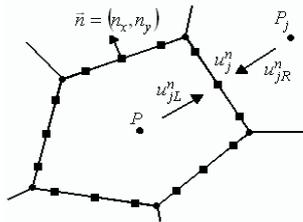


Рис. 1. Схема определения значений функции в точках интегрирования

3. Реконструкция

Для создания схем высокого порядка аппроксимации по пространству необходимо построить реконструкцию переменных внутри ячейки [3, 4, 8]. В работах Harten & Chakravarthy [7] и Carl Ollivier-Gooch [8] определены следующие основные свойства, которым должна удовлетворять полиномиальная реконструкция:

- реконструкция является гладкой функцией внутри каждой ячейки и разрывной на границах со смежными ячейками;
- везде, где исходная функция $u(x, y)$ является гладкой, реконструкция $R(x, y)$ удовлетворяет «свойству аппроксимации»

$$R(x, y) = u(x, y) + d^k,$$

где k – порядок аппроксимации реконструкции, d – линейный размер ячейки;

- при использовании осредненных по ячейке значений как исходных данных, реконструкция должна удовлетворять свойству консервативности

$$\bar{R}_p = \bar{u}_p, P \in T;$$

- реконструкция строится по однотипному шаблону;

• реконструкция удовлетворяет принципу ENO (существенного не осциллирования), т.е. не способствует появлению существенных осцилляций вблизи разрывов и локальных экстремумов исходной функции.

По аналогии с [3, 7, 8], в работе применена кусочно-полиномиальная реконструкция, заданная многочленом Тейлора степени $(k-1)$, записанным относительно центра ячейки, где k – порядок точности схемы. Для случая 4-го порядка аппроксимации вид реконструкции следующий:

$$R(x, y) = \bar{u}_p + \bar{x}_p (\hat{u}_x)_p + \bar{y}_p (\hat{u}_y)_p + \left[\frac{\bar{x}_p^2 - I_{xx}}{2} \right] (\hat{u}_{xx})_p + [\bar{x}_p \bar{y}_p - I_{xy}] (\hat{u}_{xy})_p + \left[\frac{\bar{y}_p^2 - I_{yy}}{2} \right] (\hat{u}_{yy})_p + \left[\frac{\bar{x}_p^3 - I_{xxx}}{6} \right] (\hat{u}_{xxx})_p + \left[\frac{\bar{x}_p^2 \bar{y}_p - I_{xxy}}{2} \right] (\hat{u}_{xxy})_p + \left[\frac{\bar{x}_p \bar{y}_p^2 - I_{xyy}}{2} \right] (\hat{u}_{xyy})_p + \left[\frac{\bar{y}_p^3 - I_{yyy}}{6} \right] (\hat{u}_{yyy})_p,$$

$$I_{\frac{xxxxxyy}{n \quad m}} = \frac{1}{|P|} \oint_{\partial P} \frac{\bar{x}_p^{n+1} \bar{y}_p^m}{n+1} dy, \quad \bar{x}_p = x - x_p, \bar{y}_p = y - y_p,$$

где x_p, y_p – координаты центроида ячейки $P \in T$, \hat{u}_ψ – значения аппроксимированных производных, $\psi = [x, y, xx, xy, yy, \dots]$

Для удовлетворения «свойства аппроксимации» $R(x, y) = u(x, y) + d^k$ необходимо выполнение следующих условий:

$$(\hat{u}_\psi)_p = (u_\psi)_p + O(d), \psi = [xxx, xxy, xyy, yyy],$$

$$(\hat{u}_\psi)_p = (u_\psi)_p + O(d^2), \psi = [xx, xy, yy],$$

$$(\hat{u}_\psi)_p = (u_\psi)_p + O(d^3), \psi = [x, y].$$

Таким образом, для построения реконструкции нужно определить неизвестные производные с заданным порядком аппроксимации. Как известно [5, 12], по трём точкам на плоскости, образующим треугольник, можно построить линейную реконструкцию, которая позволяет найти значения u_x и u_y с первым порядком точности по пространству. Для текущего контрольного объёма P рассмотрим n_p его соседей: P_1, \dots, P_{n_p} . По тройке ячеек P, P_i, P_j , центры которых образуют треугольник, с помощью первых разностей определяются значения первых производных с первым порядком точности:

