УДК 519.876.5

АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТИ ОТКЛИКА МНОГОФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В АФФИННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Пропонується представлення моделі багатофакторного експерименту у вигляді квадратичної форми від стандартизованих аффінних змінних з метою її інтерпретації і визначення форми поверхні відгуку. Отримано залежності для переходу від вихідної форми моделі до рекомендованої

Ключові слова: багатофакторний експеримент, математична модель, аффінна система координат

Предлагается представление модели многофакторного эксперимента в виде квадратичной формы от стандартизованных аффинных переменных с целью ее интерпретации и определения формы поверхности отклика. Получены зависимости для перехода от исходной формы модели к рекомендуемой

Ключевые слова: многофакторный эксперимент, математическая модель, аффинная система координат

It is proposed a representation of model of multifactorial experiment in the form of a quadratic form of standardized affine variables in order to interpret it and determine the shape of the response surface. The dependences for the transition from the initial form of the model to the recommended one are presented

Key words: multifactorial experiment, mathematical model, affine coordinate system

А.М. Мильцын
Кандидат технических наук, профессор, начальник отдела*
Контактный тел.: (056) 780-22-08
E-mail: miltsin@bk.ru

Д.Г. Зеленцов
Доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор, заведующий кафедрой
Кафедра компьютерных технологий и высшей математики
Украинский государственный химико-технологический университет
пр. Гагарина, 8, г. Днепропетровск, Украина, 49000
Контактный тел.: (0562) 47-24-64

В.И. Олевский
Кандидат технических наук, заместитель директора*
Контактный тел.: (056) 780-22-07
E-mail: volevnew@gmail.com

*ТД Днепропетровский завод сварочных материалов
ул. Мониторная, 2а, г. Днепропетровск, Украина, 49130

1. Введение

При решении современных задач автоматизации и управления технологическими процессами, а также при разработке конструкций машин в химической и горной промышленности перспективным является использование нелинейных математических моделей, полученных на основе многофакторного анализа. В многофакторном анализе наиболее часто используются нелинейные полиномиальные модели вида

$$\widehat{T}=\beta_0+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\Delta e_i+\ldots+\sum_{i=1}^{N}\beta_{ii}\Delta e_i^2+\sum_{i>j}^{N}\beta_{ij}\Delta e_i\Delta e_j \qquad (1)$$

где T - функция отклика,

Δe_i - параметры технологических или конструктивных факторов,

$$(.)\big|_0=(.)\big|_{(x_k=0,k=\overline{1,N})},\beta_0=\widehat{T}\big|_0,\beta_i=\left.\frac{\partial\widehat{T}}{\partial(\Delta e_i)}\right|_0,$$

$$\beta_{ij}=\left.\frac{\partial^2 T}{\partial(\Delta e_i)\partial(\Delta e_j)}\right|_0,\beta_{ij}=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial(\Delta e_i)^2}\right|_0,i\neq j,i,j=\overline{1,N}.$$

Таким образом, задача описания реальных данных или построение математической модели сводится к оценке коэффициентов $\{\beta\}$ с помощью $\{b\}$, являющихся выборочными оценками, полученными на основе обработки некоторым способом (например – методом максимума правдоподобия) ограниченного ансамбля данных. При этом математическая модель T также имеет вид полинома второй степени

$$T = b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_i \Delta e_i + \ldots + \sum_{i=1}^{N} b_{ii} \Delta e_i^2 + \sum_{i>j}^{N} b_{ij} \Delta e_i \Delta e_j \qquad (2)$$

где b_i - оценка β_i, b_{ij} - оценка β_{ij}, $i,j=\overline{1,N}$.

