Пропонується використання кватерніоних матриць для представлення мультиплікативних композицій, які мають скалярні та векторні добутки чотирьох векторів. Знаходяться формули матричного представлення операцій векторної алгебри, які безпосередньо адаптовані до комп'ютерних технологій

Ключові слова: кватерніоні матриці, векторні матриці, мультиплікативні композиції, тотожності векторної алгебри

Предлагается использование кватернионных матриц для представления мультипликативных композиций векторной алгебры, содержащих скалярные и векторные произведения четырех векторов. Находятся формулы матричного представления операций векторной алгебры, непосредственно адаптированные к компьютерным технологиям

Ключевые слова: кватернионные матрицы, векторные матрицы, мультипликативные композиции, тождества векторной алгебры

It is proposed to use quaternionic matrices for presentation of vector algebra multiplicative compositions, that have scalar and outer products of four vectors. New formulas of matrix presentation of vector algebra operations are found. These formulas are directly adapted to computing experiment

Key words: quaternionic matrices, vectorial matrices, multiplicative compositions, identities of vector algebra

УДК 512.643.8:531.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАТЕРНИОННЫМИ МАТРИЦАМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ КОМПОЗИЦИЙ ЧЕТЫРЕХ ВЕКТОРОВ

В.В. Кравец
Доктор технических наук, профессор
Кафедра специализированных компьютерных систем
Украинский государственный химико-технологический университет
пр. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, Украина, 49005
Контактный тел: 067-72-607-72, (056) 748-07-06

А.В. Харченко
Аспирант
Кафедра прикладной математики*
Контактный тел: 050-321-14-60

Т.В. Кравец
Ассистент
Кафедра теоретической механики*
Контактный тел: 067-921-10-67, (056) 713-58-03
*Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна
ул Лазаряна, 2, г. Днепропетровск, Украина, 49010

Введение

Кватернионные матрицы находят применение в различных направлениях науки и техники как удобный математический аппарат, адаптированный к компьютерным технологиям [5, 6, 7, 10]. В данной статье иллюстрируется применение кватернионных матриц в векторной алгебре на примере рассмотрения сложных векторно-скалярных произведений, составленных из четырех различных векторов. Систематически выводятся тождества векторной алгебры, связывающие четыре вектора, где наряду с известными результатами устанавливаются новые тождества. Полученные тождества являются побочным результатом основной задачи: матричного представления сложных векторно-скалярных произведений четырех векторов. Искомая задача решается в развернутом виде, следуя общему алгоритму, изложенному в [9].

Постановка задачи

Заданы четыре различных вектора: $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$, которым сопоставляются кватернионные матрицы, определяемые базисом E_i и E_i^t $(i=1,2,3)$ и изоморфные вектору и противоположному вектору [8]. Требуется представить рассматриваемыми кватернионными матрицами мультипликативные композиции четырех векторов, содержащие сложные скалярно-вектоные произведения.

Решение задачи

I. Формируются кватернионные матрицы $A_0, B_0, C_0, A_0^t, B_0^t, C_0^t$, эквивалентные заданным и противоположным векторам:

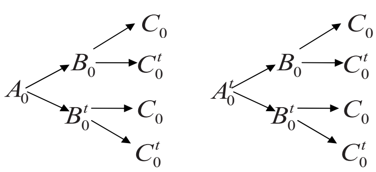
$$A_0=\begin{Vmatrix}0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & 0 & -a_3 & a_2\\ -a_2 & a_3 & 0 & -a_1\\ -a_3 & -a_2 & a_1 & 0\end{Vmatrix},\quad A_0^t=\begin{Vmatrix}0 & a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & 0 & a_3 & -a_2\\ -a_2 & -a_3 & 0 & a_1\\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 0\end{Vmatrix},$$

$$B_0=\begin{Vmatrix}0 & b_1 & b_2 & b_3\\ -b_1 & 0 & -b_3 & b_2\\ -b_2 & b_3 & 0 & -b_1\\ -b_3 & -b_2 & b_1 & 0\end{Vmatrix},\quad B_0^t=\begin{Vmatrix}0 & b_1 & b_2 & b_3\\ -b_1 & 0 & b_3 & -b_2\\ -b_2 & -b_3 & 0 & b_1\\ -b_3 & b_2 & -b_1 & 0\end{Vmatrix},$$

$$C_0=\begin{Vmatrix}0 & c_1 & c_2 & c_3\\ -c_1 & 0 & -c_3 & c_2\\ -c_2 & c_3 & 0 & -c_1\\ -c_3 & -c_2 & c_1 & 0\end{Vmatrix},\quad C_0^t=\begin{Vmatrix}0 & c_1 & c_2 & c_3\\ -c_1 & 0 & c_3 & -c_2\\ -c_2 & -c_3 & 0 & c_1\\ -c_3 & c_2 & -c_1 & 0\end{Vmatrix}.$$

а также $d_0=\begin{Vmatrix}0\\ d_1\\ d_2\\ d_3\end{Vmatrix}$, и $d_0^t=\begin{Vmatrix}0 & d_1 & d_2 & d_3\end{Vmatrix}$, где $a_i,b_i,c_i,d_i\,(i=1,2,3)$ известные компоненты векторов в некотором базисе.

II. Строятся мультипликативные композиции исходных кватернионных матриц по следующей схеме:



Откуда устанавливаются мультипликативные композиции кватернионных матриц, соответствующих четырем заданным векторам, в количестве определяемом в виде 2^3, а именно:

1. $A_0\cdot B_0\cdot C_0\cdot d_0$,
2. $A_0\cdot B_0\cdot C_0^t\cdot d_0$,
3. $A_0\cdot B_0^t\cdot C_0\cdot d_0$,
4. $A_0\cdot B_0^t\cdot C_0^t\cdot d_0$,
5. $A_0^t\cdot B_0\cdot C_0\cdot d_0$,
6. $A_0^t\cdot B_0\cdot C_0^t\cdot d_0$,
7. $A_0^t\cdot B_0^t\cdot C_0\cdot d_0$,
8. $A_0^t\cdot B_0^t\cdot C_0^t\cdot d_0$,

III. Определяются, исходя из свойства ассоциативности умножения матриц, следующие пять возможных последовательностей перемножения установленных восьми мультипликативных композиций кватернионных матриц, т.е.:

1. $$A_0\cdot B_0\cdot C_0\cdot d_0=A_0\cdot\left[B_0\cdot(C_0\cdot d_0)\right]=A_0\cdot\left[(B_0\cdot C_0)\cdot d_0\right]=$$
$$=\left[(A_0\cdot B_0)\cdot C_0\right]\cdot d_0=\left[A_0\cdot(B_0\cdot C_0)\right]\cdot d_0=(A_0\cdot B_0)\cdot(C_0\cdot d_0),$$

2. $$A_0\cdot B_0\cdot C_0^t\cdot d_0=A_0\cdot\left[B_0\cdot(C_0^t\cdot d_0)\right]=A_0\cdot\left[(B_0\cdot C_0^t)\cdot d_0\right]=$$
$$=\left[(A_0\cdot B_0)\cdot C_0^t\right]\cdot d_0=\left[A_0\cdot(B_0\cdot C_0^t)\right]\cdot d_0=(A_0\cdot B_0)\cdot(C_0^t\cdot d_0),$$

3. $$A_0\cdot B_0^t\cdot C_0\cdot d_0=A_0\cdot\left[B_0^t\cdot(C_0\cdot d_0)\right]=A_0\cdot\left[(B_0^t\cdot C_0)\cdot d_0\right]=$$
$$=\left[(A_0\cdot B_0^t)\cdot C_0\right]\cdot d_0=\left[A_0\cdot(B_0^t\cdot C_0)\right]\cdot d_0=(A_0\cdot B_0^t)\cdot(C_0\cdot d_0),$$