$$\delta_x u_{P,i,j} = \frac{\bar{y}_{P_j} u_{P_i} - \bar{y}_{P_i} u_{P_j}}{\Delta_{P_{ij}}}, \delta_y u_{P,i,j} = \frac{\bar{x}_{P_i} u_{P_j} - \bar{x}_{P_j} u_{P_i}}{\Delta_{P_{ij}}}, \quad (6)$$

$$\Delta_{P_{ij}} = \bar{x}_{P_i} \bar{y}_{P_j} - \bar{x}_{P_j} \bar{y}_{P_i}, u_{P_s} = u_{P_s} - u_p, s = [i, j].$$

Общее число таких троек m_p для ячейки P зависит от её формы и расположения смежных ячеек. По аналогии с работами [5, 8] для каждой используемой тройки определяются неотрицательные весовые коэффициенты $\omega_{P,i,j}^{(z)} \geq 0, z = [x, y]$, удовлетворяющие свойству нормировки $\sum_{k=1}^{m_p} \omega_{P,i(k),j(k)}^{(z)} = 1$.

4. Численные результаты

Численное тестирование предложенного подхода выполнялось для гладких функций. Оценивались порядки аппроксимации реконструкции и сходимости решений.

Оценка порядка аппроксимации реконструкции.

Рассмотрены реконструкции двух функций:

- $f_1(x,y) = x^3 + 5x^2y + xy^2 - 3y^3 + 3x + y + 1$;
- $f_2(x,y) = \sin(2\pi(x+y))\sin(2\pi(x-y))$,

в расчётной области $\Omega = \{(x,y) : x \in [0,1], y \in [0,1]\}$. Для дискретизации выбраны три типа разностной сетки: структурированная Ω_1 (рис. 2, а), регулярная неструктурированная Ω_2 (рис. 2, б) и нерегулярная неструктурированная Ω_3 (рис. 2, в). Оценка порядка аппроксимации реконструкции выполнялась в следующей последовательности:

- по заданной аналитической функции вычисляются точные значения в центрах масс ячеек или осреднённые значения функции для сеток разных размерностей;
- по полученным точным значениям строится реконструкция в каждой ячейке;
- вычисляются отклонения значений реконструкции от точных значений в пробных точках (рис. 2, г);
- вычисляются сеточные нормы L_1, L_2, C_{max} и оценивается численный порядок аппроксимации.

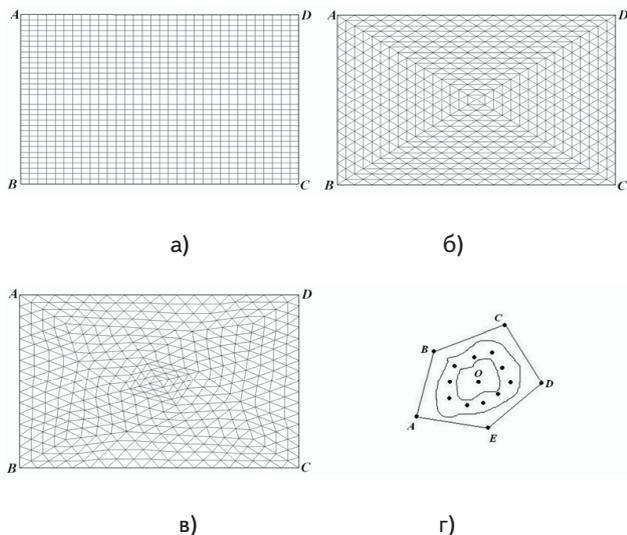


Рис. 2. Разностные сетки и схематическое расположение пробных точек: а) Ω_1 ; б) Ω_2 ; в) Ω_3 ; г) пробные точки (в выделенной области)