Как правило, математические модели содержат переменные, имеющие различную физическую природу и существенно отличающиеся области изменения. Такая неоднородность затрудняет процесс интерпретации модели и снижает точность определения её коэффициентов, но легко устраняется путем их обезразмеривания и центрирования - нормирования или стандартизации переменных, приводящих их к единому масштабу. Полученное на основе эксперимента уравнение регрессии позволяет предсказывать значение параметра несущей способности для заданных условий в области проведения эксперимента и дает информацию о форме поверхности. Эта поверхность может исследоваться для определения оптимального соотношения факторов и режимов технологического процесса. При этом уравнение регрессии приводится к канонической форме

$$T - T_S = B_{11} z_1^2 + B_{22} z_2^2 + \ldots + B_{nn} z_n^2, \qquad (3)$$

где T_S – значение функции отклика в новом начале координат;

z_i – новые переменные, являющиеся линейными комбинациями исходных;

B_{ij} – коэффициенты канонической формы,

что соответствует переносу начала координат в новую точку S факторного пространства и повороту координатных осей. Такая форма уравнения позволяет составить представление о поверхности отклика в целом и выявить пути оптимизации функции отклика.

Уравнение регрессии к канонической форме можно привести различными способами. Попытки использования таких моделей в химическом машиностроении и обогащении делались в ряде работ [1,2], но пока широкого распространения не получили. Это связано, в том числе, и с некоторыми проблемами вычислительного характера, решение которых рассматривается в настоящей работе.

2. Анализ стандартной методики

Приведение уравнения регрессии к каноническому виду в соответствии с принятой в ряде работ методикой [3,4] сводится к отысканию частных производных параметра T по всем вторичным факторам и составлению системы уравнений вида

$$\frac{\partial T}{\partial \Delta e_i} = 0 \qquad (i=\overline{1,n}).$$

Существование решения этой системы в виде корней $(\Delta e_{1S}, \Delta e_{2S}, \ldots, \Delta e_{nS})$ определяет центральную поверхность с координатами центра в $S(\Delta e_{1S}, \Delta e_{2S}, \ldots, \Delta e_{nS})$ и переносом начала координат в точку S. Таким образом, каноническое уравнение регрессии описывает поверхность в окрестности экстремума поверхности отклика в точке S, что облегчает исследование этой поверхности. Коэффициенты канонической формы уравнения находятся из характеристического уравнения

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11}-B & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-B & \ldots & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn}-B \end{vmatrix} = 0$$

Левая часть характеристического уравнения является детерминантом действительной симметрической матрицы. Поэтому, в соответствии с теоремой о приведении квадратной формы к главным осям [5] все характеристические корни этой матрицы являются действительными числами. Эти корни и будут коэффициентами искомой квадратичной формы, для которых должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} B_{ii}.$$

Из условий нахождения коэффициентов $B_{ii} (i=\overline{1,n})$ следует, что для приведения произвольного многочлена второй степени от n неизвестных к каноническому виду нужно привести содержащуюся в нем квадратичную форму от n неизвестных к главным осям. По построению новый базис будет ортонормированным.

Для нахождения зависимости между факторами $\Delta e_1, \ldots, \Delta e_n$ и каноническими переменными $z_1, \ldots, z_n$ необходимо решить систему из n уравнений

$$\begin{aligned} &(b_{11}-B_{ii})m_{i1} + b_{12}m_{i2} + \ldots + b_{1n}m_{in} = 0; \\ &b_{21}m_{i1} + (b_{22}-B_{ii})m_{i2} + \ldots + b_{2n}m_{in} = 0; \\ &b_{n1}m_{i1} + b_{n2}m_{i2} + \ldots + (b_{nn}-B_{ii})m_{in} = 0 \qquad (i=\overline{1,n}) \end{aligned} \qquad (4)$$

относительно неизвестных $m_{ik} (i,k=\overline{1,n})$.

Системы могут быть решены лишь с точностью до постоянного множителя в силу того, что матрица главного определителя в каждом случае заведомо вырожденная (это следует из условия нахождения коэффициентов B_{ii}). При этом ранг матрицы B может быть произвольно меньшим $n: n - \mathrm{rang}\, B \geq 1$.