4. $$A_0\cdot B_0^t\cdot C_0^t\cdot d_0=A_0\cdot\left[B_0^t\cdot(C_0^t\cdot d_0)\right]=A_0\cdot\left[(B_0^t\cdot C_0^t)\cdot d_0\right]=$$
$$=\left[(A_0\cdot B_0^t)\cdot C_0^t\right]\cdot d_0=\left[A_0\cdot(B_0^t\cdot C_0^t)\right]\cdot d_0=(A_0\cdot B_0^t)\cdot(C_0^t\cdot d_0),$$

5. $$A_0^t\cdot B_0\cdot C_0\cdot d_0=A_0^t\cdot\left[B_0\cdot(C_0\cdot d_0)\right]=A_0^t\cdot\left[(B_0\cdot C_0)\cdot d_0\right]=$$
$$=\left[(A_0^t\cdot B_0)\cdot C_0\right]\cdot d_0=\left[A_0^t\cdot(B_0\cdot C_0)\right]\cdot d_0=(A_0^t\cdot B_0)\cdot(C_0\cdot d_0),$$

6. $$A_0^t\cdot B_0\cdot C_0^t\cdot d_0=A_0^t\cdot\left[B_0\cdot(C_0^t\cdot d_0)\right]=A_0^t\cdot\left[(B_0\cdot C_0^t)\cdot d_0\right]=$$
$$=\left[(A_0^t\cdot B_0)\cdot C_0^t\right]\cdot d_0=\left[A_0^t\cdot(B_0\cdot C_0^t)\right]\cdot d_0=(A_0^t\cdot B_0)\cdot(C_0^t\cdot d_0),$$

7. $$A_0^t\cdot B_0^t\cdot C_0\cdot d_0=A_0^t\cdot\left[B_0^t\cdot(C_0\cdot d_0)\right]=A_0^t\cdot\left[(B_0^t\cdot C_0)\cdot d_0\right]=$$
$$=\left[(A_0^t\cdot B_0^t)\cdot C_0\right]\cdot d_0=\left[A_0^t\cdot(B_0^t\cdot C_0)\right]\cdot d_0=(A_0^t\cdot B_0^t)\cdot(C_0\cdot d_0),$$

8. $$A_0^t\cdot B_0^t\cdot C_0^t\cdot d_0=A_0^t\cdot\left[B_0^t\cdot(C_0^t\cdot d_0)\right]=A_0^t\cdot\left[(B_0^t\cdot C_0^t)\cdot d_0\right]=$$
$$=\left[(A_0^t\cdot B_0^t)\cdot C_0^t\right]\cdot d_0=\left[A_0^t\cdot(B_0^t\cdot C_0^t)\right]\cdot d_0=(A_0^t\cdot B_0^t)\cdot(C_0^t\cdot d_0),$$

IV. Составленным восьми мультипликативным композициям кватернионных матриц, с учетом пяти вариантов ассоциативности, ставится в соответствие мультипликативные композиции четырех векторов, содержащие скалярные и векторные произведения:

$$A_0\left[B_0(C_0\odot d_0)\right]\to$$

1.1. $$\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+\bar a\cdot\left[\bar b\times(\bar c\times\bar d)\right]}{-\bar a\left[\bar b\cdot(\bar c\times\bar d)\right]-(\bar a\times\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+\bar a\times\left[\bar b\times(\bar c\times\bar d)\right]}\right\|;$$

$$A_0\left[(B_0\odot C_0)d_0\right]\to$$

1.2. $$\to\left\|\frac{-(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\cdot\bar d)+\bar a\cdot\left[(\bar b\times\bar c)\times\bar d\right]}{-\bar a\left[(\bar b\times\bar c)\cdot\bar d\right]-(\bar a\times\bar d)(\bar b\cdot\bar c)+\bar a\times\left[(\bar b\times\bar c)\times\bar d\right]}\right\|;$$

$$\left[(A_0\odot B_0)C_0\right]d_0\to$$

1.3. $$\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+\left[(\bar a\times\bar b)\times\bar c\right]\cdot\bar d}{-\left[(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c\right]\bar d-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\times\bar d)+\left[(\bar a\times\bar b)\times\bar c\right]\times\bar d}\right\|;$$

$$\left[A_0(B_0\odot C_0)\right]d_0\to$$

1.4. $$\to\left\|\frac{-(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\cdot\bar d)+\left[\bar a\times(\bar b\times\bar c)\right]\cdot\bar d}{-\left[\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)\right]\bar d-(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\times\bar d)+\left[\bar a\times(\bar b\times\bar c)\right]\times\bar d}\right\|;$$

$$(A_0\odot B_0)(C_0\odot d_0)\to$$

1.5. $$\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+(\bar a\times\bar b)\cdot(\bar c\times\bar d)}{-(\bar a\times\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\times\bar d)+(\bar a\times\bar b)\times(\bar c\times\bar d)}\right\|;$$

$$2.1.\ A_0\left[B_0\left(C_0^t\odot d_0\right)\right]\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}{\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}\right\|;$$

$$2.2.\ A_0\left[\left(B_0\odot C_0^t\right)d_0\right]\to\left\|\frac{\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)-2(\bar{a}\cdot\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}{\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]+\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)-2(\bar{a}\times\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}\right\|;$$

$$2.3.\left[\left(A_0\odot B_0\right)C_0^t\right]d_0\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}}{\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d}-2\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{c}+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)+\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}}\right\|;$$

$$2.4.\left[A_0\left(B_0\odot C_0^t\right)\right]d_0\to\left\|\frac{\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)-2(\bar{a}\cdot\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{d}}{-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d}+2\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]-2\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)(\bar{a}\times\bar{c})+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}+\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)}\right\|;$$

$$2.5.\left(A_0\odot B_0\right)\left(C_0^t\odot d_0\right)\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}\right\|;$$

$$3.1.\ A_0\left[B_0^t\left(C_0\odot d_0\right)\right]\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}{-\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}\right\|;$$

$$3.2.\ A_0\left[\left(B_0^t\odot C_0\right)d_0\right]\to\left\|\frac{\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)-2(\bar{a}\cdot\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}{-\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]+\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)-2(\bar{a}\times\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}\right\|;$$

$$3.3.\left[\left(A_0\odot B_0^t\right)C_0\right]d_0\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}}{-\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d}-2\left[(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\bar{d}\right]\bar{b}+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)+\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}}\right\|;$$

$$3.4.\left[A_0\left(B_0^t\odot C_0\right)\right]d_0\to\left\|\frac{\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)-2(\bar{a}\cdot\bar{c})\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{d}}{-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d}-2\left(b\cdot\bar{d}\right)(\bar{a}\times\bar{c})+\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}}\right\|;$$

$$3.5.\left(A_0\odot B_0^t\right)\left(C_0\odot d_0\right)\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-2\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\bar{b}+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}\right\|;$$

$$4.1.\ A_0\left[B_0^t\left(C_0^t\odot d_0\right)\right]\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}{\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}\right\|;$$

$$4.2.\ A_0\left[\left(B_0^t\odot C_0^t\right)d_0\right]\to\left\|\frac{-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}{\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)+\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}\right\|;$$

$$4.3.\left[\left(A_0\odot B_0^t\right)C_0^t\right]d_0\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}}{\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d}+2\left[(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\bar{d}\right]\bar{b}-2\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{c}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)+\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}}\right\|;$$

$$4.4.\left[A_0\left(B_0^t\odot C_0^t\right)\right]d_0\to\left\|\frac{-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{d}}{-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d}+2\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}}\right\|;$$

$$4.5.\left(A_0\odot B_0^t\right)\left(C_0^t\odot d_0\right)\to\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)+2\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\bar{b}-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}\right\|;$$

$$5.1.\ A_0^t\left[B_0\left(C_0\odot d_0\right)\right]\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+\bar a\cdot\left[\bar b\times(\bar c\times\bar d)\right]}{-\bar a\left[\bar b\cdot(\bar c\times\bar d)\right]+(\bar a\times\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-\bar a\times\left[\bar b\times(\bar c\times\bar d)\right]}\right\|;$$