Проверка выполнена для трёх уровней (размерностей) сетки. При увеличении номера уровня сетки число ячеек увеличивается в 4 раза, а диаметр – уменьшается в 2 раза. Параметры сеток для первого уровня приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры сеток первого уровня

Тип сетки	Число ячеек	Диаметр сетки
Ω_1	1024	3,125e-02
Ω_2	1024	6,250e-02
Ω_3	768	6,386e-02

Для рассматриваемых функций построены реконструкции 3-го и 4-го порядков аппроксимации по пространству, использующие осреднённые значения по ячейке. На границе расчётной области задано точное значение функции.

Порядок аппроксимации реконструкции при переходе с уровня на уровень (уменьшении диаметра сетки) оценивался по трём стандартным сеточным нормам L_1, L_2 и C_{max}

$$k_i^{i+1} = \frac{\ln\left(\frac{N_i}{N_{i+1}}\right)}{\ln(2)},$$

где N_i – значение сеточной нормы на i -м уровне сетки. В табл. 2-5 представлены результаты численного исследования.

Таблица 2

Порядок аппроксимации для f_1 . Реконструкция 4-го порядка

Тип сетки	Тип нормы	Уровень сетки					
		1		2		3	
		Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка
Ω_1	L_1	3,58e-15	-	6,94e-15	-	1,43e-14	-
	L_2	5,82e-15	-	1,14e-14	-	2,36e-14	-
	C_{max}	3,73e-14	-	1,05e-13	-	2,31e-13	-
Ω_2	L_1	4,62e-14	-	6,72e-14	-	7,16e-14	-
	L_2	1,57e-13	-	1,72e-13	-	1,45e-13	-
	C_{max}	5,35e-12	-	1,12e-11	-	1,14e-11	-
Ω_3	L_1	2,90e-14	-	6,02e-14	-	1,19e-13	-
	L_2	5,03e-14	-	1,03e-13	-	1,96e-13	-
	C_{max}	6,18e-13	-	1,10e-12	-	3,84e-12	-

Таблица 3

Порядок аппроксимации для f_1 . Реконструкция 3-го порядка

Тип сетки	Тип нормы	Уровень сетки					
		1		2		3	
		Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка
Ω_1	L_1	1,37e-04	-	1,73e-05	2,98	2,18e-06	2,99
	L_2	1,56e-04	-	1,97e-05	2,99	2,47e-06	2,99
	C_{max}	2,94e-04	-	3,68e-05	3,00	4,60e-06	3,00
Ω_2	L_1	1,30e-04	-	1,63e-05	2,99	2,05e-06	2,99
	L_2	1,61e-04	-	2,02e-05	2,99	2,53e-06	2,99
	C_{max}	4,79e-04	-	5,99e-05	3,00	7,49e-06	3,00
Ω_3	L_1	1,62e-04	-	2,07e-05	2,97	2,61e-06	2,99
	L_2	1,99e-04	-	2,54e-05	2,98	3,20e-06	2,99
	C_{max}	6,56e-04	-	8,25e-05	2,99	1,03e-05	3,00

Таблица 4

Порядок аппроксимации для f_2 . Реконструкция 4-го порядка

Тип сетки	Тип нормы	Уровень сетки					
		1		2		3	
		Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка
Ω_1	L_1	1,35e-03	-	5,63e-05	4,58	2,64e-06	4,42
	L_2	1,73e-03	-	8,18e-05	4,40	3,94e-06	4,38
	C_{max}	5,46e-03	-	3,61e-04	3,92	2,29e-05	3,98
Ω_2	L_1	9,21e-04	-	4,81e-05	4,26	2,71e-06	4,15
	L_2	1,39e-03	-	7,44e-05	4,22	4,06e-06	4,20
	C_{max}	4,89e-03	-	3,24e-04	3,92	2,05e-05	3,98
Ω_3	L_1	1,10e-03	-	5,48e-05	4,33	2,80e-06	4,2
	L_2	1,52e-03	-	8,17e-05	4,22	4,10e-06	4,32
	C_{max}	7,19e-03	-	5,55e-04	3,70	3,83e-05	3,86