Приведем, например, к каноническому виду уравнение

$$T^* = \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ii} \Delta e_i^2 + a_i \Delta e_i \right] + a_\circ,$$

причем $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$ и среди коэффициентов $a_{ii} (i=\overline{1,n})$ есть три численно равных между собой $a_{kk} = a_{k+1\,k+1} = a_{k+2\,k+2} = a$. Легко видеть, что поверхность отклика в этом случае является центральной. Решая характеристическое уравнение матрицы коэффициентов многочлена

$$\det(\|a_{ii}\| - \lambda_{ii} E) = 0,$$

где E – единичная матрица,

получим три одинаковых собственных значения, равные числу a. Тогда для системы для данного случая при $i=k$, $i=k+1$, $i=k+2$

$n - \mathrm{rang}\, B = 3$

и системы будут разрешены лишь с точностью до трех мультипликативных постоянных. Вычислим далее величины

$$M_{ij} = \frac{m_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2}} \qquad (i,j=\overline{1,n}),$$

для которых выполняется условие нормировки

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij}^2 = 1 .$$

Искомая зависимость между переменными имеет вид

$$z_k = M_{k1}(\Delta e_1 - \Delta e_{1S}) + ... + M_{kn}(\Delta e_n - \Delta e_{nS}) \quad (k = \overline{1,n}) ,$$

где Δe_{iS} – координаты центра поверхности;
z_k – новые переменные;
Δe_i – технологические факторы.

При приведении к канонической форме регрессии указанным способом в конкретных случаях возникают некоторые существенные трудности [6].

1. Не всякое уравнение регрессии можно привести к канонической форме таким образом. Анализ нецентральных функций отклика этим способом провести нельзя.

2. При анализе функции отклика от большого количества факторов необходимо использование численных процедур [5, 7]. Однако при приведении к каноническому виду указанным методом необходимо решать системы линейных уравнений с вырожденными матрицами коэффициентов, причем ранг матрицы первоначально неизвестен. Такие алгоритмы значительно усложняют расчетную программу и снижают ее эффективность.

Таким образом, возникает необходимость разработки нового метода приведения уравнения к канонической форме, устраняющего указанные недостатки.

3. Методика приведения уравнения к канонической форме в аффинной системе координат

Избавиться от указанных трудностей можно, если привести уравнение регрессии к каноническому виду следующим способом.

Функция отклика представляется в виде

$$\begin{cases} T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta e_i \Delta e_j + \sum_{i=1}^{n} b_i \Delta e_i \Delta e_{n+1} + b_o \Delta e_{n+1}^2 \\ \Delta e_{n+1} = 1 \end{cases} , \qquad (5)$$

адекватном исходному (2) так, что первое входящее в систему уравнение является квадратичной формой от $n+1$ переменных. Этим поверхность $n+1$ -мерного пространства представляется в качестве сечения поверхности $(n+2)$-мерного пространства гиперплоскостью $x_2 = 1$. В $(n+2)$-мерном пространстве правая часть уравнения – всегда центральная поверхность.

Преобразование будем вести таким образом, чтобы новых базисных векторов остались в пространстве исходной размерности $n+1$. Это необходимо для того, чтобы новые канонические переменные при проектировании на исходную плоскость не приобрели линейной зависимости.

Преобразуем полученную квадратичную форму к каноническому виду по теореме Лапласа [5]. Для того, чтобы новые $n+1$ базисных векторов оставались в первоначально определенной гиперплоскости $x_{n+1} = 1$, необходимо провести преобразование так, чтобы последняя не преобразованная квадратичная форма содержала x_{n+2} и только эту неизвестную. Тогда матрица преобразования координат имеет следующий вид:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|} & M & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & ...1 \end{array} \right);$$

а матрица связи базисов будет такой:

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ M' & 0 \\ & ... \\ \hline & 1 \end{array} \right),$$

где M и M' – некоторые матрицы.

Матрица перехода в общем случае не ортогональна. Поэтому преобразование приведет к некоторой аффинной системе координат. Это дает возможность (в силу независимости канонических переменных) решить задачу, первоначально поставленную перед приведением уравнения регрессии к каноническому виду. Действительно, проявляется возможность до численного анализа судить о поверхности отклика и находить пути оптимизации функции отклика T в новом базисе.

Поскольку оптимизация осуществляется численно, требование ортонормированности базиса не является обязательным.