$$5.2.\ A_0^t\left[\left(B_0\odot C_0\right)d_0\right]\to\left\|\frac{-(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\cdot\bar d)+\bar a\cdot\left[(\bar b\times\bar c)\times\bar d\right]}{-\bar a\left[(\bar b\times\bar c)\cdot\bar d\right]+(\bar a\times\bar d)(\bar b\cdot\bar c)-\bar a\times\left[(\bar b\times\bar c)\times\bar d\right]}\right\|;$$

$$5.3.\ \left[\left(A_0^t\odot B_0\right)C_0\right]d_0\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+\left[(\bar a\times\bar b)\times\bar c\right]\cdot\bar d}{-\left[(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c\right]\bar d-2\left[(\bar a\times\bar c)\cdot\bar d\right]\bar b+2\left[(\bar a\times\bar b)\cdot\bar d\right]\bar c+(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\times\bar d)-\left[(\bar a\times\bar b)\times\bar c\right]\times\bar d}\right\|;$$

$$5.4.\ \left[A_0^t\left(B_0\odot C_0\right)\right]d_0\to\left\|\frac{-(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\cdot\bar d)+\left[\bar a\times(\bar b\times\bar c)\right]\cdot\bar d}{\left[\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)\right]\bar d-2\bar a\left[(\bar b\times\bar c)\cdot\bar d\right]+(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\times\bar d)-\left[\bar a\times(\bar b\times\bar c)\right]\times\bar d}\right\|;$$

$$5.5.\ \left(A_0^t\odot B_0\right)\left(C_0\odot d_0\right)\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+(\bar a\times\bar b)\cdot(\bar c\times\bar d)}{(\bar a\times\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\times\bar d)-2\left[\bar a\cdot(\bar c\times\bar d)\right]\bar b+(\bar a\times\bar b)\times(\bar c\times\bar d)}\right\|;$$

$$6.1.\ A_0^t\left[B_0\left(C_0^t\odot d_0\right)\right]\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-\bar a\cdot\left[\bar b\times(\bar c\times\bar d)\right]}{\bar a\left[\bar b\cdot(\bar c\times\bar d)\right]+(\bar a\times\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+\bar a\times\left[\bar b\times(\bar c\times\bar d)\right]}\right\|;$$

$$6.2.\ A_0^t\left[\left(B_0\odot C_0^t\right)d_0\right]\to\left\|\frac{(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\cdot\bar d)-2(\bar a\cdot\bar c)(\bar b\cdot\bar d)+\bar a\cdot\left[(\bar b\times\bar c)\times\bar d\right]}{\bar a\left[(\bar b\times\bar c)\cdot\bar d\right]-(\bar a\times\bar d)(\bar b\cdot\bar c)+2(\bar a\times\bar c)(\bar b\cdot\bar d)-\bar a\times\left[(\bar b\times\bar c)\times\bar d\right]}\right\|;$$

$$6.3.\ \left[\left(A_0^t\odot B_0\right)C_0^t\right]d_0\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-\left[(\bar a\times\bar b)\times\bar c\right]\cdot\bar d}{\left[(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c\right]\bar d+2\left[(\bar a\times\bar c)\cdot\bar d\right]\bar b-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\times\bar d)-\left[(\bar a\times\bar b)\times\bar c\right]\times\bar d}\right\|;$$

$$6.4.\ \left[A_0^t\left(B_0\odot C_0^t\right)\right]d_0\to\left\|\frac{(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\cdot\bar d)-2(\bar a\cdot\bar c)(\bar b\cdot\bar d)+\left[\bar a\times(\bar b\times\bar c)\right]\cdot\bar d}{\left[\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)\right]\bar d+2(\bar b\cdot\bar d)(\bar a\times\bar c)-\left[\bar a\times(\bar b\times\bar c)\right]\times\bar d-(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\times\bar d)}\right\|;$$

$$6.5.\ \left(A_0^t\odot B_0\right)\left(C_0^t\odot d_0\right)\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-(\bar a\times\bar b)\cdot(\bar c\times\bar d)}{(\bar a\times\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\times\bar d)+2\left[\bar a\cdot(\bar c\times\bar d)\right]\bar b-(\bar a\times\bar b)\times(\bar c\times\bar d)}\right\|;$$

$$7.1.\ A_0^t\left[B_0^t\left(C_0\odot d_0\right)\right]\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-\bar a\cdot\left[\bar b\times(\bar c\times\bar d)\right]}{-\bar a\left[\bar b\cdot(\bar c\times\bar d)\right]+(\bar a\times\bar b)(\bar c\cdot\bar d)+\bar a\times\left[\bar b\times(\bar c\times\bar d)\right]}\right\|;$$

$$7.2.\ A_0^t\left[\left(B_0^t\odot C_0\right)d_0\right]\to\left\|\frac{(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\cdot\bar d)-2(\bar a\cdot\bar c)(\bar b\cdot\bar d)+\bar a\cdot\left[(\bar b\times\bar c)\times\bar d\right]}{-\bar a\left[(\bar b\times\bar c)\cdot\bar d\right]-(\bar a\times\bar d)(\bar b\cdot\bar c)+2(\bar a\times\bar c)(\bar b\cdot\bar d)-\bar a\times\left[(\bar b\times\bar c)\times\bar d\right]}\right\|;$$

$$7.3.\ \left[\left(A_0^t\odot B_0^t\right)C_0\right]d_0\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-\left[(\bar a\times\bar b)\times\bar c\right]\cdot\bar d}{-\left[(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c\right]\bar d+2\left[(\bar a\times\bar b)\cdot\bar d\right]\bar c-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\times\bar d)-\left[(\bar a\times\bar b)\times\bar c\right]\times\bar d}\right\|;$$

$$7.4.\ \left[A_0^t\left(B_0^t\odot C_0\right)\right]d_0\to\left\|\frac{(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\cdot\bar d)-2(\bar a\cdot\bar c)(\bar b\cdot\bar d)+\left[\bar a\times(\bar b\times\bar c)\right]\cdot\bar d}{\left[\bar a\cdot(\bar b\times\bar c)\right]\bar d-2\bar a\left[(\bar b\times\bar c)\cdot\bar d\right]+2(\bar b\cdot\bar d)(\bar a\times\bar c)-\left[\bar a\times(\bar b\times\bar c)\right]\times\bar d-(\bar b\cdot\bar c)(\bar a\times\bar d)}\right\|;$$

$$7.5.\ \left(A_0^t\odot B_0^t\right)\left(C_0\odot d_0\right)\to\left\|\frac{-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-(\bar a\times\bar b)\cdot(\bar c\times\bar d)}{(\bar a\times\bar b)(\bar c\cdot\bar d)-(\bar a\cdot\bar b)(\bar c\times\bar d)+(\bar a\times\bar b)\times(\bar c\times\bar d)}\right\|;$$

$$8.1.\ A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^t \odot d_0\right)\right] \to \left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}{\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)-\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}\right\|;$$

$$8.2.\ A_0^t\left[\left(B_0^t \odot C_0^t\right)d_0\right] \to \left\|\frac{-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}{\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]+\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)-\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}\right\|;$$

$$8.3.\ \left[\left(A_0^t \odot B_0^t\right)C_0^t\right]d_0 \to \left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}}{\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d}+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\times\bar{d}}\right\|;$$

$$8.4.\ \left[A_0^t\left(B_0^t \odot C_0^t\right)\right]d_0 \to \left\|\frac{-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\cdot\bar{d}}{\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d}+\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)-\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}}\right\|;$$

$$8.5.\ \left(A_0^t \odot B_0^t\right)\left(C_0^t \odot d_0\right) \to \left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}\right\|;$$