Таблица 5

Порядок аппроксимации для f_2 . Реконструкция 3-го порядка

Тип сетки	Тип нормы	Уровень сетки					
		1		2		3	
		Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка	Значение нормы	Значение порядка
Ω_1	L_1	4,07e-03	-	4,86e-04	3,07	6,02e-05	3,01
	L_2	4,84e-03	-	5,80e-04	3,06	7,23e-05	3,01
	C_{max}	1,03e-02	-	1,34e-03	2,94	1,73e-04	2,96
Ω_2	L_1	3,82e-03	-	4,98e-04	2,94	6,32e-05	2,98
	L_2	4,83e-03	-	6,32e-04	2,94	8,03e-05	2,98
	C_{max}	1,20e-02	-	1,65e-03	2,86	2,11e-04	2,96
Ω_3	L_1	4,32e-03	-	5,41e-04	3,00	6,77e-05	3,00
	L_2	5,47e-03	-	6,93e-04	2,98	8,74e-05	2,99
	C_{max}	1,73e-02	-	2,44e-03	2,82	3,12e-04	2,97

Из табл. 2 видно, что реконструкция 4-го порядка является точной для функции f_1 . В целом, порядок аппроксимации, полученный численно, хорошо согласуется с теоретическим и является однородным (существенно не зависит от типа сетки), а значение норм увеличивается с ростом степени нерегулярности сетки.

При проверке численного порядка аппроксимации для других граничных условий и порядков реконструкции численные результаты также хорошо согласуются с теоретическими.

Оценка порядка сходимости схемы. Тестирование схемы выполнялось на модельной двумерной (по пространству) задаче для линейного уравнения переноса $u_t + u_x + u_y = H, (x, y) \in \Omega$, где $u = u(t, x, y)$ – искомое решение задачи. Начальные условия определяются выражением $u(0, x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in \Omega$. На участках границы АВ и ВС расчётной области заданы граничные условия в виде значений точного решения задачи (см. рис. 2, а).

Рассмотрены два варианта задачи с H , для которых существует стационарное решение:

- *Test1.* $H(x, y) = 2\pi \sin(2\pi(x + y))$,
 $u(t, x, y) = \sin(2\pi \cdot x) \cdot \sin(2\pi \cdot y)$;
- *Test2.* $H(x, y) = 0, u(t, x, y) = \sin(2\pi(x - y))$.

Расчеты выполнены для пяти уровней сетки. Порядок сходимости численного решения к точному при переходе с уровня на уровень оценивался по сеточным нормам L_1, L_2 и C_{max}

$$k_i^{i+1} = \frac{\ln\left(\frac{N_i}{N_{i+1}}\right)}{\ln(2)}$$

Расчёты выполнены по явным схемам с числом Куранта $\nu = 0,25$. Итерации по времени проводились до получения стационарного решения. На рис. 3 и 4 приведены графики сходимости в логарифмической шкале для первого и второго тестовых расчётов соответственно. Расчёты с применением процедуры минимизации производных изображены пунктирной линией, а без неё – сплошной.