Преобразования с помощью теоремы Лапласа сводят вычисления к последовательности безусловных арифметических действий, и этим устраняются трудности программирования задачи.

4. Численные результаты

Приведенная методика была применена к исследованию математической модели, полученной при обработке результатов многофакторного эксперимента по изучению влияния семи вторичных факторов на параметр устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки [8]. В эксперименте участвовали тонкостенные оболочки диаметром 0,143 м, толщиной стенки $2{,}5\text{x}10^{-4}$ м и длиной 0,2 м, изготовленные из стали марки Х18Н9-н. Статистические характеристики факторов приведены в табл. 1. Эксперимент проводился в соответствии с ядром плана 2^{7-2}, являющегося четверть – репликой полного факторного эксперимента 2^7. Для принятой дробности плана на основе априорной информации удалось установить, что минимальное число опытов, необходимое для раздельного оценивания линейных факторов и их парных взаимодействий, равно 32. Для определения коэффициентов при нелинейных членах план эксперимента был дополнен до плана второго порядка при общем числе опытов M = 47. Таким образом, был получен квазиортогональный центральный композиционный план при варьировании семи активных факторов на пяти уровнях.

В дальнейшем ансамбль факторов был дополнен данными пассивного наблюдения за восьмым фактором, параметры которого также представлены в таблице.

Таблица 1

Статистические характеристики факторов

Описание переменных	Условные обозначения	Единица измерения	Среднее значение	Размах
Глубина инициирующей лунки	w	м	9,1x10^{-4}	3,830x10^{-4}
Продольная длина инициирующей лунки	l_L	м	3,3x10^{-2}	9,309x10^{-3}
Поперечная ширина инициирующей лунки	l_φ	м	2,6x10^{-2}	6,903x10^{-3}
Конусность	α	минуты	96	40
Овальность	$\frac{a}{b}$	-	0,9	0,039
Амплитуда неплоскостности торца	A_T	м	1,5x10^{-4}	4,800x10^{-5}
Число волн неплоскостности торца	n_T	-	12	5
Разнотолщинность	$\delta_{max}-\delta_{min}$	м	3,2x10^{-6}	1,500x10^{-6}

Полученная модель имеет вид

$$\Delta T^0 = -0,489 + 0,111 l_\varphi^0 + 0,325 A_T^0 + $$
$$+0,595 n_T^0 - 0,016 w^0 + 0,359\alpha^0 +$$
$$+0,121 l_L^0 + 0,244\left(\frac{a}{b}\right)^0 - 0,025\left(\delta_{max}-\delta_{min}\right)^0 +$$
$$+0,188\left(A_T^0\right)^2 + 0,292\left(n_T^0\right)^2 -$$
$$-0,471\alpha^0\left(\delta_{max}-\delta_{min}\right)^0 - 0,090 A_T^0\left(\frac{a}{b}\right)^0 - 0,152\alpha^0\left(\frac{a}{b}\right)^0 -$$
$$-0,018\alpha^0 l_L^0 - 0,494\left(\delta_{max}-\delta_{min}\right)^0 A_T^0 +$$
$$+0,104 A_T^0 l_L^0 + 0,265 A_T^0 n_T^0 +$$
$$+0,331 l_\varphi^0\left(\delta_{max}-\delta_{min}\right)^0 - 0,198 l_\varphi^0 w^0 + 0,111 l_\varphi^0 n_T^0 +$$
$$+0,286\left(\frac{a}{b}\right)^0\left(\delta_{max}-\delta_{min}\right)^0 - 0,213 n_T^0\left(\frac{a}{b}\right)^0 - 0,111 n_T^0 l_T^0 .$$