V. Алгебраические суммы составленных восьми мультипликативных композиций кватернионных матриц представляются в виде произведения алгебраических сумм исходных кватернионных матриц:

$$1.\ \begin{array}{l}A_0B_0C_0d_0+A_0B_0^tC_0d_0+A_0^tB_0C_0d_0+A_0^tB_0^tC_0d_0+\\+A_0B_0C_0^td_0+A_0B_0^tC_0^td_0+A_0^tB_0C_0^td_0+A_0^tB_0^tC_0^td_0=\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0\end{array}$$

$$2.\ \begin{array}{l}A_0B_0C_0d_0+A_0B_0^tC_0d_0-A_0^tB_0C_0d_0-A_0^tB_0^tC_0d_0+\\+A_0B_0C_0^td_0+A_0B_0^tC_0^td_0-A_0^tB_0C_0^td_0-A_0^tB_0^tC_0^td_0=\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0\end{array}$$

$$3.\ \begin{array}{l}A_0B_0C_0d_0-A_0B_0^tC_0d_0+A_0^tB_0C_0d_0-A_0^tB_0^tC_0d_0+\\+A_0B_0C_0^td_0-A_0B_0^tC_0^td_0+A_0^tB_0C_0^td_0-A_0^tB_0^tC_0^td_0=\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0\end{array}$$

$$4.\ \begin{array}{l}A_0B_0C_0d_0+A_0B_0^tC_0d_0+A_0^tB_0C_0d_0+A_0^tB_0^tC_0d_0-\\-A_0B_0C_0^td_0-A_0B_0^tC_0^td_0-A_0^tB_0C_0^td_0-A_0^tB_0^tC_0^td_0=\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0\end{array}$$

$$5.\ \begin{array}{l}A_0B_0C_0d_0-A_0B_0^tC_0d_0-A_0^tB_0C_0d_0+A_0^tB_0^tC_0d_0+\\+A_0B_0C_0^td_0-A_0B_0^tC_0^td_0-A_0^tB_0C_0^td_0+A_0^tB_0^tC_0^td_0=\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0\end{array}$$

$$6.\ \begin{array}{l}A_0B_0C_0d_0+A_0B_0^tC_0d_0-A_0^tB_0C_0d_0-A_0^tB_0^tC_0d_0-\\-A_0B_0C_0^td_0-A_0B_0^tC_0^td_0+A_0^tB_0C_0^td_0+A_0^tB_0^tC_0^td_0=\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0\end{array}$$

$$7.\ \begin{array}{l}A_0B_0C_0d_0-A_0B_0^tC_0d_0+A_0^tB_0C_0d_0-A_0^tB_0^tC_0d_0-\\-A_0B_0C_0^td_0+A_0B_0^tC_0^td_0-A_0^tB_0C_0^td_0+A_0^tB_0^tC_0^td_0=\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0\end{array}$$

$$8.\ \begin{array}{l}A_0B_0C_0d_0-A_0B_0^tC_0d_0-A_0^tB_0C_0d_0+A_0^tB_0^tC_0d_0-\\-A_0B_0C_0^td_0+A_0B_0^tC_0^td_0+A_0^tB_0C_0^td_0-A_0^tB_0^tC_0^td_0=\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0\end{array}$$

VI. Составляются восемь комбинаций мультипликативных композиций кватернионных матриц, с учетом свойства ассоциативности матричных произведений (пять возможных вариантов последовательности умножения кватернионных матриц):

$$1.1.\ \begin{array}{l}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0=A_0\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right]+A_0\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right]+A_0^t\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right]\\+A_0^t\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right]+A_0\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right]+A_0\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right]+A_0^t\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right]+A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right],\end{array}$$

1.2. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = A_0\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] - \\ - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] + A_0\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right],$$

1.3. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = A_0\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] - \\ - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] + A_0\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right],$$

1.4. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = A_0\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] + \\ + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right],$$

1.5. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = A_0\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] + \\ + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] + A_0\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right],$$

1.6. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = A_0\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] - \\ - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right],$$

1.7. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = A_0\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] - \\ - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right],$$

1.8. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = A_0\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0 d_0\right)\right] + \\ + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0 d_0\right)\right] - A_0\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0^t d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^t d_0\right)\right],$$

2.1. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = A_0\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] + \\ + A_0^t\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right],$$

2.2. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = A_0\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] - \\ - A_0^t\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right],$$

2.3. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = A_0\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] - \\ - A_0^t\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right],$$

2.4. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = A_0\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] + \\ A_0^t\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right],$$

2.5. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = A_0\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] + \\ + A_0^t\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right],$$

2.6. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = A_0\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] - \\ - A_0^t\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right],$$

2.7. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = A_0\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] - \\ - A_0^t\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right],$$

2.8. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = A_0\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0 C_0\right)d_0\right] + \\ + A_0^t\left[\left(B_0^t C_0\right)d_0\right] - A_0\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] + A_0\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right] + A_0^t\left[\left(B_0 C_0^t\right)d_0\right] - A_0^t\left[\left(B_0^t C_0^t\right)d_0\right],$$

3.1. $$(A_0+A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=[(A_0B_0)C_0]d_0+[(A_0B_0^t)C_0]d_0+[(A_0^tB_0)C_0]d_0+$$
$$+[(A_0^tB_0^t)C_0]d_0+[(A_0B_0)C_0^t]d_0+[(A_0B_0^t)C_0^t]d_0+[(A_0^tB_0)C_0^t]d_0+[(A_0^tB_0^t)C_0^t]d_0,$$

3.2. $$(A_0-A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=[(A_0B_0)C_0]d_0+[(A_0B_0^t)C_0]d_0-[(A_0^tB_0)C_0]d_0-$$
$$-[(A_0^tB_0^t)C_0]d_0+[(A_0B_0)C_0^t]d_0+[(A_0B_0^t)C_0^t]d_0-[(A_0^tB_0)C_0^t]d_0-[(A_0^tB_0^t)C_0^t]d_0,$$

3.3. $$(A_0+A_0^t)(B_0-B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=[(A_0B_0)C_0]d_0-[(A_0B_0^t)C_0]d_0+[(A_0^tB_0)C_0]d_0-$$
$$-[(A_0^tB_0^t)C_0]d_0+[(A_0B_0)C_0^t]d_0-[(A_0B_0^t)C_0^t]d_0+[(A_0^tB_0)C_0^t]d_0-[(A_0^tB_0^t)C_0^t]d_0,$$

3.4. $$(A_0+A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0-C_0^t)d_0=[(A_0B_0)C_0]d_0+[(A_0B_0^t)C_0]d_0+[(A_0^tB_0)C_0]d_0+$$
$$+[(A_0^tB_0^t)C_0]d_0-[(A_0B_0)C_0^t]d_0-[(A_0B_0^t)C_0^t]d_0-[(A_0^tB_0)C_0^t]d_0-[(A_0^tB_0^t)C_0^t]d_0,$$

3.5. $$(A_0-A_0^t)(B_0-B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=[(A_0B_0)C_0]d_0-[(A_0B_0^t)C_0]d_0-[(A_0^tB_0)C_0]d_0+$$
$$+[(A_0^tB_0^t)C_0]d_0+[(A_0B_0)C_0^t]d_0-[(A_0B_0^t)C_0^t]d_0-[(A_0^tB_0)C_0^t]d_0+[(A_0^tB_0^t)C_0^t]d_0,$$

3.6. $$(A_0-A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0-C_0^t)d_0=[(A_0B_0)C_0]d_0+[(A_0B_0^t)C_0]d_0-[(A_0^tB_0)C_0]d_0-$$
$$-[(A_0^tB_0^t)C_0]d_0-[(A_0B_0)C_0^t]d_0-[(A_0B_0^t)C_0^t]d_0+[(A_0^tB_0)C_0^t]d_0+[(A_0^tB_0^t)C_0^t]d_0,$$

3.7. $$(A_0+A_0^t)(B_0-B_0^t)(C_0-C_0^t)d_0=[(A_0B_0)C_0]d_0-[(A_0B_0^t)C_0]d_0+[(A_0^tB_0)C_0]d_0-$$
$$-[(A_0^tB_0^t)C_0]d_0-[(A_0B_0)C_0^t]d_0+[(A_0B_0^t)C_0^t]d_0-[(A_0^tB_0)C_0^t]d_0+[(A_0^tB_0^t)C_0^t]d_0,$$