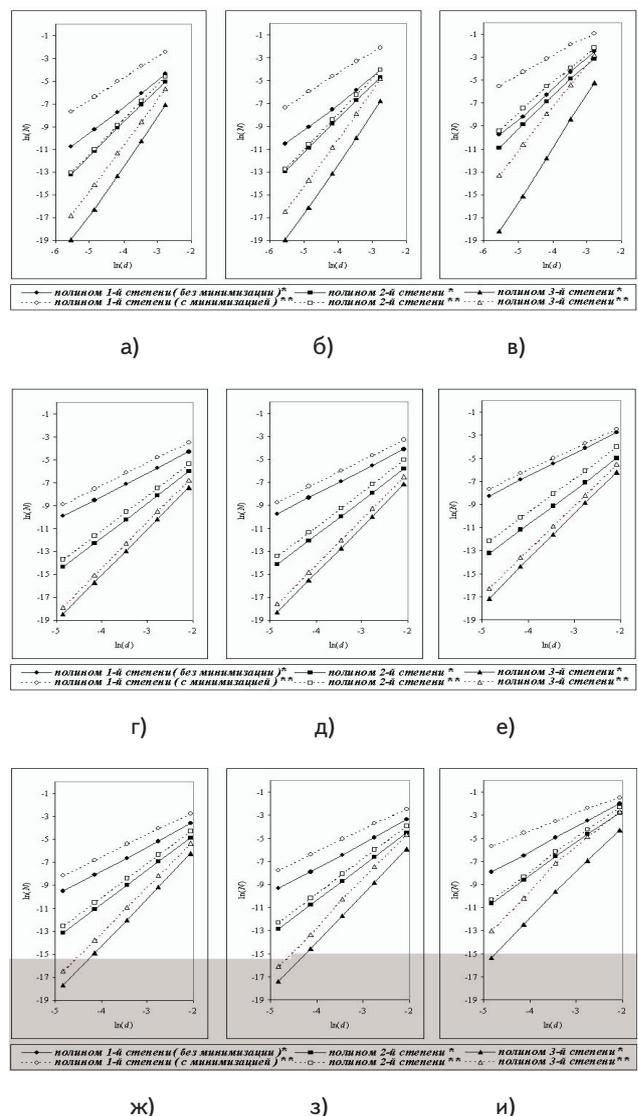
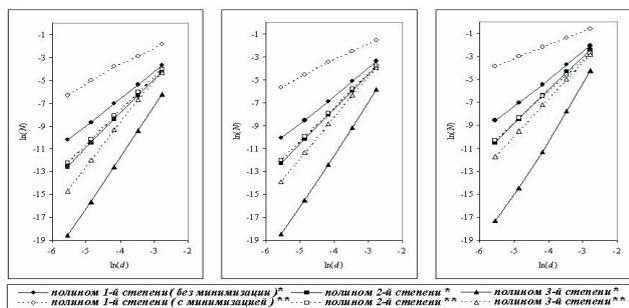
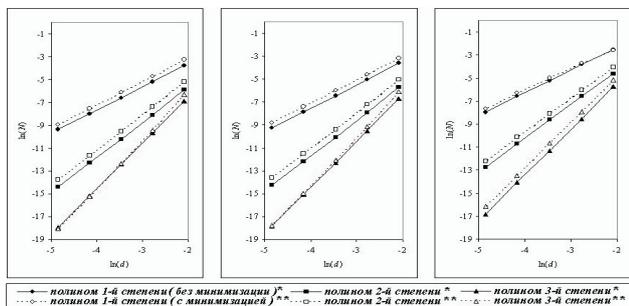


Рис. 3. Графики сходимости для Test 1

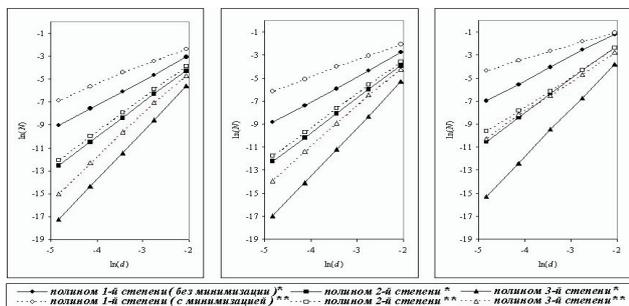
а, г, ж) – в норме L_1 ; б, д, з) – в норме L_2 ; в, е, и) – в норме C_{max} ; а, б, в) – Ω_1 ; г, д, е) – Ω_2 ; ж, з, и) – Ω_3