Исходное уравнение представлялось в виде матрицы квадратичной формы, представленной в табл. 2. Каноническому анализу подвергалась модель, содержащая управляемые переменные $l_\varphi, n_T, A_T, \alpha, w, \frac{a}{b}, l_L$ и неуправляемую ($\delta_{max}-\delta_{min}$). В результате счета получены следующие канонические параметры

$$z_1 = l_L^0 + 0,500 n_T^0 + 0,293 A_T^0 - 0,130 l_L^0 - 0,253 w^0 +$$
$$+1,884(\delta_{max}-\delta_{min})^0 + 0,690;$$

$$z_2 = n_T^0 + 0,919 A_T^0 - 0,406 l_L^0 + 2,381 w^0 -$$
$$-19,672(\delta_{max}-\delta_{min})^0 + 1,020;$$

$$z_3 = A_T^0 + 2,320 l_L^0 - 5,667 w^0 -$$
$$-11,440\left(\frac{a}{b}\right)^0 + 49,996(\delta_{max}-\delta_{min})^0 - 0,578;$$
$$z_4 = \alpha^0 + 0,500 l_L^0 - 1,347 w^0 -$$
$$-1,002\left(\frac{a}{b}\right)^0 + 11,464(\delta_{max}-\delta_{min})^0 - 0,546; \qquad (6)$$

$$z_5 = l_L^0 - 0,700 w^0 - 3,185\left(\frac{a}{b}\right)^0 +$$
$$+6,579(\delta_{max}-\delta_{min})^0 + 0,174;$$
$$z_6 = w^0 - 1,923\left(\frac{a}{b}\right)^0 - 8,240(\delta_{max}-\delta_{min})^0 + 0,029;$$
$$z_7 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 - 0,672(\delta_{max}-\delta_{min})^0 - 0,128;$$
$$z_8 = (\delta_{max}-\delta_{min})^0 - 0,15;$$
$$z_9 = 1 .$$

Уравнение в канонической форме имеет следующий вид

$$\Delta T^0 + 0,068 = -0,477 z_1^2 - 0,076 z_2^2 - 0,059 z_3^2 +$$
$$+0,684 z_4^2 + 0,658 z_5^2 + 0,250 z_6^2 + 8,094 z_7^2 - 4,986 z_8^2. \qquad (7)$$

Уравнение (7) является уравнением поверхности отклика в косоугольной ненормированной системе координат. Для облегчения анализа полученной канонической формы пронормируем переменные z_i по формуле

$$\tilde{z}_i = \frac{z_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} M_{ij}^2}} ,$$

где

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta e_j^0 + M_{in+1} \qquad (i=\overline{1,n})$$

в соответствии с (6). При этом коэффициенты при $\tilde{z}_i$ выражаются через коэффициенты при z следующим образом

$$\tilde{B}_i = \left(\sum_{j=1}^{n+1} M_{ij}^2\right) B_i .$$

В результате указанных преобразований получим уравнение вида

$$\Delta T^0 + 0,058 = -2,462\tilde{z}_1^2 - 30,073\tilde{z}_2^2 - 157,488\tilde{z}_3^2 +$$
$$+92,192\tilde{z}_4^2 + 36,155\tilde{z}_5^2 + 18,149\tilde{z}_6^2 + 11,881\tilde{z}_7^2 - 5,100\tilde{z}_8^2. \qquad (8)$$

Анализ полученного уравнения показывает, что поверхность отклика представляет собой параболоид в девятимерном евклидовом пространстве канонических переменных и функции отклика. Классификация поверхности отклика показывает, что поверхность не имеет абсолютного экстремума (коэффициенты B_i имеют различные знаки) и достигает экстремального значения на границе области определения переменных. Величина этих значений существенно зависит от рассматриваемой области применения математической модели и, следовательно, области изменения канонических переменных $\tilde{z}_i$. Для рассматриваемого случая девятимерного гиперкуба область изменения определяется как решение задачи отыскания экстремума линейных форм, связывающих исходные переменные $\{\Delta e_i\}$ с каноническими в виде (6).