3.8. $$(A_0-A_0^t)(B_0-B_0^t)(C_0-C_0^t)d_0=[(A_0B_0)C_0]d_0-[(A_0B_0^t)C_0]d_0-[(A_0^tB_0)C_0]d_0+$$
$$+[(A_0^tB_0^t)C_0]d_0-[(A_0B_0)C_0^t]d_0+[(A_0B_0^t)C_0^t]d_0+[(A_0^tB_0)C_0^t]d_0-[(A_0^tB_0^t)C_0^t]d_0,$$

4.1. $$(A_0+A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=[A_0(B_0C_0)]d_0+[A_0(B_0^tC_0)]d_0+[A_0^t(B_0C_0)]d_0+$$
$$+[A_0^t(B_0^tC_0)]d_0+[A_0(B_0C_0^t)]d_0+[A_0(B_0^tC_0^t)]d_0+[A_0^t(B_0C_0^t)]d_0+[A_0^t(B_0^tC_0^t)]d_0,$$

4.2. $$(A_0-A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=[A_0(B_0C_0)]d_0+[A_0(B_0^tC_0)]d_0-[A_0^t(B_0C_0)]d_0-$$
$$-[A_0^t(B_0^tC_0)]d_0+[A_0(B_0C_0^t)]d_0+[A_0(B_0^tC_0^t)]d_0-[A_0^t(B_0C_0^t)]d_0-[A_0^t(B_0^tC_0^t)]d_0,$$

4.3. $$(A_0+A_0^t)(B_0-B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=[A_0(B_0C_0)]d_0-[A_0(B_0^tC_0)]d_0+[A_0^t(B_0C_0)]d_0-$$
$$-[A_0^t(B_0^tC_0)]d_0+[A_0(B_0C_0^t)]d_0-[A_0(B_0^tC_0^t)]d_0+[A_0^t(B_0C_0^t)]d_0-[A_0^t(B_0^tC_0^t)]d_0,$$

4.4. $$(A_0+A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0-C_0^t)d_0=[A_0(B_0C_0)]d_0+[A_0(B_0^tC_0)]d_0+[A_0^t(B_0C_0)]d_0+$$
$$+[A_0^t(B_0^tC_0)]d_0-[A_0(B_0C_0^t)]d_0-[A_0(B_0^tC_0^t)]d_0-[A_0^t(B_0C_0^t)]d_0-[A_0^t(B_0^tC_0^t)]d_0,$$

4.5. $$(A_0-A_0^t)(B_0-B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=[A_0(B_0C_0)]d_0-[A_0(B_0^tC_0)]d_0-[A_0^t(B_0C_0)]d_0+$$
$$+[A_0^t(B_0^tC_0)]d_0+[A_0(B_0C_0^t)]d_0-[A_0(B_0^tC_0^t)]d_0-[A_0^t(B_0C_0^t)]d_0+[A_0^t(B_0^tC_0^t)]d_0,$$

4.6. $$(A_0-A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0-C_0^t)d_0=[A_0(B_0C_0)]d_0+[A_0(B_0^tC_0)]d_0-[A_0^t(B_0C_0)]d_0-$$
$$-[A_0^t(B_0^tC_0)]d_0-[A_0(B_0C_0^t)]d_0-[A_0(B_0^tC_0^t)]d_0+[A_0^t(B_0C_0^t)]d_0+[A_0^t(B_0^tC_0^t)]d_0,$$

4.7. $$(A_0+A_0^t)(B_0-B_0^t)(C_0-C_0^t)d_0=[A_0(B_0C_0)]d_0-[A_0(B_0^tC_0)]d_0+[A_0^t(B_0C_0)]d_0-$$
$$-[A_0^t(B_0^tC_0)]d_0-[A_0(B_0C_0^t)]d_0+[A_0(B_0^tC_0^t)]d_0-[A_0^t(B_0C_0^t)]d_0+[A_0^t(B_0^tC_0^t)]d_0,$$

4.8. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = \left[A_0\left(B_0C_0\right)\right]d_0 - \left[A_0\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0 - \left[A_0^t\left(B_0C_0\right)\right]d_0 + \\ +\left[A_0^t\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0 - \left[A_0\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0 + \left[A_0\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0 + \left[A_0^t\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0 - \left[A_0^t\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0,$$

5.1. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = \left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right) + \\ +\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right),$$

5.2. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = \left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right) - \\ -\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right),$$

5.3. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = \left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right) - \\ -\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right),$$

5.4. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = \left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right) + \\ +\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right),$$

5.5. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 + C_0^t\right)d_0 = \left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right) + \\ +\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right),$$

5.6. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 + B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = \left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right) - \\ -\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right),$$

5.7. $$\left(A_0 + A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = \left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right) + \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right) - \\ -\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right),$$

5.8. $$\left(A_0 - A_0^t\right)\left(B_0 - B_0^t\right)\left(C_0 - C_0^t\right)d_0 = \left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right) + \\ +\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right) - \left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right) + \left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right) - \left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right).$$

VII.По составленным комбинациям мультипликативных композиций кватернионных матриц, с учетом ассоциативности умножения, находятся соответствующие им мультипликативные композиции векторной алгебры для четырех векторов:

1.1. $$A_0\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] + \\ +A_0\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] \to 8\left\| \frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)}{0} \right\|;$$

1.2. $$A_0\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] + \\ +A_0\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] \to 8\left\| \frac{0}{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)} \right\|;$$

1.3. $$A_0\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] + \\ +A_0\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] \to 8\left\| \frac{0}{0} \right\|;$$

1.4. $$A_0\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] + A_0\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0\left(C_0d_0\right)\right] + A_0^t\left[B_0^t\left(C_0d_0\right)\right] - \\ -A_0\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] - A_0\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0\left(C_0^td_0\right)\right] - A_0^t\left[B_0^t\left(C_0^td_0\right)\right] \to 8\left\| \frac{0}{-\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]} \right\|;$$

1.5.
$$\begin{aligned}&A_0\left[B_0(C_0d_0)\right]-A_0\left[B_0^t(C_0d_0)\right]-A_0^t\left[B_0(C_0d_0)\right]+A_0^t\left[B_0^t(C_0d_0)\right]+\\&+A_0\left[B_0(C_0^td_0)\right]-A_0\left[B_0^t(C_0^td_0)\right]-A_0^t\left[B_0(C_0^td_0)\right]+A_0^t\left[B_0^t(C_0^td_0)\right]\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{aligned}$$

1.6.
$$\begin{aligned}&A_0\left[B_0(C_0d_0)\right]+A_0\left[B_0^t(C_0d_0)\right]-A_0^t\left[B_0(C_0d_0)\right]-A_0^t\left[B_0^t(C_0d_0)\right]-\\&-A_0\left[B_0(C_0^td_0)\right]-A_0\left[B_0^t(C_0^td_0)\right]+A_0^t\left[B_0(C_0^td_0)\right]+A_0^t\left[B_0^t(C_0^td_0)\right]\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{aligned}$$

1.7.
$$\begin{aligned}&A_0\left[B_0(C_0d_0)\right]-A_0\left[B_0^t(C_0d_0)\right]+A_0^t\left[B_0(C_0d_0)\right]-A_0^t\left[B_0^t(C_0d_0)\right]-\\&-A_0\left[B_0(C_0^td_0)\right]+A_0\left[B_0^t(C_0^td_0)\right]-A_0^t\left[B_0(C_0^td_0)\right]+A_0^t\left[B_0^t(C_0^td_0)\right]\to 8\left\|\frac{\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{d})\right]}{0}\right\|;\end{aligned}$$