а) б) в)



г) д) е)



ж) з) и)
Рис. 4. Графики сходимости для Test 2

а, г, ж) – в норме L_1 ; б, д, з) – в норме L_2 ; в, е, и) – в норме C_{max} ; а, б, в) – Ω_1 ; г, д, е) – Ω_2 ; ж, з, и) – Ω_3

Из представленных результатов видно, что значения порядков сходимости (наклон графика кривой) существенно не зависит от типа сетки, а значение численных норм увеличивается с увеличением степени нерегулярности сетки. Порядок сходимости схем, использующих минимизацию пространственных производных, в целом на единицу меньше порядка сходимости схем без минимизации и близок к значению степени полинома реконструкции.

5. Выводы

В статье предложен подход к построению реконструкции произвольного порядка точности на неструктурированной сетке. Расчёт значений производных выполняется пошагово, благодаря чему размерности матриц, обрабатываемых при их определении, уменьшаются. Численная оценка порядка аппроксимации реконструкции для гладких функций хорошо согласуется с теоретическим порядком и является однородной

(существенно не зависит от типа сетки), а значение сеточных норм увеличивается с ростом степени нерегулярности сетки. На основе реконструкции и с применением метода контрольного объёма построена явная разностная схема высокого порядка аппроксимации по пространству. Использование минимизации производных для предотвращения появления существенных осцилляций решений приводит к понижению порядка сходимости до степени полинома реконструкции. В дальнейшей работе предполагается проверка численной схемы при моделировании разрывных решений, для чего планируется повышение её порядка аппроксимации по времени и применение весовых коэффициентов как анализаторов гладкости.

Литература

1. Venkatakrishnan V. A perspective on unstructured grid flow solvers // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 33 - 1996. - в. 34. - P. 533 - 547.
2. Болдарев А. С. К решению гиперболических уравнений на неструктурированных сетках / А.С. Болдарев, В.А. Гасилов, О.Г. Ольховская // Математическое моделирование - 1996. - № 3 (8). - С. 51 - 78.
3. Barth T.J. High-Order Solution of the Euler Equations on Unstructured grids Using Quadratic Reconstruction / T.J. Barth, P.O. Fredrickson // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 31 - 1993. - 15 p.
4. Aboiyar T. High-order WENO finite scheme using polyharmonic spline reconstruction / T. Aboiyar, E. H. Georgoulis, A. Iske // Proc. of the intern. conf. NAAT - 2006. - P. 1 - 14.
5. Shu C.-W. Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes on Triangular meshes / C. Hu, C.-W. Shu // J. of Comp. Phys - 1999. - в. 150. - P. 97 - 127.
6. Shu C.-W. High order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for CFD // Intern. J. of Comp. Fluid Dynam. - 2003. - в. 17. - P. 107 - 118.
7. Harten A. Multi-dimensional ENO schemes for general geometries / A. Harten, S. R. Chakravarthy // ICASE Report - 1991. - №. 91-76. - 68 p.
8. Ollivier-Gooch C. Quasi-ENO Schemes for Unstructured meshes based on unlimited data-depend least squares reconstruction // J. of Comp. Phys - 1997. - в. 133. - P. 6 - 17.
9. Wang Z.J. A high-order spectral (Finite) volume method for conservation laws on unstructured grids / Z.J. Wang, Yen Liu // AIAA Paper - 2002. - P. 1 - 13.
10. Wang Z.J. Multi-dimensional Spectral Difference method for unstructured grids / Y. Liu, M. Vinokur, Z.J. Wang // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 43 - 2005. - P. 1 - 12.
11. Русанов А. В. Неявная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках / А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов // Пробл. машиностроения - 2010. - № 3. - С. 30 - 37.
12. Елизарова Т.Г. Аппроксимация уравнений квазигазодинамики на треугольных сетках / Т.Г. Елизарова, В.В. Серёгин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. - 2005. - №4. - С. 15 - 18.