Каноническая форма (8) позволяет указать направление оптимизации технологического процесса и упростить математическую модель для практического использования. Так, из (8) видно, что наилучшее значение ΔT^0_{min} может достигаться при

$$\tilde{z}_i = |\tilde{z}_1|_{max},\ \tilde{z}_2 = |\tilde{z}_2|_{max},\ \tilde{z}_3 = |\tilde{z}_3|_{max},\ \tilde{z}_4 = 0,$$

$$\tilde{z}_5 = 0,\ \tilde{z}_6 = 0,\ \tilde{z}_7 = 0,\ \tilde{z}_8 = |\tilde{z}_8|_{max}.$$

Таблица 2

Матрица исходной квадратичной формы

	l_φ	n_T	A_T	α	l_L	w	$\frac{a}{b}$	$\delta_{max}-\delta_{min}$	b_0
l_φ	0,000								
n_T	0,000	-0,187							
A_T	-0,043	-1,140	-0,239		симметрично				
α	0,000	0,000	0,000	0,000					
l_L	0,000	-0,080	0,062	-0,487	0,000				
w	0,121	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000			
$\frac{a}{b}$	0,000	0,673	0,000	0,876	0,000	-0,533	0,000		
$\delta_{max}-\delta_{min}$	-0,974	-0,187	0,074	-0,204	0,000	0,000	-0,125	0,000	
b_0	-0,044	-0,109	-0,286	-0,151	-0,081	0,008	-0,093	0,097	-0,378

Точка, соответствующая ΔT^0_{min} в исходном пространстве (для Δe^0_i), определяется путем решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \tilde{z}_i = \dfrac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n+1} M_{ij}}} = \left(M_{i1} l^0_\varphi + M_{i2} n^0_T + \ldots + M_{i(n+1)}\right), \\ (i = \overline{1,n}), \end{cases}$$

где $\Delta e^0_1 = l^0_\varphi,\ \Delta e^0_2 = n^0_T, \ldots$

Из уравнения можно выделить существенно влияющие комбинации исходных переменных по величине канонических коэффициентов. Такими комбинациями являются выражения для $\tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_1, \tilde{z}_5$, входящие в (8) с наибольшими по величине коэффициентами.

При решении практических задач производится обмер тонкостенных оболочек по набору $\{\Delta e_i\}$, входящих только в наиболее значимые канонические переменные $\tilde{z}_i$. По результатам обмера с использованием уравнения можно осуществить оптимизацию технологических свойств по несущей способности без учета малозначимых канонических переменных.

5. Выводы

В настоящей работе дано систематизированное изложение методов приведения уравнения регрессии к каноническому виду. Получены выражения для аналитического расчета коэффициентов приближений по указанным методам. Проведен анализ полученных приближений и определены условия их применения.

Предложен метод преобразования к каноническому виду, основанный на использовании аффинной системы координат общего вида и теоремы Лапласа. Метод позволяет упростить процесс вычислений, как на этапе построения модели, так и при ее дальнейшем использовании. Приведены выражения для расчета по данному методу в общем случае.

Проанализировано применение предложенного преобразования для моделирования несущей способности тонкостенных оболочек с комплексом несовершенств. Сделан вывод о правомочности такого преобразования. Показано, что такое преобразование позволяет выбрать наилучшую форму аппроксимации, обеспечивает удовлетворительный анализ ее качественного поведения и минимизирует расчеты при определении оптимума.

Литература

1. Рубинштейн Ю.Б., Филиппов Ю.А. Кинетика флотации. М.: Недра, 1980, 375 с.
2. Гаркушин Ю.К., Сергеев П.В. Применение композиционных реагентов-нефтепродуктов для интенсификации обезвоживания угля фильтрованием // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 2004. – Вип. 20(61). – С. 104 – 110.
3. Филаретов Г.Ф. К вопросу построения нелинейной регрессионной модели по данным пассивного эксперимента / Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. –С. 5-10.
4. Айвазян С.А. Статистические исследования зависимостей. М.: Металлургия, 1968. - 200 с.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Гостехиздат, 1956. - 380 с.
6. Саутин С.Н. Планирование эксперимента в химии и химической технологии. - Л.: Химия, 1975. - 48 с.
7. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. - М.: Металлургия, 1969. - 157 с.
8. Мильцын А.М. Нелинейное взаимодействие технологических несовершенств и их влияние на устойчивость тонкостенных оболочек (многофакторный подход), Ч. II / Механика твердого тела. – 1993. – Вып. 1. – С. 178 - 184.