1.8.
$$\begin{aligned}&A_0\left[B_0(C_0d_0)\right]-A_0\left[B_0^t(C_0d_0)\right]-A_0^t\left[B_0(C_0d_0)\right]+A_0^t\left[B_0^t(C_0d_0)\right]-\\&-A_0\left[B_0(C_0^td_0)\right]+A_0\left[B_0^t(C_0^td_0)\right]+A_0^t\left[B_0(C_0^td_0)\right]-A_0^t\left[B_0^t(C_0^td_0)\right]\to 8\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\left[\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{d})\right]}\right\|.\end{aligned}$$

2.1.
$$\begin{aligned}&A_0\left[(B_0C_0)d_0\right]+A_0\left[(B_0^tC_0)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0C_0)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0^tC_0)d_0\right]+\\&+A_0\left[(B_0C_0^t)d_0\right]+A_0\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0C_0^t)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]\to 8\left\|\frac{\bar{a}\cdot\left[(\bar{b}\times\bar{c})\times\bar{d}\right]-(\bar{a}\cdot\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d})}{0}\right\|;\end{aligned}$$

2.2.
$$\begin{aligned}&A_0\left[(B_0C_0)d_0\right]+A_0\left[(B_0^tC_0)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0C_0)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0^tC_0)d_0\right]+\\&+A_0\left[(B_0C_0^t)d_0\right]+A_0\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0C_0^t)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]\to 8\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\left[(\bar{b}\times\bar{c})\times\bar{d}\right]-(\bar{a}\times\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d})}\right\|;\end{aligned}$$

2.3.
$$\begin{aligned}&A_0\left[(B_0C_0)d_0\right]-A_0\left[(B_0^tC_0)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0C_0)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0^tC_0)d_0\right]+\\&+A_0\left[(B_0C_0^t)d_0\right]-A_0\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0C_0^t)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{aligned}$$

2.4.
$$\begin{aligned}&A_0\left[(B_0C_0)d_0\right]+A_0\left[(B_0^tC_0)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0C_0)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0^tC_0)d_0\right]-\\&-A_0\left[(B_0C_0^t)d_0\right]-A_0\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0C_0^t)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]\to 8\left\|\frac{0}{-\bar{a}\left[(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{d}\right]}\right\|;\end{aligned}$$

2.5.
$$\begin{aligned}&A_0\left[(B_0C_0)d_0\right]-A_0\left[(B_0^tC_0)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0C_0)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0^tC_0)d_0\right]+\\&+A_0\left[(B_0C_0^t)d_0\right]-A_0\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0C_0^t)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{aligned}$$

2.6.
$$\begin{aligned}&A_0\left[(B_0C_0)d_0\right]+A_0\left[(B_0^tC_0)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0C_0)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0^tC_0)d_0\right]-\\&-A_0\left[(B_0C_0^t)d_0\right]-A_0\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0C_0^t)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{aligned}$$

2.7.
$$\begin{aligned}&A_0\left[(B_0C_0)d_0\right]-A_0\left[(B_0^tC_0)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0C_0)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0^tC_0)d_0\right]-\\&-A_0\left[(B_0C_0^t)d_0\right]+A_0\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]-A_0^t\left[(B_0C_0^t)d_0\right]+A_0^t\left[(B_0^tC_0^t)d_0\right]\to 8\left\|\frac{(\bar{a}\cdot\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d})-(\bar{b}\cdot\bar{c})(\bar{a}\cdot\bar{d})}{0}\right\|;\end{aligned}$$

$$2.8.\quad \begin{aligned}&A_0\left[\left(B_0C_0\right)d_0\right]-A_0\left[\left(B_0^tC_0\right)d_0\right]-A_0^t\left[\left(B_0C_0\right)d_0\right]+A_0^t\left[\left(B_0^tC_0\right)d_0\right]-\\&-A_0\left[\left(B_0C_0^t\right)d_0\right]+A_0\left[\left(B_0^tC_0^t\right)d_0\right]+A_0^t\left[\left(B_0C_0^t\right)d_0\right]-A_0^t\left[\left(B_0^tC_0^t\right)d_0\right]\to 8\left\|\frac{0}{\left(\bar a\times\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)-\left(\bar a\times\bar d\right)\left(\bar b\cdot\bar c\right)}\right\|.\end{aligned}$$

$$3.1.\quad \begin{aligned}&\left[\left(A_0B_0\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0\right]d_0+\\&+\left[\left(A_0B_0\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0^t\right]d_0\to 8\left\|\frac{-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)}{0}\right\|;\end{aligned}$$

$$3.2.\quad \begin{aligned}&\left[\left(A_0B_0\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0\right]d_0+\\&+\left[\left(A_0B_0\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0^t\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\times\bar d-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c}\right\|;\end{aligned}$$

$$3.3.\quad \begin{aligned}&\left[\left(A_0B_0\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0\right]d_0+\\&+\left[\left(A_0B_0\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0^t\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{aligned}$$

$$3.4.\quad \begin{aligned}&\left[\left(A_0B_0\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0\right]d_0-\\&-\left[\left(A_0B_0\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0^t\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c-\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]\bar d}\right\|;\end{aligned}$$

$$3.5.\quad \begin{aligned}&\left[\left(A_0B_0\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0\right]d_0+\\&+\left[\left(A_0B_0\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0^t\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{aligned}$$

$$3.6.\quad \begin{aligned}&\left[\left(A_0B_0\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0\right]d_0-\\&-\left[\left(A_0B_0\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0^t\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{aligned}$$

$$3.7.\quad \begin{aligned}&\left[\left(A_0B_0\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0\right]d_0-\\&-\left[\left(A_0B_0\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0^t\right]d_0\to 8\left\|\frac{\left[\left(a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\cdot\bar d}{0}\right\|;\end{aligned}$$

$$3.8.\quad \begin{aligned}&\left[\left(A_0B_0\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0\right]d_0-\\&-\left[\left(A_0B_0\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0B_0^t\right)C_0^t\right]d_0+\left[\left(A_0^tB_0\right)C_0^t\right]d_0-\left[\left(A_0^tB_0^t\right)C_0^t\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)}\right\|.\end{aligned}$$

$$4.1.\quad \begin{aligned}&\left[A_0\left(B_0C_0\right)\right]d_0+\left[A_0\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0C_0\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0+\\&+\left[A_0\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0\to 8\left\|\frac{\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\cdot\bar d-\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)}{0}\right\|;\end{aligned}$$

4.2.
$$\left[A_0\left(B_0C_0\right)\right]d_0+\left[A_0\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0C_0\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0+\left[A_0\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0-$$
$$-\left[A_0^t\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{\bar{a}\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]+\left[\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\times\bar{d}-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right]\bar{d}-\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)}\right\|;$$

4.3.
$$\left[A_0\left(B_0C_0\right)\right]d_0-\left[A_0\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0C_0\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0+$$
$$+\left[A_0\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;$$

4.4.
$$\left[A_0\left(B_0C_0\right)\right]d_0+\left[A_0\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0C_0\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0-$$
$$-\left[A_0\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{-\bar{a}\left[\left(b\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]}\right\|;$$

4.5.
$$\left[A_0\left(B_0C_0\right)\right]d_0-\left[A_0\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0C_0\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0+$$
$$+\left[A_0\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0\to$$

4.6.
$$\left[A_0\left(B_0C_0\right)\right]d_0+\left[A_0\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0C_0\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0-$$
$$-\left[A_0\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;$$

4.7.
$$\left[A_0\left(B_0C_0\right)\right]d_0-\left[A_0\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0C_0\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0-$$
$$-\left[A_0\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0\to 8\left\|\frac{\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{a}\cdot\bar{d}\right)}{0}\right\|;$$

4.8.
$$\left[A_0\left(B_0C_0\right)\right]d_0-\left[A_0\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0C_0\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0^tC_0\right)\right]d_0-$$
$$-\left[A_0\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0+\left[A_0^t\left(B_0C_0^t\right)\right]d_0-\left[A_0^t\left(B_0^tC_0^t\right)\right]d_0\to 8\left\|\frac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)}\right\|.$$

5.1.
$$\left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right)+\left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right)+\left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right)+\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right)+$$
$$+\left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right)+\left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right)+\left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right)+\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right)\to 8\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)}{0}\right\|;$$

5.2.
$$\left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right)+\left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right)-\left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right)-\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right)+$$
$$+\left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right)+\left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right)-\left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right)-\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right)\to 8\left\|\frac{0}{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)}\right\|;$$

5.3.
$$\left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right)-\left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right)+\left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right)-\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right)+$$
$$+\left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right)-\left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right)+\left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right)-\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right)\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;$$

5.4.
$$\left(A_0B_0\right)\left(C_0d_0\right)+\left(A_0B_0^t\right)\left(C_0d_0\right)+\left(A_0^tB_0\right)\left(C_0d_0\right)+\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0d_0\right)-$$
$$-\left(A_0B_0\right)\left(C_0^td_0\right)-\left(A_0B_0^t\right)\left(C_0^td_0\right)-\left(A_0^tB_0\right)\left(C_0^td_0\right)-\left(A_0^tB_0^t\right)\left(C_0^td_0\right)\to 8\left\|\frac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\bar{b}}\right\|;$$

5.5.
$$\begin{gathered}(A_0B_0)(C_0d_0)-(A_0B_0^t)(C_0d_0)-(A_0^tB_0)(C_0d_0)+(A_0^tB_0^t)(C_0d_0)+\\+(A_0B_0)(C_0^td_0)-(A_0B_0^t)(C_0^td_0)-(A_0^tB_0)(C_0^td_0)+(A_0^tB_0^t)(C_0^td_0)\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{gathered}$$

5.6.
$$\begin{gathered}(A_0B_0)(C_0d_0)+(A_0B_0^t)(C_0d_0)-(A_0^tB_0)(C_0d_0)-(A_0^tB_0^t)(C_0d_0)-\\-(A_0B_0)(C_0^td_0)-(A_0B_0^t)(C_0^td_0)+(A_0^tB_0)(C_0^td_0)+(A_0^tB_0^t)(C_0^td_0)\to 8\left\|\frac{0}{0}\right\|;\end{gathered}$$

5.7.
$$\begin{gathered}(A_0B_0)(C_0d_0)-(A_0B_0^t)(C_0d_0)+(A_0^tB_0)(C_0d_0)-(A_0^tB_0^t)(C_0d_0)-\\-(A_0B_0)(C_0^td_0)+(A_0B_0^t)(C_0^td_0)-(A_0^tB_0)(C_0^td_0)+(A_0^tB_0^t)(C_0^td_0)\to 8\left\|\frac{(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d})}{0}\right\|;\end{gathered}$$

5.8.
$$\begin{gathered}(A_0B_0)(C_0d_0)-(A_0B_0^t)(C_0d_0)-(A_0^tB_0)(C_0d_0)+(A_0^tB_0^t)(C_0d_0)-\\-(A_0B_0)(C_0^td_0)+(A_0B_0^t)(C_0^td_0)+(A_0^tB_0)(C_0^td_0)-(A_0^tB_0^t)(C_0^td_0)\to 8\left\|\frac{0}{[\bar{a}\cdot(\bar{c}\times\bar{d})]\bar{b}-(\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{c}\times\bar{d})}\right\|.\end{gathered}$$

Сопоставляя полученные результаты, находим векторно-матричные соответствия в виде

1.1.
$$\begin{gathered}\frac{1}{8}(A_0+A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0\to\left\|\frac{-(\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{c}\cdot\bar{d})}{0}\right\|=\left\|\frac{\bar{a}\cdot[(\bar{b}\times\bar{c})\times\bar{d}]-(\bar{a}\cdot\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d})}{0}\right\|=\\=\left\|\frac{-(\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{c}\cdot\bar{d})}{0}\right\|=\left\|\frac{[\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})]\cdot\bar{d}-(\bar{a}\cdot\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d})}{0}\right\|=\left\|\frac{-(\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{c}\cdot\bar{d})}{0}\right\|;\end{gathered}$$

1.2.
$$\begin{gathered}\frac{1}{8}(A_0-A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=\left\|\frac{0}{-(\bar{a}\times\bar{b})(\bar{c}\cdot\bar{d})}\right\|=\left\|\frac{0}{-(\bar{a}\times\bar{b})(\bar{c}\cdot\bar{d})}\right\|=\left\|\frac{0}{\bar{a}\times[(\bar{b}\times\bar{c})\times\bar{d}]-(\bar{a}\times\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d})}\right\|=\\=\left\|\frac{0}{[(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}]\times\bar{d}-[(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{d}]\bar{c}}\right\|=\left\|\frac{0}{\bar{a}[(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{d}]+[\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})]\times\bar{d}-[\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})]\bar{d}-(\bar{b}\cdot\bar{d})(\bar{a}\times\bar{c})}\right\|;\end{gathered}$$

1.3.
$$\frac{1}{8}(A_0+A_0^t)(B_0-B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|;$$

1.4.
$$\begin{gathered}\frac{1}{8}(A_0+A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0-C_0^t)d_0=\left\|\frac{0}{-\bar{a}[\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{d})]}\right\|=\left\|\frac{0}{-\bar{a}[(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{d}]}\right\|=\\=\left\|\frac{0}{[(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{d}]\bar{c}-[(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\bar{d}]\bar{b}-[(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}]\bar{d}}\right\|=\end{gathered}$$

1.5.
$$\frac{1}{8}(A_0-A_0^t)(B_0-B_0^t)(C_0+C_0^t)d_0=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|;$$

1.6.
$$\frac{1}{8}(A_0-A_0^t)(B_0+B_0^t)(C_0-C_0^t)d_0=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\left\|\frac{0}{0}\right\|;$$

1.7.
$$\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0=\left\|\frac{\bar a\cdot\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]}{0}\right\|=\left\|\frac{\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)}{0}\right\|=$$
$$=\left\|\frac{\left[\left(a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\cdot\bar d}{0}\right\|=\left\|\frac{\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)}{0}\right\|=\left\|\frac{\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)}{0}\right\|;$$

1.8.
$$\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0=\left\|\frac{0}{\bar a\times\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]}\right\|=\left\|\frac{0}{\left(\bar a\times\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)-\left(\bar a\times\bar d\right)\left(\bar b\cdot\bar c\right)}\right\|=$$
$$=\left\|\frac{0}{\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)}\right\|=\left\|\frac{0}{\left(\bar a\times\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)-\left(\bar a\times\bar d\right)\left(\bar b\cdot\bar c\right)}\right\|=\left\|\frac{0}{\left[\bar a\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]\bar b-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\times\bar d\right)}\right\|.$$

Откуда следуют тождества векторной алгебры, связывающие мультипликативные композиции четырех векторов:

1.1. $-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)=\bar a\cdot\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]-\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)$,

$-\left(\bar a\cdot\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)=\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\cdot\bar d-\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)$,

$\bar a\cdot\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]-\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)=\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\cdot\bar d-\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)$.

1.2. $-\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)=\bar a\times\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]-\left(\bar a\times\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)$,

$-\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)=\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\times\bar d-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c$,

$-\left(\bar a\times\bar b\right)\left(\bar c\cdot\bar d\right)=\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\times\bar d-\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\bar d-\left(\bar b\cdot\bar d\right)\left(\bar a\times\bar c\right)$,

$\bar a\times\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]-\left(\bar a\times\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)=\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\times\bar d-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c$,

$\bar a\times\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\times\bar d\right]-\left(\bar a\times\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)=\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\times\bar d-\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\bar d-\left(\bar b\cdot\bar d\right)\left(\bar a\times\bar c\right)$,

$\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\times\bar d-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c=\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]+\left[\bar a\times\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\times\bar d-\left[\bar a\cdot\left(\bar b\times\bar c\right)\right]\bar d-\left(\bar b\cdot\bar d\right)\left(\bar a\times\bar c\right)$.

1.3. $0=0$,

1.4. $-\bar a\left[\bar b\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]=-\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]$,

$-\bar a\left[\bar b\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]=\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c-\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]\bar d$, $-\bar a\left[\bar b\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]=\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)-\left[\bar a\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]\bar b$,

$-\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]=\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c-\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]\bar d$, $-\bar a\left[\left(\bar b\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]=\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)-\left[\bar a\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]\bar b$,

$\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar d\right]\bar c-\left[\left(\bar a\times\bar c\right)\cdot\bar d\right]\bar b-\left[\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\bar c\right]\bar d=\left(\bar a\times\bar b\right)\times\left(\bar c\times\bar d\right)-\left[\bar a\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)\right]\bar b$.

1.5. $0=0$,

1.6. $0=0$,

1.7. $\bar a\cdot\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]=\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)$,

$\bar a\cdot\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]=\left[\left(a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\cdot\bar d$,

$\bar a\cdot\left[\bar b\times\left(\bar c\times\bar d\right)\right]=\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)$,

$\left[\left(a\times\bar b\right)\times\bar c\right]\cdot\bar d=\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)$, $\left(\bar a\times\bar b\right)\cdot\left(\bar c\times\bar d\right)=\left(\bar a\cdot\bar c\right)\left(\bar b\cdot\bar d\right)-\left(\bar b\cdot\bar c\right)\left(\bar a\cdot\bar d\right)$,

$$\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\bar{c}\right]\cdot\bar{d}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right).$$

1.8. $\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]=\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right),$

$$\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]=\left[\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{b}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right),$$

$$\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]=\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\bar{b}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right),$$

$$\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)=\left[\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{b}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right),$$

$$\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)-\left(\bar{a}\times\bar{d}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\right)=\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\bar{b}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right),$$

$$\left[\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{b}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)=\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\bar{b}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\times\bar{d}\right).$$

Отметим, что некоторые из этих тождеств известны. Например, тождества:

- Лагранжа [1]

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)=\begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{c} & \bar{a}\cdot\bar{d}\\ \bar{b}\cdot\bar{c} & \bar{b}\cdot\bar{d}\end{vmatrix},$$

- Определитель Грамма [4] при $\bar{a}=\bar{c}$ и $\bar{b}=\bar{d}$

$$\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right]=\begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{a} & \bar{a}\cdot\bar{b}\\ \bar{b}\cdot\bar{a} & \bar{b}\cdot\bar{b}\end{vmatrix},$$

- Эйлера-Лагранжа [3]

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)^2=\bar{a}^2\bar{b}^2-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2,$$

- и другие формулы

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)=\bar{b}\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]-\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]=$$

$$=\bar{c}\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{d}\right)\right]-\bar{d}\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\right],$$

$$\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{a}-\left[\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{c}+$$

$$+\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{d}\right]\bar{c}-\left[\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right]\bar{d}=0.$$

VIII. Устанавливаются матричные формулы, для представления мультипликативные композиции векторной алгебры. Например:

$$\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)}{0}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0;$$

$$\left\|\frac{0}{-\bar{a}\left[\bar{b}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0;$$

$$\left\|\frac{\bar{a}\cdot\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}{0}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0;$$

$$\left\|\frac{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}{0}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0;$$

$$\left\|\frac{0}{-\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\left(\bar{c}\cdot\bar{d}\right)}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0;$$

$$\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\left[\bar{b}\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0-B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0;$$

а также

$$\left\|\frac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\bar{b}}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0;$$

$$\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0;$$

$$\left\|\frac{\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}{0}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0;$$

и другие.

Используя приведенные базовые соответствия, выводятся иные матричные представления для отдельных мультипликативных композиций векторной алгебры.

Пример 1. Учитывая, что

$$\left\|\frac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\bar{b}}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0$$

и

$$\left\|\frac{0}{-\bar{b}\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}\right\|\to\frac{1}{8}\left(B_0+B_0^t\right)\left(A_0+A_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0,$$

составим алгебраическую сумму этих соответствий вида:

$$\left\|\frac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)-\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]\bar{b}}\right\|-\left\|\frac{0}{-\bar{b}\left[\bar{a}\cdot\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)\right]}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0-$$

$$-\frac{1}{8}\left(B_0+B_0^t\right)\left(A_0+A_0^t\right)\left(C_0-C_0^t\right)d_0.$$

Откуда следует формула матричного представления тройного векторного произведения вида:

$$\left\|\frac{0}{\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\times\left(\bar{c}\times\bar{d}\right)}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left[\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)-\left(B_0+B_0^t\right)\left(A_0+A_0^t\right)\right]\left(C_0-C_0^t\right)d_0.$$

Пример 2. Принимая во внимание, что

$$\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0$$

и

$$\left\|\frac{0}{-\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)d_0,$$

найдем разность:

$$\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}\right\|-\left\|\frac{0}{-\left(\bar{a}\times\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0-$$

$$-\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)d_0,$$

т.е. для тройного векторного произведения вида $\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]$ получим формулу матричного представления:

$$\left\|\frac{0}{\bar{a}\times\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0-A_0^t\right)\left[\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)-\left(C_0+C_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\right]d_0.$$

Пример 3. Так как

$$\left\|\frac{\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}{0}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0$$

и

$$\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}{0}\right\|\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)d_0,$$

то

$$\left\|\frac{\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]-\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}{0}\right\|-\left\|\frac{-\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\left(\bar{b}\cdot\bar{d}\right)}{0}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)d_0-$$

$$-\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)d_0,$$

т.е. для смешанного произведения вида $\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]$ получим формулу матричного представления:

$$\left\|\frac{\bar{a}\cdot\left[\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\times\bar{d}\right]}{0}\right\|\to$$

$$\to\frac{1}{8}\left(A_0+A_0^t\right)\left[\left(B_0+B_0^t\right)\left(C_0+C_0^t\right)-\left(C_0+C_0^t\right)\left(B_0+B_0^t\right)\right]d_0.$$

Выводы

Разработанный алгоритм представления кватернионными матрицами мультипликативных композиций (векторно-скалярных произведений) векторной алгебры систематически применен к четырем различным векторам. Полученные компактные матричные соответствия сложным произведениям четырех векторов непосредственно адаптированы к компьютерным технологиям, обеспечивают эффективные вычислительные алгоритмы, ускоряют программирование, облегчают верификацию. Цели апробации метода служит ряд выведенных тождеств векторной алгебры, в том числе известных, связывающих четыре вектора (тождество Лагранжа, определитель Грамма и другие).

Литература

1. Акивис М.А. Тензорное исчисление. / М.А. Акивис, В.В. Гольдберг – М.: Наука, 1969. -352с.
2. Борисенко А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. / А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов – Харьков: «Вища школа», 1978. – 216с.
3. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики / Н.А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – т. 1. – 480с.; т. 2. – 544с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832с.
5. Кравець Т.В. Представлення кватерніонними матрицями послідовності скінчених поворотів твердого тіла у просторі. / Кравець Т.В. // Автоматика-2000. Міжнародна конференція з автоматичного управління: Праці у 7-ми томах. – т.2. – Львів: Державний НДІ Інформаційної інфраструктури, 2000. – с.140-145.
6. Кравец Т.В. Об использовании кватернионных матриц для описания вращательного движения твердого тела в пространстве. / Т.В. Кравец // Техническая механика. – 2001. - №1. – с.148-157.
7. Кравец В.В. Описание кинематики и нелинейной динамики ассиметричного твердого тела кватернионными матрицами. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Прикладная механика. – 2009. – Том 45. – №2 – с.133-143.
8. Кравец В.В. Мультипликативные композиции матриц, эквивалентных не равным и противоположным векторам. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – 2/9 (44) – с.56-61.
9. Кравец В.В. Метод матричного представления мультипликативных композиций векторной алгебры. / В.В. Кравец, Т.В. Кравец, А.В. Харченко // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – 3/6 (45) – с.12-17.
10. Kravets V.V. Evaluation of the Centrifugal, Coriolis, and Gyroscopic Forces on a Railroad Vehicle Moving at High Speed / V.V. Kravets, T.V. Kravets // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44. №1. – p. 101-109.